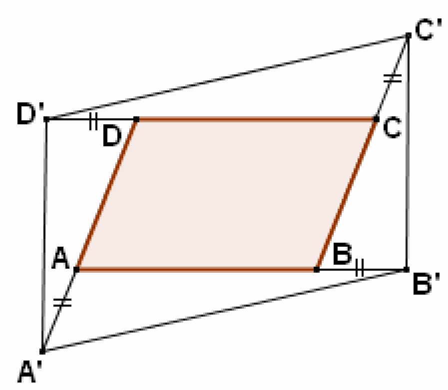
GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 4

1) **(Esercizio svolto)**

In un parallelogrammo si prolungano tutti e quattro i lati di uno stesso segmento (e nel medesimo senso: vedi figura).
Dimostra che il quadrilatero avente per vertici gli estremi liberi dei quattro prolungamenti, è anch'esso un parallelogrammo.



HP
ABCD parallelogrammo
$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$

TH
$A'B'C'D'$ parallelogrammo

DIM.

Innanzitutto, in ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali:
quindi

$\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ (*segna queste uguaglianze sulla figura!!!*)

Se dunque andiamo a confrontare i due triangoli $\mathbf{AA'B'}$ e $\mathbf{CC'D'}$, possiamo dirli uguali per il 1° Criterio:

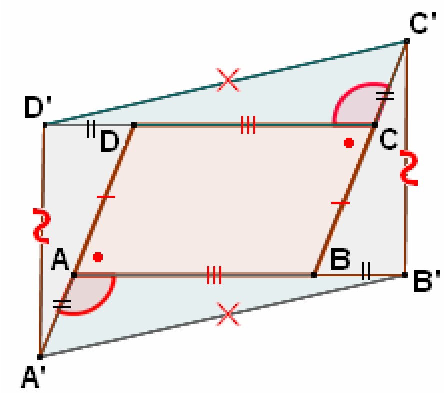
$\overline{AA'} = \overline{CC'}$ per ipotesi,

$\overline{AB'} = \overline{CD'}$ perché somme di segmenti uguali ($\overline{AB'} = \overline{AB} + \overline{BB'} = \overline{DC} + \overline{DD'} = \overline{CD'}$),

$A'\hat{A}B' = C'\hat{C}D'$ perché supplementari di angoli uguali
($D\hat{A}B = B\hat{C}D$ perché angoli opposti di un parallelogrammo),
oppure perché angoli coi lati paralleli e discordi.

Da $AA'B' = CC'D'$ segue, in particolare, $\boxed{\overline{\mathbf{A'B'}} = \overline{\mathbf{D'C'}}}$.

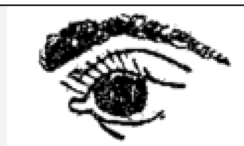
Analogamente, confrontando i due triangoli $\mathbf{DD'A'}$ e $\mathbf{BB'C'}$, si trae $\boxed{\overline{\mathbf{A'D'}} = \overline{\mathbf{B'C'}}}$



Ma allora possiamo dire che **il quadrilatero $A'B'C'D'$ è un parallelogrammo perché ha i lati opposti a due a due uguali,**

C.V.D.

IL METODO "TOP-DOWN"



Nell'elaborare la dimostrazione di un teorema sovente viene spontaneo applicare quella strategia di ragionamento che è nota come **metodo "TOP-DOWN"**, ossia, letteralmente, "**DALLA CIMA VERSO IL BASSO**".

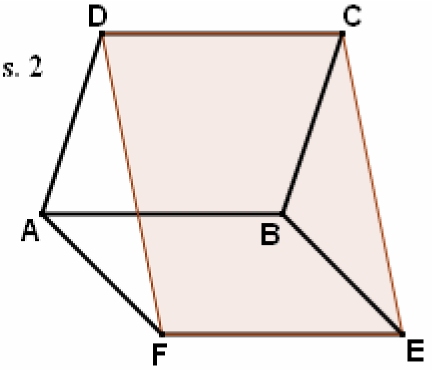
Si parte dall'obiettivo da raggiungere, e ci si domanda: di quali obiettivi intermedi avremmo bisogno per raggiungere questo obiettivo finale?

Poi il processo può essere eventualmente iterato (= ripetuto), applicandolo anche agli obiettivi intermedi.

