CENNI DI LOGICA (PARTE 2) [prosecuzione della Parte 1, pagg. 74 … 78]

5. UNA TAVOLA DI VERITA' ANCHE PER L'IMPLICAZIONE? IL PROCESSO ALLA "TAVOLA DELLE CONTROVERSIE"

Dopo aver descritto i connettivi ET, VEL e NON mediante altrettante "tavole di verità",
è del tutto spontaneo tentare di fare lo stesso anche per il connettivo di *implicazione* "SE … ALLORA …".

Nei libri di testo scolastici si legge di solito che all'implicazione va associata la tavola di verità seguente:

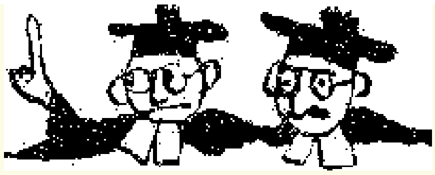
p	q	$p \to q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

La "tavola delle controversie"

Noi per ora ci avviciniamo "prudentemente" a questa tavola,
presentandola come la "**tavola delle controversie**",
perché, sebbene vi siano buone ragioni IN FAVORE della sua validità,
non si può tuttavia negare che esistano anche ottime ragioni CONTRO.

Direi quindi di fare entrare subito in aula gli avvocati di questo processo,
in cui la "tavola delle controversie" gioca il ruolo di imputato.

IL PROCESSO ALLA "TAVOLA DELLE CONTROVERSIE"



L'ARRINGA DELLA DIFESA

La correttezza, egregi signori, della cosiddetta "tavola delle controversie", è talmente ben fondata
che mi posso permettere di presentare ben QUATTRO argomenti a suo sostegno.

- PRIMO ARGOMENTO A FAVORE

  Innanzitutto, per brevità, data un'implicazione $p \to q$,
  chiameremo "**antecedente**" la proposizione p e "**conseguente**" la q.

  Ora, se antecedente e conseguente sono entrambe vere, è ovvio che $p \to q$ andrà considerata vera!
  Un esempio? Eccolo:

  "Se 98700 è multiplo di 3, allora 98701 non lo è".

  E' quindi giustificato il primo rigo della tavola:

p	q	$p \to q$
V	V	V

  Se invece l'antecedente è vera e la conseguente è falsa, l'implicazione è certamente da considerarsi falsa
  (*da una premessa vera, non può discendere una conclusione falsa*);
  da cui il secondo rigo

p	q	$p \to q$
V	F	F

  E andiamo ora al terzo e al quarto rigo:

p	q	$p \to q$
F	V	V
F	F	V

  Dico che è corretto considerare VERA una implicazione con l'antecedente falsa,
  qualunque sia il valore di verità della conseguente, in virtù della seguente considerazione:

  se la premessa è falsa, da essa si può dedurre qualsiasi cosa, perché cade, appunto,
  la base di partenza sulla quale si fonda il ragionamento deduttivo.

  Insomma, sentendo una persona che dice "Se i *reality* sono intelligenti, allora io sono un ippopotamo",
  tutti si sentono istintivamente d'accordo!

- SECONDO ARGOMENTO A FAVORE
  - La proposizione $p \to q$ seguente:
    "Se x è divisibile per 6, allora x è divisibile per 3"
    esprime senza ombra di dubbio un ragionamento *corretto*,
    quindi è evidente che andrà considerata vera qualunque sia *x*.

    Ora, considerato un numero intero *x*, tre sono i casi possibili:
    1) *x* è divisibile per 6 (e quindi anche per 3): *p* vera, *q* vera
    2) *x* non è divisibile per 6, ma è divisibile per 3: *p* falsa, *q* vera
    3) *x* non è divisibile né per 6 né per 3: *p* falsa, *q* falsa

    Ricapitoliamo.
    Nel caso 1) abbiamo *p* VERA, *q* VERA;
    nel caso 2) abbiamo *p* FALSA, *q* VERA;
    nel caso 3) abbiamo *p* FALSA, *q* FALSA
    e in tutti e tre questi casi, avevamo detto, l'implicazione va considerata **VERA**.

  - Invece la proposizione:
    "Se x è un numero primo, allora x è dispari",
    esprime una deduzione *sbagliata*.
    L'infondatezza del ragionamento può venir dimostrata facendo notare che
    c'è un numero (il 2) che è primo, e ciononostante è pari; ovvero,
    c'è un caso in cui l'antecedente è vera ma la conseguente è falsa.
    La verità dell'antecedente in questo caso particolare $x = 2$,
    confrontata con la falsità della conseguente,
    rivela la falsità dell'implicazione:
    p VERA, *q* FALSA, implicazione **FALSA**.

