GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 5

1) ⇨
   a) Dimostra che i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi sono vertici di un parallelogrammo.
   b) Che proprietà deve possedere il quadrilatero di partenza
   - affinché tale parallelogrammo sia un rettangolo?
   - E affinché sia un rombo?
   - E affinché sia un quadrato?

2) In ogni triangolo, i punti medi dei tre lati e il piede di un'altezza sono vertici di un trapezio isoscele.

3) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 347)**
ABCD è un parallelogrammo; M è il punto medio di AB, N il punto medio di DC.
Dimostra che se si tracciano i segmenti DM e BN, la diagonale AC ne risulta suddivisa in 3 parti uguali.

4) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 347)**
In un trapezio, la congiungente i punti medi dei due lati obliqui
è parallela alle basi e uguale alla loro semisomma.

5) In un trapezio, la congiungente i punti medi delle due diagonali
è parallela alle basi e uguale alla loro semidifferenza.

6) Spiega perché in un triangolo isoscele incentro, ortocentro, baricentro e circocentro sono allineati.

7) Dimostra che un triangolo nel quale due qualsiasi dei 4 "punti notevoli"
(incentro, ortocentro, baricentro e circocentro) sono allineati con un vertice, è isoscele.

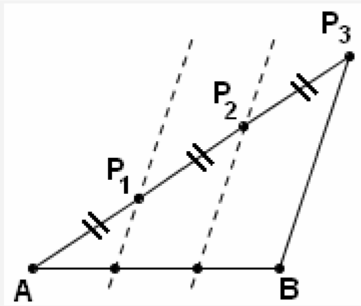
8) Dimostra che la parallela a un lato di un triangolo, condotta per il baricentro di questo,
divide ciascuno dei due lati rimanenti in due parti, delle quali una è doppia dell'altra
[ti conviene tracciare …]

9) In un triangolo rettangolo, il baricentro sta sempre sulla stessa retta dell'ortocentro e del circocentro:
perché?

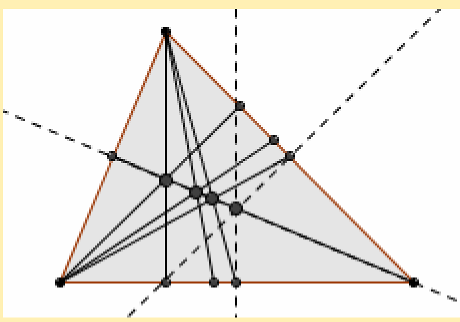
10) Sia ABC un triangolo, e sia O il suo ortocentro.
Dove si trova l'ortocentro di ABO? E quello di ACO? E quello di BCO?

11) Considera un triangolo ABC e prolunga il lato AB dalla parte di B: otterrai un angolo esterno.
Analogamente, prolunga il lato AC dalla parte di C: otterrai un altro angolo esterno.
Ora traccia le bisettrici dei due angoli esterni considerati, e indica con E il punto in cui si incontrano.
Dimostra che anche la bisettrice dell'angolo interno di vertice A passa per E.
[E, punto di intersezione fra le tre bisettrici di due angoli esterni e dell'angolo interno
che ha il suo vertice nel rimanente vertice del triangolo, prende il nome di "*ex-centro*".
Ogni triangolo ha dunque 1 incentro e 3 ex-centri]

12) Per dividere un segmento AB in 3 parti uguali, possiamo fare così:
dall'estremo A del segmento facciamo partire un segmento qualsiasi
AP_1, poi sul prolungamento di AP_1 prendiamo successivamente
due altri segmenti P_1P_2 e P_2P_3 entrambi uguali ad AP_1.
Congiungiamo ora P_3 con B, e per P_1, P_2 tracciamo le parallele a P_3B;
queste parallele, tagliando AB, realizzeranno la suddivisione desiderata.
Per esercizio, puoi servirti del software GEOGEBRA
per dividere un segmento fissato in 7 parti fra loro uguali.



13) Perché non ti diverti a tracciare,
col software GEOGEBRA,
una figura che mostri
un triangolo ABC
coi suoi 4 punti notevoli?
Nella figura qui a fianco
il triangolo è isoscele,
e infatti (esercizi 6 - 7)
i punti notevoli sono tutti allineati.