In questo caso, abbiamo pensato: se riuscissimo a dimostrare che in $A'B'C'D'$ i lati opposti sono a due uguali, allora saremmo a posto; ma quali considerazioni ci occorrono per provare che i lati opposti di $A'B'C'D'$ sono a due a due uguali? …

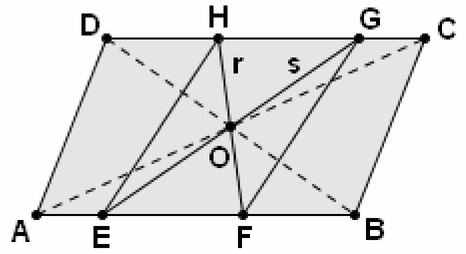
2) ⇨ Due parallelogrammi ABCD, ABEF
hanno il lato $\overline{AB}$ in comune
(e si trovano da parte opposta rispetto al lato comune).
Dimostra che il quadrilatero DCEF
è anch'esso un parallelogrammo.
Il teorema varrebbe anche qualora ABCD, ABEF
si trovassero dalla stessa parte rispetto ad AB ?

Es. 2



3) Disegna un parallelogrammo ABCD;
per il vertice B traccia la parallela alla diagonale $\overline{AC}$;
chiama P, Q i punti di intersezione di questa parallela
con le rette dei lati AD e DC.
Dimostra ora che sono fra loro uguali i due triangoli APB e CBQ.

4) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)**
Per il punto di intersezione delle diagonali
di un parallelogrammo si tracciano due rette,
che vanno a intersecare una coppia di lati opposti.
Dimostra che i quattro punti in cui tali rette
incontrano i lati del parallelogrammo iniziale,
sono vertici di un altro parallelogrammo.

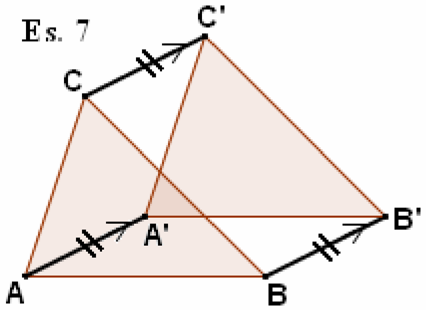


5) ☼ **(Dimostrazione guidata a pag. 345)**
Sia ABCD un parallelogrammo. Prendi sulla diagonale $\overline{AC}$ due punti E, F tali che sia $\overline{AE} = \overline{CF}$.
Si chiede di dimostrare che pure il quadrilatero EBFD è un parallelogrammo.

6) Se dai due vertici opposti B, D di un parallelogrammo ABCD si tracciano le perpendicolari $\overline{BH}, \overline{DK}$ alla diagonale $\overline{AC}$ (H e K stanno su $\overline{AC}$), il quadrilatero BHDK è anch'esso un parallelogrammo.

7) Preso un triangolo qualsiasi ABC, a partire dai tre vertici A, B, C
si tracciano tre segmenti $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$
uguali fra loro, paralleli ed equiversi (= aventi il medesimo verso).
Dimostra che il triangolo A'B'C' è uguale ad ABC.

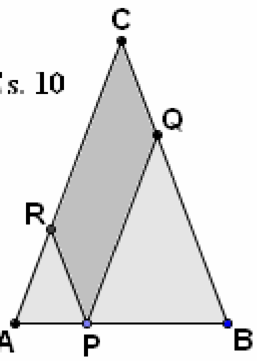
Es. 7



8) Se, dato un parallelogrammo ABCD, si tracciano le bisettrici
dei due angoli opposti $\hat{A}$ e $\hat{C}$ indicando con E, F i punti
in cui tali bisettrici vanno a intersecare le rette DC e AB,
allora anche il quadrilatero AFCE è un parallelogrammo.

9) Dimostra che un quadrilatero è certamente un parallelogrammo
qualora le bisettrici di due angoli opposti siano parallele fra loro,
e lo stesso simultaneamente accada per le bisettrici
degli altri due angoli opposti.
Serviti di GeoGebra per evidenziare come non basti la condizione su due soli angoli opposti, ma ci vogliano pure gli altri due, per la tesi

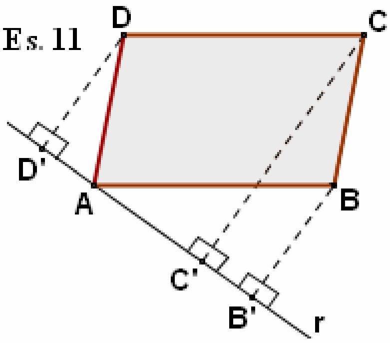
Es. 10



10) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)**
E' dato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Da un punto P preso arbitrariamente su $\overline{AB}$ si tracciano:
la parallela ad $\overline{AC}$, che incontri $\overline{BC}$ in Q;
e la parallela a $\overline{BC}$, che incontri $\overline{AC}$ in R.
Dimostrare che il perimetro del parallelogrammo PQCR
è uguale alla somma $\overline{AC}+\overline{BC}$.

