21. LO STUDIO DI UN'AFFINITA'

ESEMPIO. Studiare l'affinità t di equazioni $\boxed{\begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}}$

"Studiare" un'affinità significa determinarne le caratteristiche essenziali e perciò:

1) stabilire il valore del determinante D = ad – bc che è detto "costante di affinità",

- il cui *segno* ci dice se l'affinità in questione è (vedi paragrafo 15)
  - *diretta* (D>0), cioè *"conserva il verso delle figure"*
  - o *inversa* (D<0), cioè *"inverte il verso delle figure"*
- il cui *valore assoluto*
  ci dà il rapporto S'/S fra l'area di una figura "trasformata" e l'area della figura di partenza
- e la cui *osservazione* ci permette di riconoscere se eventualmente si tratti
  di una isometria o di una similitudine, o comunque di un caso particolare

2) determinare gli eventuali "punti uniti"
(così facendo, si troveranno anche le eventuali "rette di punti uniti")

3) determinare le eventuali "rette unite".

OSSERVAZIONE PRELIMINARE IMPORTANTE

Prima di tutto converrà però osservare bene le equazioni dell'affinità,
perché se per caso si riconosce subito che si tratta di una "affinità notevole"
(traslazione, simmetria centrale o assiale, omotetia...),
allora è INUTILE fare tanti calcoli!

Ad esempio, in una omotetia è geometricamente ovvio che
- *l'unico punto unito è il centro di omotetia*
- *non si ha nessuna retta di punti uniti*
- *e si hanno invece infinite rette unite (tutte e sole quelle passanti per il centro di omotetia).*

Se non siamo in un caso particolare, invece, si opererà come illustrato qui di seguito.

1) CALCOLO DEL DETERMINANTE D = ad – bc (costante di affinità o "rapporto" di affinità)

$$t: \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = \qquad 2y - 1 \end{cases}$$

Ho trascritto le equazioni incolonnando i termini in modo opportuno;
questo per evitare possibili errori di distrazione nel calcolo della costante di affinità D.

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

- Essendo $\mathrm{D} < 0$, l'affinità è **inversa** (cioè inverte il verso delle figure)
- Essendo $|\mathrm{D}| = 2$, l'affinità **raddoppia le aree**
- La trasformazione **non è un'isometria**
  (ricordiamo che si ha una isometria se e solo se D vale +1 o –1,
  e inoltre ha gli elementi di una diagonale uguali fra loro e quelli dell'altra diagonale opposti fra loro)
  e neppure una *similitudine*.

2) DETERMINAZIONE DEI PUNTI UNITI

Un punto P si dice "unito" in una trasformazione t se è mutato in sé stesso dalla t;
in altre parole, se l'immagine di P attraverso la t è lo stesso P; insomma, se
t(P) = P.

Perciò **P(*x*, *y*) è unito se e solo se (*x'*, *y'*) = (*x*, *y*).**
Per la ricerca dei punti uniti basterà perciò sostituire, nelle equazioni della trasformazione, *x* e *y* al posto di *x'* e *y'*, per poi risolvere il sistema in *x*, *y* così ottenuto.

$$\begin{cases} x = y - x \\ y = 2y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \mathrm{U}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ è } \textit{punto unito}$$

3) DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

Nell'affinità da noi considerata $t:\begin{cases}x'=y-x\\ y'=2y-1\end{cases}$ *non* si hanno *rette di punti uniti*:
infatti abbiamo visto che c'è *un solo* punto unito, quello di coordinate (1/2, 1).
Si potrebbero però avere *rette unite*
(riguardo alla differenza fra "retta unita" e "retta di punti uniti",
pensa sempre al caso della simmetria assiale:
l'asse di simmetria è una retta "di punti uniti", *caso particolare* di retta "unita",
mentre sono rette "unite", ma non "di punti uniti", tutte quelle perpendicolari all'asse di simmetria).

Per la determinazione delle rette unite, ti presento due metodi:

- **il primo** è quello più "spontaneo", ma **comporta di solito calcoli piuttosto pesanti;**
- **l'altro è più ingegnoso e veloce.**

❑ **1° METODO PER LA DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE**

a) Consideriamo la generica retta $\boldsymbol{r:\ y=mx+q}$
b) scriviamo le equazioni della sua trasformata $\boldsymbol{r'=t(r)}$
c) e chiediamoci infine sotto quali condizioni per i parametri *m, q* la retta *r'* coincide con *r*.