♥ Un BARICENTRO si indica preferibilmente con la lettera G (da “Gravity center”, centro di gravità).

Infatti *il punto di incontro delle mediane di un triangolo viene chiamato “baricentro”* (dal greco *baros* = *peso*) *perché coincide con il “baricentro fisico” del triangolo,* ossia col punto di applicazione della risultante delle forze peso agenti sulle varie parti del triangolo, se questo fosse realizzato in materiale rigido.

Ritagliando un triangolo nel cartoncino, se ne disegni le mediane, e poi appoggi il triangolo (collocandolo orizzontalmente: vedi figura a destra) sopra un piccolo sostegno piazzato in corrispondenza del punto di incontro delle mediane stesse, vedrai che il triangolo starà in equilibrio. … Provaci!

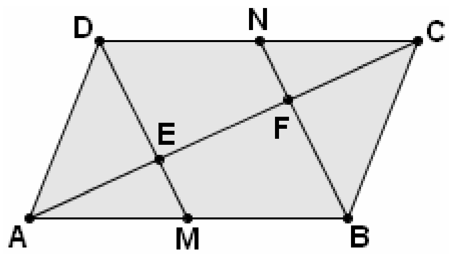
☼ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

3)
⇨ **HP**

ABCD parallelogrammo;
AM = MB; DN = NC

TH

AE = EF = FC



A TE IL COMPITO
DI SEGNARE IN FIGURA, IN QUESTA PAGINA, L’IPOTESI, E CIO’ CHE VIA VIA SI DEDUCE NEL CORSO DELLA DIMOSTRAZIONE!

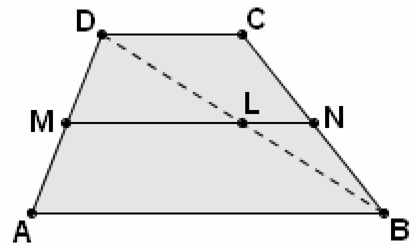
DIM. Cominciamo con l’osservare che AM = MB = DN = NC
perché metà dei due segmenti ….. e ….. , che sono uguali perché …….. .

Ora, MBND è un parallelogrammo perché ha due lati opposti (MB, DN) che sono …….. e ……. ;
ne consegue MD || BN .

Allora, considerando il triangolo ABF, ME è la parallela ad un lato (BF)
condotta dal punto medio di un altro lato (AB), per cui …….. e abbiamo perciò AE = EF .
Analogamente, considerando DEC: NF || DE, DN = NC $\rightarrow$ EF = FC .

In definitiva, è AE = EF = FC , c.v.d.

4)
⇨



HP

DC || AB
AM = MD, BN = NC

TH

MN || AB || DC

$MN = \dfrac{AB+DC}{2}$

DIM. Per dimostrare che MN è parallela ad AB e DC,
immaginiamo di condurre, a partire da M, la parallela ad AB e DC:
faremo vedere che tale parallela è sovrapposta a MN, coincide con MN.

Infatti, se noi consideriamo AB, DC e la parallela a tali due rette condotta per M,
avremo tre parallele di un fascio, e ai due segmenti uguali AM = MD sulla trasversale AD,
dovranno corrispondere …….. sull’altra trasversale BC:
quindi la parallela che parte da M sarà obbligata a tagliare il segmento BC in due parti uguali,
cioè a passare per N, punto medio di BC.

Ora che abbiamo dimostrato essere MN || AB || DC , tracciamo la diagonale BD indicando con L
il punto di intersezione fra BD e MN, poi consideriamo il triangolo ABD.

In tale triangolo, la retta MN, parallela ad un lato (AB) condotta da un punto medio di un altro (AD),
va a tagliare …….. : è dunque …….. , cioè L è il punto medio di BD.

Ma allora il segmento ML, in quanto congiungente i punti medi di due lati del triangolo ABD,
è metà del terzo lato: $ML = \frac{1}{2}AB$.

Per lo stesso motivo, con riferimento al triangolo BCD, si ha $LN = \frac{1}{2}\cdot ......$.

Dunque possiamo scrivere $MN = ML + LN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{AB+DC}{2}$, c.v.d.