11) ☼ **(Vedi figura; dimostrazione guidata a pag. 345)**
Per il vertice A di un parallelogrammo ABCD si traccia
una retta r, che abbia in comune con ABCD il solo punto A.
Siano B', C', D' le proiezioni dei tre punti B, C, D su r.
Dimostrare che $\overline{CC'}=\overline{BB'}+\overline{DD'}$
[Indicazione: tracciare dal punto B la perpendicolare a …]
Come si modificherebbe la tesi se la retta r passante per A attraversasse il parallelogrammo, anziché essergli esterna?

Es. 11

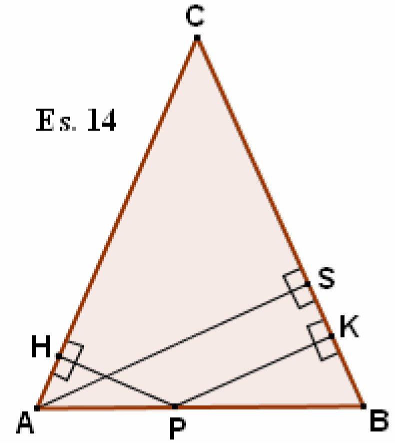


12) ⇨ Tracciando le bisettrici degli angoli di un parallelogrammo qualsiasi, si ottiene un rettangolo.

13) Tracciando le bisettrici degli angoli di un rettangolo, si ottiene un quadrato.

14) E' dato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{AB}$.
Sia P un punto preso arbitrariamente su $\overline{AB}$.
Dette $\overline{PH}$ e $\overline{PK}$ le distanze di P dai lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ rispettivamente,
e tracciata l'altezza $\overline{AS}$ relativa al lato $\overline{BC}$,
dimostrare che $\overline{AS}=\overline{PH}+\overline{PK}$ **(vedi figura)**
[Indicazione: tracciare dal punto P…]

Es. 14



15) Si disegna un rombo ABCD, si prende un compasso e si tracciano due circonferenze di ugual raggio (minore del lato del rombo), puntando il compasso su due vertici opposti e chiamando E, F, G, H i punti in cui le circonferenze in gioco tagliano i lati di ABCD.
Il quadrilatero di vertici E, F, G, H sarà allora un rettangolo: dimostralo.

16) ⇨ Sia ABC un triangolo isoscele sulla base $\overline{BC}$.
Per un punto P della base traccia la perpendicolare alla base stessa,
e indica con D, E i punti in cui tale perpendicolare incontra un lato obliquo,
e, rispettivamente, il prolungamento dell'altro lato obliquo.
Dimostra che la somma $PD+PE$ è uguale al doppio dell'altezza $\overline{AH}$ del triangolo.

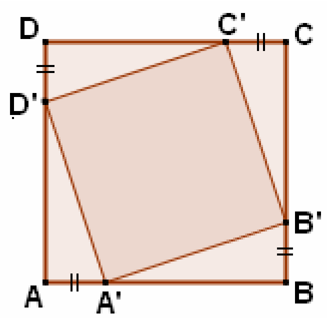
17) In un rombo prendi, su di una diagonale, due punti che abbiano ugual distanza dagli estremi di questa.
Dimostra che congiungendo tali due punti con le estremità dell'altra diagonale, si ottiene ancora un rombo.

18) Dimostra che se il punto di incontro delle diagonali di un rombo viene proiettato sui quattro lati,
i quattro punti così ottenuti sono vertici di un rettangolo.

19) ⇨ Sia ABCD un rettangolo; si traccino le sue diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; sia O il punto in cui queste si tagliano.
Preso poi su $\overline{AB}$ un punto P, si traccino da P:
la parallela a $\overline{BD}$, fino ad incontrare $\overline{AC}$ in Q, e la parallela ad $\overline{AC}$, fino ad incontrare $\overline{BD}$ in R.
Dimostra che il perimetro di PQOR è uguale ad una diagonale del rettangolo.