Osserviamo che in questo modo
VENGONO "TAGLIATE FUORI" LE RETTE PARALLELE ALL'ASSE *y*,
la cui equazione *non* si può portare sotto la "forma esplicita" $\boldsymbol{y=mx+q}$ **.**
Vuol dire che ALLA FINE COMPLETEREMO IL PROCEDIMENTO
occupandoci anche di tali rette, che inizialmente escludiamo dalla nostra attenzione.

$$t:\begin{cases}x'=y-x\\ y'=2y-1\end{cases}\qquad t^{-1}:\begin{cases}y=\dfrac{y'+1}{2}\\ x=y-x'=\dfrac{y'+1}{2}-x'=\dfrac{y'+1-2x'}{2}\end{cases}$$

$\boxed{r:y=mx+q}\ \rightarrow\ r':\ \dfrac{y'+1}{2}=m\cdot\dfrac{y'+1-2x'}{2}+q$ e, sopprimendo gli apici e facendo i calcoli,

$\boxed{r':}\ \ y+1=my+m-2mx+2q;\ \ (1-m)y=-2mx+m+2q-1;\ \boxed{y=-\dfrac{2m}{1-m}x+\dfrac{m+2q-1}{1-m}\quad(m\neq 1)}$

$$\boxed{r'\equiv r}\leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2m}{1-m}=m\\ \dfrac{m+2q-1}{1-m}=q\end{cases}$$

Riflettiamo sulla condizione posta, $m\neq 1$.
Essa significa che il procedimento di isolare *y*
è possibile solo nel caso $m\neq 1$;
occorre allora chiedersi cosa accadrebbe nel caso $m=1$.
Risposta immediata:
la retta r' sarebbe parallela all'asse *y*, mentre r non lo è;
quindi, nel caso $m=1$, r non sarebbe unita.

$$\begin{cases}-2m=m-m^2;\quad m^2-3m=0;\quad m(m-3)=0;\quad m=0\vee m=3\\ \dots\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{m=0}\\ \dfrac{2q-1}{1}=q;\ \boxed{q=1}\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}\boxed{m=3}\\ \dfrac{3+2q-1}{1-3}=q;\ \ 2+2q=-2q;\ \boxed{q=-\dfrac{1}{2}}\end{cases}$$

Abbiamo così trovato le *rette unite*: $\boxed{r_1:\ y=1}$ e $\boxed{r_2:\ y=3x-\dfrac{1}{2}}$.

Come si diceva prima, a questo punto
il procedimento di ricerca delle rette unite **non è ancora terminato**.
Prendendo come "generica retta" $y=mx+q$,
abbiamo escluso dalla nostra considerazione le rette parallele all'asse *y*.
Ma anche una retta "verticale" (equazione: $x=k$) potrebbe eventualmente essere retta unita.
Dunque:

$$r:\ x=k\ \rightarrow\ r':\dfrac{y+1-2x}{2}=k$$

e si vede che r' non può, per alcun valore di *k*, essere verticale,
perché il termine in *y* non se ne può andare.
Quindi *r*, se è verticale, non può essere unita.

2° METODO (PIU' VELOCE) PER LA DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

Possiamo risparmiare un bel po' di calcoli col seguente ragionamento:
una retta *r* è unita nell'affinità *t* se e solo se coincide con la sua immagine, cioè risulta $t(r) = r$.
Ma allora, se *r* è unita, anche la CONTROIMMAGINE di *r* è *r* (e viceversa)!

Quindi
il 2° metodo consiste nel determinare le equazioni della retta CONTROIMMAGINE di *r* anziché della retta immagine
(il procedimento è più facile, perché non si è costretti ad invertire l'affinità!);
poi si confronterà *r* con la sua controimmagine, per stabilire quando coincidono
(= per quali valori di *m, q* coincidono).

$$t: \begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

Con $m=2$
$t^{-1}(r)$ è verticale
e non può quindi
coincidere con *r*,
che non lo è
↑

$$r: y = mx + q \quad \to$$

$$t^{-1}(r):\; 2y - 1 = m(y - x) + q; \quad ...; \quad (2-m)y = -mx + q + 1; \qquad y = -\frac{m}{2-m}x + \frac{q+1}{2-m} \quad (m \neq 2)$$

$$t^{-1}(r) \equiv r \leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{m}{2-m} = m \\ \dfrac{q+1}{2-m} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m = 2m - m^2; \quad m^2 - 3m = 0; \quad m(m-3) = 0; \quad m = 0 \vee m = 3 \\ \dfrac{q+1}{2-m} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ \dfrac{q+1}{2} = q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 3 \\ \dfrac{q+1}{2-3} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 3 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \textit{da cui } \boxed{r_1:\; y = 1}, \quad \boxed{r_2:\; y = 3x - \frac{1}{2}}$$

Come al solito, abbiamo lasciato da parte provvisoriamente le rette verticali,
e ora dovremo occuparci anche di esse:

$r:\; x = k \;\to\; t^{-1}(r):\; y - x = k$ *che non può coincidere con x=k, per nessun valore di k.*

UN ALTRO ESEMPIO.