- TERZO ARGOMENTO A FAVORE
  Affermare che vale l'implicazione $p \to q$ equivale a sostenere che
  in tutti i casi in cui è vera p, si verifica anche q.
  Ciò significa dire che
  p è falsa, oppure, nel caso opposto, certamente è vera q.
  E quest'ultima affermazione, in simboli, è la $\boldsymbol{\overline{p} \vee q}$.
  Ricapitolando, *l'implicazione $p \to q$ ha lo stesso significato della proposizione composta* $\overline{p} \vee q$,
  e sarà quindi corretto fissare la tavola di verità di $p \to q$ in modo che coincida con quella di $\overline{p} \vee q$.
  Andiamo allora a compilare la tavola di verità di $\overline{p} \vee q$:

p	q	$\overline{p}$	q	$\overline{p} \vee q$
V	V	F	V	**V**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**
F	F	V	F	**V**

  Vediamo che in ultima colonna essa porta la sequenza **VFVV**.
  Quindi così dovrà essere anche per $p \to q$.

- QUARTO ARGOMENTO A FAVORE
  Supponiamo che io prometta a mio figlio:
  "Se resti promosso, ti compro il motorino".
  Potrò essere accusato di aver fatto un'affermazione FALSA soltanto nel caso in cui,
  pur essendo mio figlio stato promosso, io (carogna!) NON gli abbia comprato il motorino.
  Negli altri 3 casi :
  - promozione SI', motorino SI';
  - promozione NO, motorino NO;
  - promozione NO, motorino SI' ugualmente (con gravissimo errore educativo)

  nessuno potrà dire che io abbia affermato il falso,
  quindi la mia affermazione andrà giudicata, in tutti e tre questi casi, VERA.
  Insomma, l'implicazione da me enunciata è da ritenersi FALSA esclusivamente in presenza
  di antecedente vera e conseguente falsa.

L’ARRINGA DELL’ACCUSA

Le argomentazioni della difesa sono ingegnose, e gli esempi presentati son stati scelti con molta scaltrezza. Ma io scardinerò la “tavola delle controversie” fin dalle sue fondamenta.

Questa tavola pretende di “inscatolare” l’implicazione in quattro regole, che a partire dai valori di verità di antecedente e conseguente fisserebbero il valore di verità dell’implicazione nel suo complesso.

Bene! Cosa mi dite ora della proposizione seguente?
“SE Parigi è la capitale della Francia, ALLORA il numero 18 è divisibile per 3”

Antecedente e conseguente qui sono entrambe vere, quindi la tavola delle controversie affermerebbe che l’implicazione va considerata vera …
Ridicolo!!! L’implicazione in questione è invece **priva di senso**,
e di fronte ad un’affermazione priva di senso
(che quindi non si può nemmeno considerare una *proposizione*)
perdono il loro significato le categorie di “verità” e “falsità”.

Il fatto è che per giudicare sulla verità o falsità di un’implicazione,
non è sufficiente conoscere il valore di verità delle due proposizioni componenti!
Occorre fare molto di più, ossia entrare *all’interno* di ciascuna delle due proposizioni
per analizzare il *significato* di entrambe, e la *relazione* fra i loro contenuti.
Insomma, è indispensabile entrare in questioni di carattere **SEMANTICO**
(= concernente il **SIGNIFICATO**), perché l’aspetto FORMALE non basta.

E c’è di più, oltre alle questioni di “sensatezza” o “non sensatezza”.
Anche in parecchi casi in cui l’implicazione che si considera si può giudicare “sensata”,
il suo valore di verità dipende non semplicemente dai valori di verità di antecedente e conseguente,
ma da considerazioni assai più profonde.
Ascoltatemi bene, il seguente esempio vi convincerà.

Pensiamo alla proposizione

“Se fra un’ora io immergerò questo pezzo di ferro in acqua bollente, esso fonderà”
(l’esempio è sostanzialmente tratto da “Introduction to Mathematical Logic”, E. Mendelson, 1964).

Essa è senza alcun dubbio falsa!
E’ falsa anche in caso di falsità dell'antecedente (sebbene la “tavola delle controversie”
ci dica che, con antecedente falso, l'implicazione va sempre considerata vera)!
Voglio dire: resta falsa anche se io, fra un’ora, NON immergerò il pezzo di ferro in acqua bollente!
Essa è infatti falsa “per sua natura”, in virtù del fatto che il ferro NON PUO' fondere a 100 °C:
la sua temperatura di fusione è infatti 1535 °C.