20) In un quadrato ABCD si prendono **(vedi figura)**
rispettivamente sui quattro lati $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$,
quattro segmenti uguali fra loro $AA'=BB'=CC'=DD'$.
Dimostra che anche $A'B'C'D'$ è un quadrato.

Es. 20



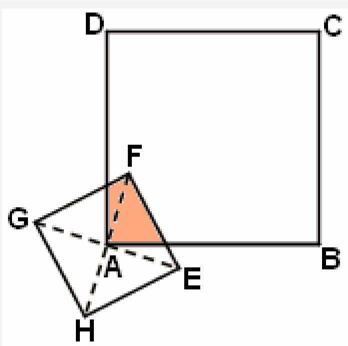
21) ⇨ Per il punto di intersezione delle diagonali di un quadrato
si tracciano due rette perpendicolari fra loro.
Dimostra che i quattro punti in cui tali rette intersecano
i lati del quadrato iniziale, sono vertici di un altro quadrato.

22) Se un trapezio ha le diagonali uguali, allora è isoscele.

23) ⇨ Si tracciano le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB}$,
e si indicano con D, E le intersezioni di tali bisettrici rispettivamente con $\overline{BC}$ e con $\overline{AC}$.
Dimostra che ABDE è un trapezio isoscele, col lato obliquo uguale alla base minore.

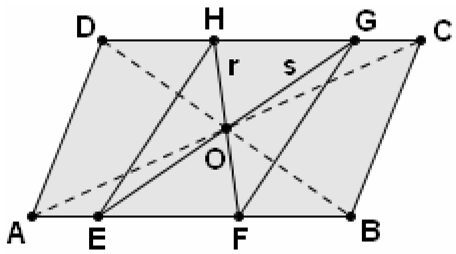
24) ⇨ A partire dai due vertici opposti A, C di un quadrato ABCD
prendi, sui lati, quattro segmenti uguali fra loro $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$.
Dimostra che:
I) il quadrilatero di vertici E, G, H, F è un rettangolo
II) il perimetro di questo rettangolo rimarrebbe sempre costante,
anche se variasse la lunghezza dei quattro segmenti uguali $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CG}=\overline{CH}$.

25) Un quadrato ABCD ha il lato di 4 cm.
Un secondo quadrato, di lato 2 cm,
ha le sue due diagonali che si tagliano in A (vedi figura).
Dimostra che la parte di piano comune
fra il quadrato più grande e quello più piccolo
ha un'area che è costante,
indipendentemente da come venga modificata,
per rotazione del quadrato più piccolo,
l'ampiezza dell'angolo fra le due rette AE e AB.
Quanto misura quest'area costante?



☼ DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)

4) ⇨



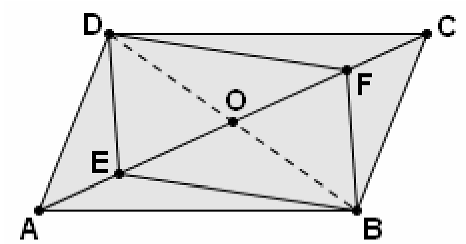
HP
ABCD parallelogrammo
r, s rette condotte
per il punto O di
intersezione delle diagonali

TH
EFGH parallelogrammo

A TE IL COMPITO
DI SEGNARE IN FIGURA, IN QUESTA PAGINA, L'IPOTESI, E CIO' CHE VIA VIA SI DEDUCE NEL CORSO DELLA DIMOSTRAZIONE!

DIM. Si può procedere in diversi modi, ma il più efficace è quello che sfrutta i teoremi (diretti e inversi) sulle diagonali di un parallelogrammo. Innanzitutto, abbiamo $\overline{AO}=\overline{OC}$ e $\overline{BO}=\overline{OD}$ perché è noto che in ogni parallelogrammo (e tale è per ipotesi ABCD) le diagonali ……..
Allora i due triangoli BOF e DOH hanno:
$\overline{BO}=\overline{OD}$; $B\hat{O}F=.....$ perché …….. ; $F\hat{B}O=H\hat{D}O$ perché …….. quindi sono uguali per il ………
Segue $\overline{OF}=......$ Allo stesso modo, confrontando i due triangoli AOE e COG, si deduce $\overline{OE}=......$
Possiamo perciò concludere che EFGH è un parallelogrammo perché ha le diagonali che ……. , c.v.d.

