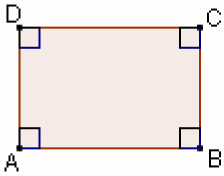
4.4 - PARALLELOGRAMMI PARTICOLARI

IL RETTANGOLO

DEFINIZIONE

Si dice “**rettangolo**”
un quadrilatero
coi quattro angoli tutti retti.

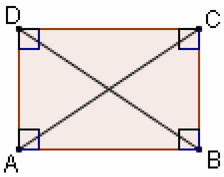


$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$

OSSERVAZIONI SULLA DEFINIZIONE

- *Il rettangolo, dunque, avendo gli angoli opposti uguali, è un parallelogrammo (è un caso particolare di parallelogrammo).*
- *Avremmo anche potuto dire che il rettangolo è “un parallelogrammo coi quattro angoli retti”: in questo modo avremmo dato una definizione, diciamo così, “sovrabbondante”, ma comunque sempre equivalente a quella da noi scelta.*
- *Se di un quadrilatero noi sappiamo che ha TRE angoli retti, potremo immediatamente concludere che si tratta di un rettangolo: infatti la somma degli angoli di un quadrilatero dà, com’è noto, 360°, e se tre angoli sono di 90° (90°+90°+90°=270°), il rimanente sarà obbligato a misurare 360°–270°=90°.*
- *Se di un PARALLELOGRAMMO si sa che ha un angolo retto, allora si può subito concludere che si tratta di un rettangolo. Infatti l’angolo opposto sarà pure retto (in un parallelogrammo gli angoli opposti sono uguali), e i due angoli rimanenti saranno retti anch’essi perché supplementari di un angolo retto (in un parallelogrammo gli angoli adiacenti a uno stesso lato sono supplementari).*

TEOREMA
In un rettangolo, le diagonali sono uguali.



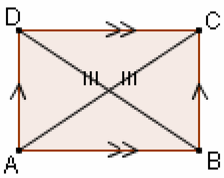
HP
ABCD rettangolo

TH
$\overline{AC} = \overline{BD}$

DIM.
Basta confrontare i due triangoli ABD e ABC i quali hanno:
$\overline{AB}$ in comune;
$\overline{AD} = \overline{BC}$ perché lati opposti di un parallelogrammo;
$\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$.
Dunque tali due triangoli sono uguali per il 1° Criterio; segue la tesi.

OSSERVAZIONE - Poiché in ogni parallelogrammo, quindi anche in un rettangolo, le diagonali si tagliano scambievolmente per metà, da questo teorema segue subito che in un rettangolo i 4 segmenti che le diagonali determinano tagliandosi, sono tutti uguali fra loro (metà di segmenti uguali).

TEOREMA
Se un parallelogrammo ha le diagonali uguali, allora è un rettangolo.



HP
ABCD parallelogrammo
$\overline{AC} = \overline{BD}$

TH
ABCD rettangolo

DIM.
Confrontiamo i due triangoli ABD e ABC.
Essi hanno:
$\overline{AB}$ in comune;
$\overline{BD} = \overline{AC}$ per ipotesi;
$\overline{AD} = \overline{BC}$ perché lati opposti di un parallelogrammo.
Dunque sono uguali per il 3° Criterio e in particolare è $\widehat{A} = \widehat{B}$.
Ma $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono pure supplementari
(angoli di un parallelogrammo, adiacenti a uno stesso lato, o, se si vuole: angoli coniug. int. di due parallele con trasv.):
quindi si ha $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$ e simultaneamente $\widehat{A} = \widehat{B}$,
da cui $\widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{180°}{2} = 90°$.
Il parallelogrammo ABCD ha perciò due angoli retti;
anche gli altri due (= i rispettivi opposti) saranno quindi retti.
ABCD è di conseguenza un rettangolo, C.V.D.

Dimostrazione alternativa.
In ogni parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente per metà.
Ma allora, in un parallelogrammo che abbia le diagonali uguali, queste intersecandosi determinano quattro segmenti tutti uguali fra loro (metà di segmenti uguali).
Ricordi il teorema secondo cui ogni triangolo nel quale la mediana relativa a un lato sia metà del lato stesso, è rettangolo?
Applicandolo ad ABD, si ha subito $\widehat{A} = 90°$...