Studiare l'affinità t di equazioni $\boxed{\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = 2 - y \end{cases}}$

1) CALCOLO DEL DETERMINANTE D = ad – bc (costante di affinità)

$$t: \begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = \quad -y + 2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- Essendo $D < 0$, l'affinità è **inversa** (cioè inverte il verso delle figure)
- Essendo $|D| = 1$, l'affinità **conserva le aree** (muta sempre una figura, in un'altra con la stessa area)
- La trasformazione **non è un'isometria**
  (è vero che D vale –1,
  ma non accade che gli elementi di una diagonale siano uguali e quelli dell'altra diagonale opposti)
  e nemmeno una *similitudine*.

2) DETERMINAZIONE DEI PUNTI UNITI

$$\begin{cases} \cancel{x} = \cancel{x} - 2y + 2 \\ y = 2 - y \end{cases} \begin{cases} 2y = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \begin{cases} x = qualsiasi \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} sono\ uniti\ tutti\ i\ punti\ con\ coordinate\ (x, 1) \\ vale\ a\ dire\ la\ retta\ \boxed{y=1}\ è\ una\ \boxed{retta\ di\ punti\ uniti} \end{matrix}$$

3) DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

Utilizziamo il 2° metodo, più comodo e veloce!

$r: y = mx + q \quad \rightarrow$

$t^{-1}(r):\ 2 - y = m(x - 2y + 2) + q;$

$2 - y = mx - 2my + 2m + q;$

$(2m-1)y = mx + 2m + q - 2;$

$$y = \frac{m}{2m-1}x + \frac{2m+q-2}{2m-1} \quad \left(m \neq \frac{1}{2};\ \begin{matrix} ma\ con\ m = 1/2\ si\ verifica\ subito \\ che\ la\ retta\ non\ può\ essere\ unita \end{matrix} \right)$$

$$t^{-1}(r) \equiv r \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2m-1} = m \\ \dfrac{2m+q-2}{2m-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 2m^2 - m; \quad \cancel{2}m^2 - \cancel{2}m = 0; \quad m(m-1) = 0; \quad m = 0 \vee m = 1 \\ \dfrac{2m+q-2}{2m-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ \dfrac{q-2}{-1} = q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ \dfrac{\cancel{2} + q \cancel{-2}}{2-1} = q \end{cases}$$

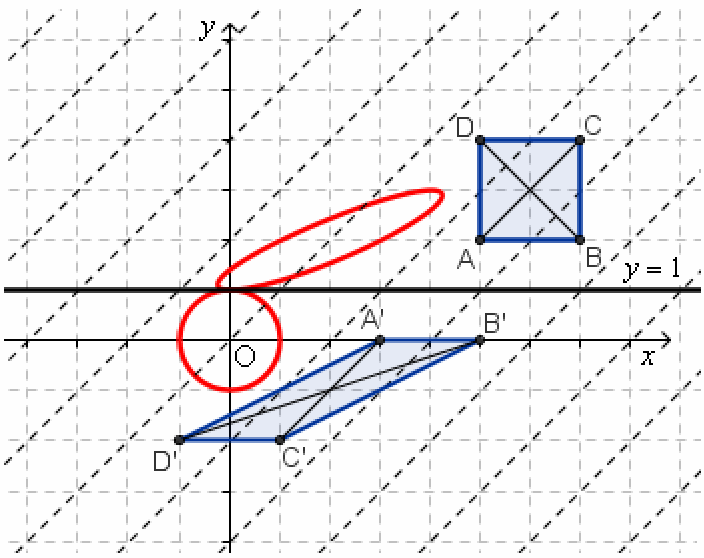
$$\begin{cases} m = 0 \\ q - 2 = -q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ q = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ q = qualsiasi! \end{cases} \qquad \begin{matrix} Si\ può\ poi\ controllare\ che \\ nessuna\ retta\ verticale\ (x = k)\ è\ unita \end{matrix}$$

E' perciò unita la retta con m=0 e q=1, ossia la $\boxed{y=1}$
(in effetti, l'avevamo trovata già prima come retta di punti uniti!)

e sono unite tutte le rette con m=1 e q *qualsiasi*, ossia tutte le rette di equazione $\boxed{y = x + q}$
(esse costituiscono il fascio di tutte le rette parallele alla bisettrice del 1° e 3° quadrante).

In definitiva, abbiamo in questa trasformazione una retta formata da punti uniti, più infinite altre rette, che sono "unite" ma non "di punti uniti".



La figura qui a fianco
cerca di dare un'idea
di come operi questa affinità,
mostrando

- la retta di punti uniti (a tratto marcato),
- alcune fra le infinite rette unite (tratteggiate)
- e inoltre una circonferenza con la rispettiva immagine, un quadrato con diagonali e la rispettiva immagine