9.3 - APPLICAZIONI DELLE SIMILITUDINI

TEOREMA DELLA BISETTRICE
La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati

IPOTESI
$D\hat{A}B = D\hat{A}C$

TESI
$BD : DC = AB : AC$

Dimostrazione

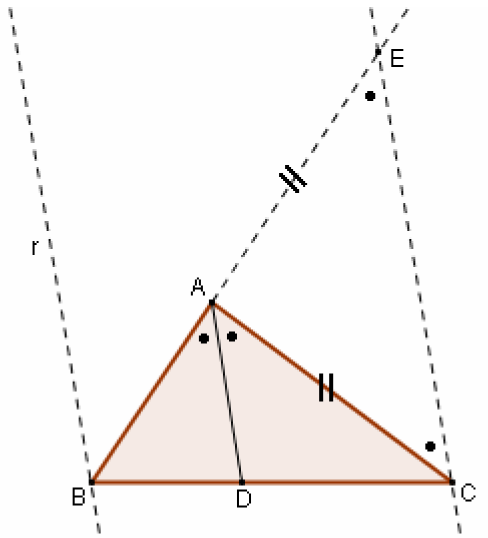
Da C tracciamo la parallela alla bisettrice AD,
e sia E il punto di intersezione
fra tale parallela e la retta del lato AB.
Osserviamo che il triangolo ACE è isoscele (AE = AC).
Infatti, gli angoli $A\hat{C}E$, $A\hat{E}C$ sono uguali perché:

$A\hat{C}E = D\hat{A}C$ (alterni interni, $AD \parallel CE$, trasv. AC)

$D\hat{A}C = D\hat{A}B$ (ipotesi)

$D\hat{A}B = A\hat{E}C$ (corrispondenti, $AD \parallel CE$, trasv. BE)

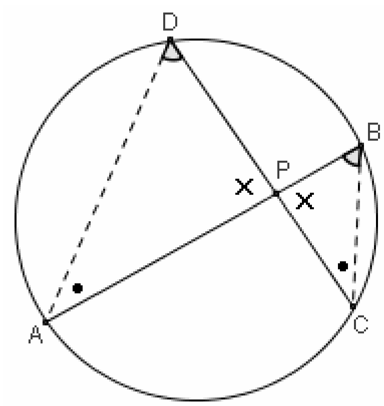
Ora, per B tracciamo una terza parallela ad AD e CE.
Per il Teorema di Talete avremo:
$BD : DC = AB : AE$
e quindi, essendo AE = AC,
$BD : DC = AB : AC$, c.v.d.



TEOREMA DELLE DUE CORDE
Se due corde di una circonferenza si tagliano,
le due parti dell'una formano i medi e le due parti dell'altra gli estremi di una proporzione

IPOTESI
Le due corde AB, CD si tagliano in P

TESI
$PA : PC = PD : PB$
(o qualunque altra proporzione che abbia
PA, PB come estremi e PC, PD come medi,
o viceversa)



Dimostrazione

Tracciamo AD e BC.
I due triangoli APD, CPB sono simili perché:

$A\hat{P}D = C\hat{P}B$ (opposti al vertice)

$D\hat{A}B = D\hat{C}B$ (sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{BD}$)

$A\hat{D}C = A\hat{B}C$ (per diff. rispetto a 180°, oppure perchè angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC}$)

Sussiste dunque la proporzione
$PA : PC = PD : PB$,
dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e la proprietà dell'invertire,
si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere
PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa.

ENUNCIATO EQUIVALENTE:	**"Se due corde di una circonferenza si tagliano, il prodotto delle due parti dell'una è uguale al prodotto delle due parti dell'altra ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$) "**

TEOREMA DELLE DUE SECANTI
Condotte da un punto esterno ad una circonferenza due secanti,
un'intera secante (NOTA) e la sua parte esterna formano i medi
e l'altra intera secante e la sua parte esterna gli estremi di una proporzione

NOTA: per "secante" si intende qui quel "pezzo" della retta secante, compreso fra il punto esterno e l'intersezione con la circonferenza, più lontana da questo.