Così pure, la proposizione
“Se Leopardi non avesse scritto “L’infinito”, allora non sarebbe scoppiata la Prima Guerra Mondiale”
è, evidentemente, da considerarsi falsa
(anche se l'antecedente è falsa, e, quindi, la “tavola delle controversie” direbbe che l'implicazione è vera):
non ditemi per piacere che la stesura o meno de “L’infinito” da parte di Leopardi
possa avere in qualche modo influenzato la politica internazionale del secolo successivo!!!

LA REPLICA DELLA DIFESA

Beh, riguardo a Giacomo Leopardi, son convinto anch’io che se non avesse scritto “L’infinito”
la Prima Guerra Mondiale sarebbe scoppiata ugualmente; ma proposizioni di questo tipo,
esprimenti congetture riguardo alle conseguenze che avrebbe potuto avere un fatto non accaduto
(“condizionali controfattuali”), non hanno nessun rilievo nel ragionamento matematico.

Cosa importa, poi, se l’applicazione della “tavola delle controversie” porterebbe a classificare “vere”
anche proposizioni che in realtà sono prive di significato?
Ciò che conta è che, di fronte alle implicazioni “sensate”, essa “funzioni” sempre correttamente.
E in effetti funziona!

Non vorremo mica sbarazzarci di uno strumento così utile come la “tavola delle controversie”?
D’accordo, essa non è in grado di abbracciare tutta la complessità e varietà di quella costruzione logica che chiamiamo “implicazione”, ma certo non si può negare che riesca a catturarne con fedeltà i tratti essenziali.

UN RAGIONEVOLE VERDETTO

Dal dibattito è emerso chiaramente che la "tavola delle controversie":

- *da una parte, non è in grado, nella sua schematicità, di esprimere in modo soddisfacente tutta la ricchezza di significati insita nella costruzione linguistica "SE … ALLORA …";*
- *dall'altra, riesce tuttavia a sintetizzare con estrema concisione (e, quindi, efficacia) alcune caratteristiche fondamentali di tale costruzione linguistica.*

Non è perciò uno strumento né da buttar via né da accettare acriticamente;
occorre tenerne sempre presenti sia i pregi che i limiti, bene illustrati dalla difesa e dall'accusa.

Chiameremo, d'ora in avanti,
" **implicazione *MATERIALE*** "
la proposizione composta,
indicata col simbolo $p \to q$,
e letta *"se p, allora q"*,
il cui valore di verità è determinato meccanicamente
applicando le quattro regole della tavola qui a destra,
senza "entrare all'interno"
delle proposizioni componenti *p*, *q*
(senza quindi esplorare *p*, *q*
dal punto di vista *semantico*, cioè del *significato*).

p	q	$p \to q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

La tavola di verità per **l'implicazione materiale**

La relazione che intercorre fra l' implicazione materiale e l' "autentica" implicazione
è un po' come quella che passa tra le due figure qui riportate …

Marilyn Monroe
(1/6/1926 – 5/8/1962)

… tuttavia anche le bozze schematiche possono essere parecchio utili, proprio per la loro essenzialità.

Più che servire per controllare la validità di un ragionamento, l'implicazione materiale è un comodo strumento per verificarne rapidamente l'eventuale NON correttezza.

Quando nel paragrafo 11 esamineremo la forma di implicazione di gran lunga più utilizzata in matematica, la cosiddetta "implicazione logica", potremo sintetizzare efficacemente il discorso affermando che

"un'implicazione logica $p(x) \Rightarrow q(x)$ è:

- *vera quando, per tutti i valori di x, è sempre vera la corrispondente implicazione materiale $p \to q$*
- *falsa quando esiste almeno un valore di x per cui la corrispondente implicazione materiale $p \to q$ è falsa".*

6. DOPO L'IMPLICAZIONE MATERIALE, ECCO LA BIIMPLICAZIONE MATERIALE

Un discorso analogo a quello fatto per l'implicazione
conduce alla tavola di verità
per la "*biimplicazione*" o "*doppia implicazione*",
che traduce la costruzione linguistica
"*se … allora … e viceversa*".

Quando ci si limita a fissare il valore di verità
della proposizione composta $p \leftrightarrow q$
basandosi solo sui valori di verità
delle proposizioni componenti
senza andare a valutare il loro legame semantico
(con tutti i limiti che questa "riduzione all'osso" comporta),
si parla preferibilmente di "biimplicazione **materiale**".

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

La tavola di verità per **la biimplicazione materiale**