10. FUNZIONI QUADRATICHE ED EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Abbiamo detto che prendono il nome di "**quadratiche**" le funzioni di 2° grado, quelle della forma

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}\,.$$

E abbiamo illustrato con esempi il fatto che una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una curva "scendi-e-poi-sali", oppure "sali-e-poi-scendi", chiamata "parabola" e disposta:

- **con la concavità verso l'alto $\cup$ quando il numero a, coefficiente di x^2, è >0**
- **con la concavità verso il basso $\cap$ quando il coefficiente di x^2 è <0.**

Abbiamo poi osservato che **il valore assoluto del coefficiente di x^2 si dice "apertura"** perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola sia

- più "dolce" (valori di $|a|$ piccoli)
- o più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Infine, abbiamo

- indicato la formula $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ per determinare l'ascissa del vertice a partire dai coeff. dell'equazione
- osservato che, nota l'ascissa, l'ordinata del vertice si può poi ottenere senza formule, semplicemente sostituendo x_V al posto di x nell'equazione della parabola per calcolare il valore corrispondente di y
- raccomandato, quando si deve disegnare una parabola, di individuare e segnare innanzitutto il vertice e la retta verticale per il vertice, per approfittare della simmetria della curva rispetto a questa retta.

Diciamo ora qualcosa in più.

Innanzitutto, l'equazione di una parabola dipende da 3 parametri (i coefficienti a, b, c) per cui la curva è individuata in modo unico quando sono date delle condizioni, a partire dalle quali si possano determinare in modo unico i valori di a, b e c. Ad esempio, se vengono dati tre punti, per cui la curva deve passare, ecco che, almeno in generale, ci sarà una e una sola parabola a soddisfare questa condizione.

Esempio: scrivere l'equazione della parabola passante per i tre punti $A(-1,4)$; $B(1,6)$; $C(3,0)$.

Poniamo le condizioni di appartenenza di ciascuno dei tre punti alla curva di equazione $y = ax^2 + bx + c$, e risolviamo il sistema:

$$\begin{matrix} A(-1,4) \\ B(1,6) \\ C(3,0) \end{matrix} \begin{cases} 4 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ 6 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ 0 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

La nostra parabola ha dunque equazione

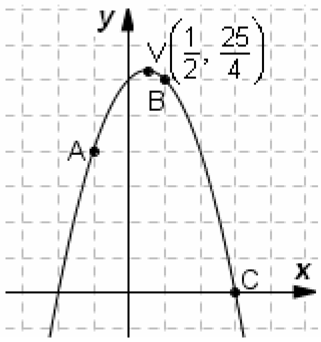
$$y = -x^2 + x + 6$$

da cui:

$$x_V = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y_V = -x_V^{\,2} + x_V + 6 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$$

vale a dire $V\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$



ESERCIZI

Determina l'equazione della parabola che passa per i punti:

1) $(0,0); (1,1); (2,0)$ 2) $(0,5); (2,1); (3,2)$ 3) $(-2,0); (1,-3); (2,0)$ 4) $(0,8); (1,2); (5,18)$ 5) $(-1,1); (0,2); (1,5)$

RISPOSTE

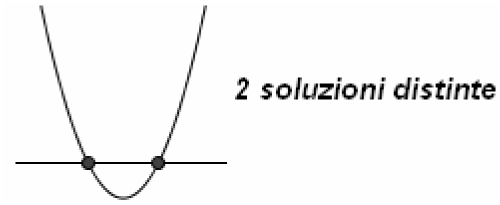
1) $y = -x^2 + 2x$ 2) $y = x^2 - 4x + 5$ 3) $y = x^2 - 4$ 4) $y = 2x^2 - 8x + 8$ 5) $y = x^2 + 2x + 2$

