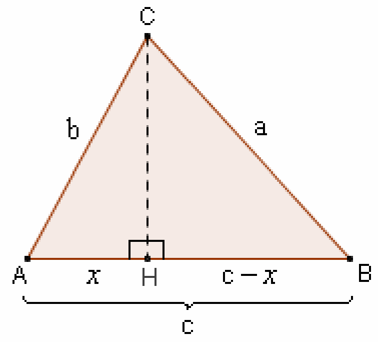
10.5 - LA FORMULA DI ERONE

Questa celebre formula **esprime l'area di un triangolo, in funzione delle misure dei suoi lati**.

Sia ABC un triangolo qualunque.
Adottando una simbologia molto efficace, e molto utilizzata, indichiamo con:

- a la misura del lato opposto al vertice A,
- b la misura del lato opposto al vertice B,
- c la misura del lato opposto al vertice C.



Il nostro obiettivo è di esprimere l'area S del triangolo in funzione delle tre misure a, b, c.

A tale scopo, proponiamoci innanzitutto di determinare la misura dell'altezza CH relativa alla base AB.

Posto AH = x, avremo:

$CH^2 = b^2 - x^2$ (Pitagora su AHC),

ma anche:

$CH^2 = a^2 - (c-x)^2$ (Pit. su BHC).

Sarà dunque, per la proprietà transitiva,

$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$

e da questa equazione potremo ricavare x:

$$b^2 \cancel{-x^2} = a^2 - c^2 + 2cx \cancel{-x^2}$$

$$2cx = b^2 - a^2 + c^2$$

$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

Ora che abbiamo determinato AH = x, andiamo a calcolare CH applicando Pitagora al triangolo rettangolo AHC (vedi colonna qui a fianco) $\rightarrow$

$$CH = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{\left(b^2 - a^2 + c^2\right)^2}{4c^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4b^2c^2 - \left(b^2 - a^2 + c^2\right)^2}{4c^2}} = \frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - \left(b^2 - a^2 + c^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{\left(2bc + \left(b^2 - a^2 + c^2\right)\right)\left(2bc - \left(b^2 - a^2 + c^2\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{\left(2bc + b^2 - a^2 + c^2\right)\left(2bc - b^2 + a^2 - c^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{\left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)} =$$

Ponendo a questo punto $\boxed{a+b+c} = \text{perimetro} \boxed{= 2p}$ potremo scrivere

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)} = \frac{1}{2c}\sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{\cancel{2}c} \cdot \cancel{4}^{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

E' quindi

$$S = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{c} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{c}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Abbiamo così costruito la bella

FORMULA DI ERONE (area di un triangolo in funzione dei lati):

$$\mathbf{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$ **a, b, c misure dei lati; p SEMIperimetro**

Ad **ESEMPIO**,
l'area di un triangolo di lati 7, 8 e 9 cm, e quindi di semiperimetro (7+8+9)/2=12 cm, misura cm^2
$\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$.
ovvero
$cm^2 \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$.

A PROPOSITO
Detti A, B, C *i vertici di un triangolo,* a, b, c *i lati rispettivamente opposti, e indicato con* p *il SEMIperimetro del triangolo, le distanze dei punti di contatto della circonferenza inscritta dai tre vertici* A, B, C *valgono rispettivamente* $p-a$, $p-b$, $p-c$, *come indicato in figura: dimostra questo bell' enunciato!* ⇨