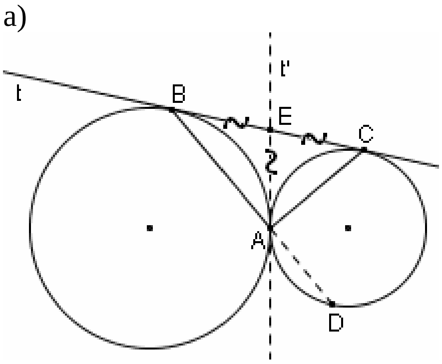
27)
Due circonferenze sono tangenti esternamente in A,
e una retta tangente comune t tocca la prima circonf. in B e la seconda in C rispettivamente.

a) Dimostra che l'angolo $B\hat{A}C$ è retto

b) Dimostra che, se si prolunga la corda BA fino ad incontrare la seconda circonferenza in D, la congiungente CD è un diametro della seconda circonferenza.

a)

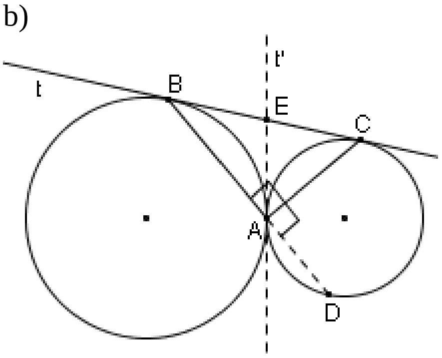


Se tracciamo la tangente comune "interna" t',
che vada a intersecare BC in E,
avremo EA=EB=EC perché segmenti di tangente
aventi un estremo nello stesso punto esterno E.

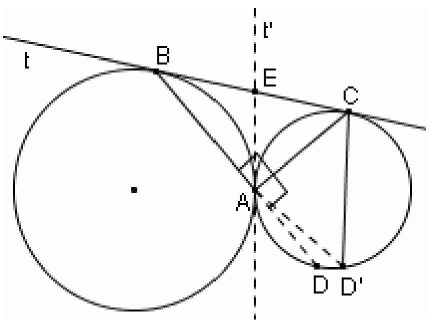
Di conseguenza il triangolo ABC è tale che la mediana
relativa ad un lato (BC) è metà del lato stesso,
e dunque, per un teorema noto, è rettangolo
(l'angolo retto è $B\hat{A}C$, che è opposto al lato BC considerato)

c.v.d.

b)



Avendo noi dimostrato che $B\hat{A}C = 90°$,
sarà retto anche il suo supplementare $C\hat{A}D$.
A questo punto ci viene in mente il teorema secondo il quale
un angolo inscritto in una **semicirconferenza** è retto …
Sennonché, il teorema da sfruttare *non* è questo,
ma semmai una specie di teorema *inverso*, perché
noi *non sappiamo in partenza* che si abbia una semicirconferenza,
bensì desideriamo *concludere* ,
in presenza di un angolo retto con un vertice sulla circonferenza,
che i due punti C, D in cui i suoi lati vanno
ulteriormente a tagliare la circonferenza
sono le estremità di una semicirconferenza quindi anche di un diametro.



Possiamo, ad esempio, impostare un ragionamento per assurdo.
Se, tracciato il diametro con un estremo in C,
questo NON avesse l'altro estremo in D,
allora il secondo estremo di questo diametro
sarebbe un punto D' distinto da D
e l'angolo $C\hat{A}D'$ (vedi figura),
essendo inscritto in una semicirconferenza, sarebbe retto.
Ma allora (dato che si può facilmente provare
che D' non può trovarsi sulla retta AD)
per il punto A passerebbero due distinte perpendicolari,
AD e AD', alla retta AC, contro il teorema dell'unicità
della perpendicolare per un punto dato a una retta data.

Oppure potremmo ragionare così:
il triangolo di vertici A, C, D è rettangolo
quindi, per un teorema noto,
la circonferenza che ha per diametro la sua ipotenusa
passa per il vertice dell'angolo retto;
ma ciò significa che la circonferenza che passa per i tre punti A, C, D
(unica per un teorema noto:
"per 3 punti distinti non allineati passa una circonferenza e una sola")
ha per diametro il segmento CD.
Dunque la circonferenza di destra del disegno ha CD per diametro,
c.v.d.