

18. RADICALI E VALORI ASSOLUTI

Consideriamo l'espressione $\sqrt{a^2}$.

Essa ha significato qualunque sia il segno di a (quindi: sia per $a > 0$, che per $a < 0$ o $a = 0$), perché, qualunque sia il segno della base, un quadrato è sempre positivo o nullo (mai negativo) e perciò la radice quadrata di un quadrato si può sempre estrarre.

Chiediamoci ora: è sempre giusto scrivere $\sqrt{a^2} = a$?

Beh, è giusto solo se $a \geq 0$, perché se invece il numero a è negativo, sarebbe sbagliato !!!

Ad es., nel caso $a = -5$, l'uguaglianza $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{(-5)^2}} = \frac{a}{-5}$ non "funziona", perché $\sqrt{25}$ vale $+5$ e non -5 .

Riflettendo bene, l'uguaglianza che vale sia per $a \geq 0$ che per $a < 0$, è la seguente:

♥ (14) $\sqrt{a^2} = |a|$ **MOLTO IMPORTANTE l'introduzione del simbolo di VALORE ASSOLUTO !**

Osserviamo che invece con una radice ad indice dispari (ad esempio, una radice cubica) NON avremmo dovuto introdurre le stanghette di valore assoluto; insomma, vale, *qualunque sia* il segno del numero reale a , l'uguaglianza

$$(15) \sqrt[3]{a^3} = a$$

(ricordiamo ancora una volta che nel caso di un radicale con indice dispari, sia il radicando che il risultato possono essere positivi, nulli o negativi e il risultato ha sempre lo stesso segno del radicando).

Analogamente, avremo, qualunque sia il segno del numero a :

$$(16) \sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b} \quad (b \geq 0)$$

La (16) è ricavabile dalla (14) con la catena $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \sqrt{b}$.

Anche qui, in situazioni affini che però portino una radice cubica al posto della quadrata, le stanghette *non* vanno introdotte:

$$(17) \sqrt[3]{a^3 b} = a \sqrt[3]{b}$$

Osservazione - E' chiaro che nella (14) e nella (16) possiamo fare a meno delle stanghette di val. assoluto in tutti quei casi in cui si sa per certo che il numero indicato con a è ≥ 0 .

Ancora:

il radicale \sqrt{ab} ha significato sia quando a, b sono entrambi positivi, sia quando sono entrambi negativi. Ma l'uguaglianza $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ vale soltanto nel primo caso ($a \geq 0, b \geq 0$).

L'uguaglianza che vale anche con a, b entrambi negativi è

$$(18) \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$$

Il problema *non* sussiste con indice dispari: qualunque siano i segni di a, b , è sempre

$$(19) \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Generalizzando, si vede che vale la seguente comoda REGOLA:

LE STANGHETTE DI VALORE ASSOLUTO VANNO INTRODOTTE NEI CASI IN CUI, OPERANDO CON UN RADICALE AD INDICE PARI, A PARTIRE DA UN FATTORE DI GRADO PARI SI PASSA AD UNO – O PIU' – FATTORI DI GRADO DISPARI per effetto

- di una semplificazione indice-esponente (proprietà invariante)
- o dell'estrazione di un fattore dal segno di radice
- o dello "spezzamento" di un radicale con la regola per la radice di un prodotto o di un quoziente.

Il simbolo di "modulo" (= di valore assoluto) si può evitare, in questi casi, solo se il numero che andrebbe a finire entro le stanghette è ≥ 0 .