IPOTESI PA, PC secanti

TESI $PA : PC = PD : PB$ (o qualunque altra proporzione che abbia PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa)

Dimostrazione

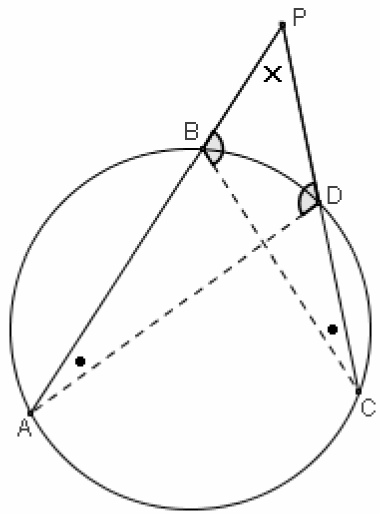
Tracciamo AD e BC. I due triangoli APD, CPB sono simili per avere:

$\hat{P}$ in comune

$B\hat{A}D = B\hat{C}D$ (angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{BD}$)

$A\hat{D}P = C\hat{B}P$ (per differenza rispetto a 180°)

Sussiste dunque la proporzione $PA : PC = PD : PB$, dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e quella dell'invertire, si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa



ENUNCIATO EQUIVALENTE: **"Condotte da un punto esterno ad una circonferenza due secanti, il prodotto di un'intera secante per la sua parte esterna è uguale al prodotto dell'altra secante per la sua parte esterna ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$)"**

TEOREMA DELLA TANGENTE E DELLA SECANTE
Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante,
la tangente (NOTA) è media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna

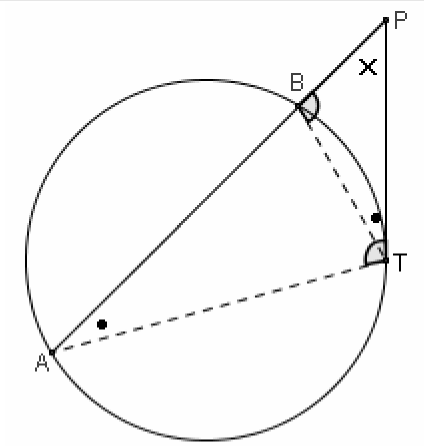
NOTA: *per "tangente" si intende qui il segmento di tangente, compreso fra il punto esterno e punto di contatto.*

IPOTESI PA secante, PT tangente

TESI $PA : PT = PT : PB$

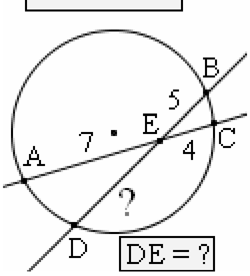
Dimostrazione

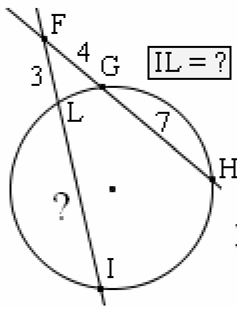
Tracciamo AT, BT. Dico che i due triangoli APT, BPT sono simili.
Essi infatti hanno, innanzitutto, l'angolo $\hat{P}$ in comune;
per dimostrare un'altra uguaglianza fra angoli
bisogna questa volta ricordare che esistono anche
gli "angoli alla circonferenza di 2^a specie"
(quelli che hanno un lato secante e l'altro tangente).
$B\hat{T}P$ è, appunto, un angolo alla circonferenza di 2^a specie, che insiste sull'arco $\overset{\frown}{BT}$, ed è perciò uguale a $B\hat{A}T$, angolo alla circonferenza di 1^a specie che insiste sullo stesso arco.
Dimostrata così la similitudine fra APT e BPT, si ha subito la tesi: $PA : PT = PT : PB$, c.v.d.

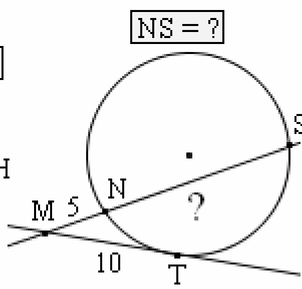


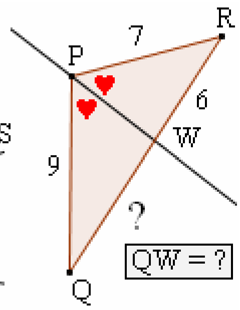
ENUNCIATO EQUIVALENTE: **"Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente e una secante, il quadrato del segmento di tangente è uguale al prodotto dell'intera secante per la sua parte esterna ($PT^2 = PA \cdot PB$)"**

ESERCIZI









RISPOSTE

$DE = 28/5$; $IL = 35/3$;
$NS = 15$; $QW = 54/7$

Questa bella **figura dinamica GEOGEBRA** mostra bene il legame di "continuità" fra gli ultimi 3 teoremi

Altri problemi sulle applicazioni delle similitudini si trovano a pagina 223, altri ancora a pagina 266