5) ⇨



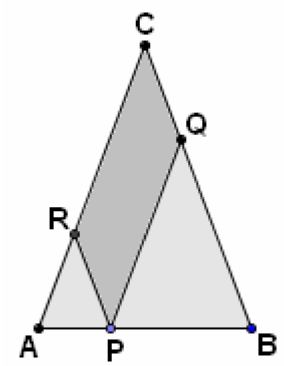
HP: ABCD parallelogrammo; $\overline{AE}=\overline{CF}$ (su $\overline{AC}$)

TH: EBFD parallelogrammo

DIM. Si può procedere in diversi modi, ma c'è una via davvero semplice. Tracciamo l'altra diagonale $\overline{DB}$; poiché nel parallelogrammo ABCD le diagonali ……. è $\overline{AO}=\overline{OC}$, $\overline{BO}=\overline{OD}$. Ma allora potremo scrivere la catena $\overline{EO}=\overline{AO}-\overline{AE}=.....-.....=\overline{OF}$. Ed essendo $\overline{EO}=\overline{OF}$ e $\overline{BO}=\overline{OD}$, concluderemo che EBFD è un parallelogrammo in quanto ha le diagonali che …….. , c.v.d.

10) ⇨ DIM. Osserviamo che $A\hat{P}R=\hat{B}$, $B\hat{P}Q=\hat{A}$ perché ……
perciò, essendo pure $\hat{A}=\hat{B}$ perché …….. ,
sarà $A\hat{P}R=\hat{B}=\hat{A}=B\hat{P}Q$.
Da tali uguaglianze angolari si trae che i triangoli APR, PBQ sono …….. : PR = AR, PQ = BQ
per cui potremo scrivere

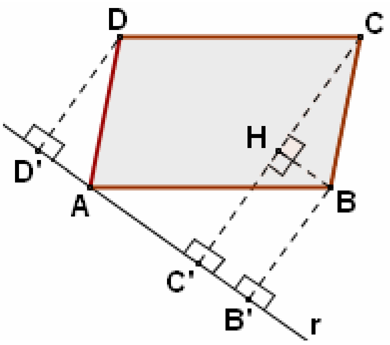
$$2p(PQCR)=\overline{PR}+\overline{RC}+\overline{QC}+\overline{PQ}=$$
$$=\overline{AR}+\overline{RC}+\overline{QC}+\overline{BQ}=\left(\overline{AR}+\overline{RC}\right)+\left(\overline{QC}+\overline{BQ}\right)=$$
$$=\overline{AC}+\overline{BC},\ \text{c.v.d.}$$



HP
$\overline{CA}=\overline{CB}$
PQ || AC
PR || BC

TH
$2p(PQCR)=$
$=\overline{AC}+\overline{BC}$

11) ⇨ DIM.
Innanzitutto, le rette BB', CC', DD' sono parallele fra loro perché tutte
………………………
Tracciamo ora per B la perpendicolare BH a CC'.
Il quadrilatero B'BHC', avendo tre angoli retti, deve avere retto anche l'angolo rimanente (perché ……..) quindi è un rettangolo.
Si ha perciò $\overline{BB'}=\overline{HC'}$.



HP
ABCD parallelogrammo
r retta per A,
$r\cap ABCD=\{A\}$
$BB'\perp r$, $CC'\perp r$, $DD'\perp r$

TH
$\overline{CC'}=\overline{BB'}+\overline{DD'}$

♥ **Nella dimostrazione viene qui applicato il METODO TOP-DOWN (pagina 342)**

A questo punto per avere la tesi basterebbe poter dimostrare l'uguaglianza $\overline{DD'}=\overline{CH}$.
E a tale scopo basterebbe riuscire a provare che sono uguali i due triangoli AD'D e ….. .
Essi hanno ciascuno un angolo retto ($A\hat{D'}D=90°$ per …. , $B\hat{H}C=90°$ per ….) e $\overline{AD}=\overline{BC}$ perché …..
Se avessimo ora un'altra uguaglianza angolare potremmo concludere che sono uguali per il ………
Bene, quest'uguaglianza può essere la $A\hat{D}D'=B\hat{C}H$: tali due angoli sono infatti uguali per avere i lati ………….. e precisamente CH || DD' perché, come già osservato, ……… ; DA || CB perché ………
Dunque, ricapitolando, è AD'D = BHC quindi $\overline{DD'}=\overline{CH}$ perciò $\overline{CC'}=\overline{HC'}+\overline{CH}=\overline{BB'}+\overline{DD'}$ c.v.d.