LA PARABOLA E L'EQUAZIONE DI 2° GRADO

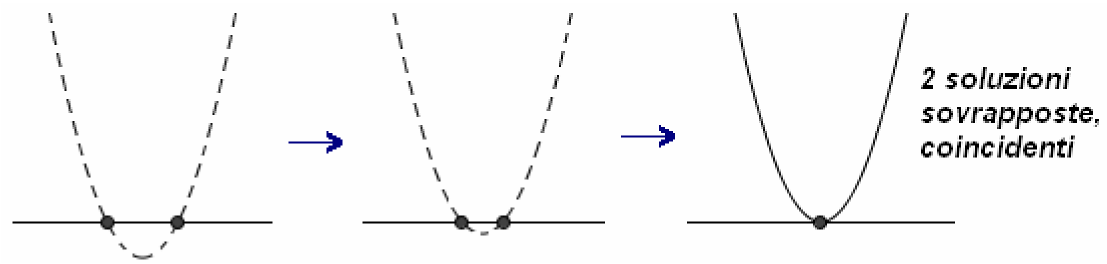
Un'equazione di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$
può essere risolta tracciando il grafico della parabola $y = ax^2 + bx + c$
e poi determinando le sue intersezioni con la retta di equazione $y = 0$ (che coincide con l'asse delle x).

Considériamo dapprima il caso $a > 0$.
Si potranno presentare tre possibili situazioni, e la nostra equazione potrà avere:

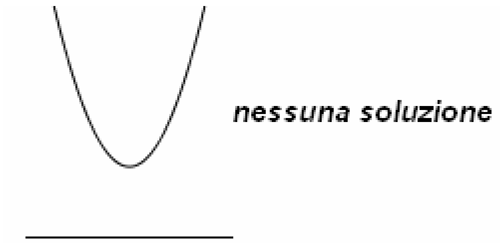
I) due soluzioni distinte (primo caso, parabola che taglia l'asse orizzontale):



II) una sola soluzione, o anche: due soluzioni che hanno finito per sovrapporsi, per coincidere (secondo caso, parabola tangente all'asse orizzontale):



III) oppure nessuna soluzione (terzo caso, parabola priva di intersezioni con l'asse orizzontale):



Tutto dipende quindi dall'*ordinata del vertice*:

- se questa è <0 si ha il caso delle due soluzioni distinte,
- se è $=0$ si hanno le soluzioni coincidenti,
- se è >0 si ha l'impossibilità.

Ora, se noi partiamo dalla formula per l'*ascissa* del vertice $x_V = -\frac{b}{2a}$
potremo ricavare l'ordinata di V sostituendone il valore al posto di x nell'equazione della parabola:

$$y_V = \left[ax^2+bx+c\right]_{x=-\frac{b}{2a}} =$$
$$= a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c = \cancel{a}\cdot\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$$

Quindi, per quanto detto sopra,

$$-\frac{\Delta}{4a}<0 \leftrightarrow \text{soluzioni } \textit{distinte};$$
$$-\frac{\Delta}{4a}=0 \leftrightarrow \text{soluzioni } \textit{coincidenti};$$
$$-\frac{\Delta}{4a}>0 \leftrightarrow \textit{nessuna} \text{ soluzione}.$$

Ma le tre condizioni $\boxed{-\frac{\Delta}{4a}<0,\quad -\frac{\Delta}{4a}=0,\quad -\frac{\Delta}{4a}>0}$, avendo noi supposto $\boxed{a>0}$,

equivalgono rispettivamente a $\boxed{\Delta>0,\ \Delta=0,\ \Delta<0}$ e ciò dunque conferma

il ben noto ruolo del Δ nel determinare il numero delle soluzioni di un'equazione di 2° grado.

Se poi fosse $a<0$ potremmo ripercorrere tutte le considerazioni fatte, adattandole al nuovo caso, e perverremmo alle stesse conclusioni.

ESERCIZI

Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

6) $x^2-6x+8=0$ 7) $x^2-6x+9=0$ 8) $x^2-6x+10=0$ 9) $-x^2+x=0$ 10) $-2x^2=0$ 11) $-x^2+x+6=0$

RISPOSTE

6) $x=2,\ x=4$ 7) $x=3,\ x=3$ 8) impossib. 9) $x=0,\ x=1$ 10) $x=0,\ x=0$ 11) $x=-2,\ x=3$