C) L'ESPONENTE 1, L'ESPONENTE 0

❑ L'ESPONENTE 1 $\boxed{5^1 = ?}$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^2 = 5 \cdot 5$
$5^1 = \mathbf{5}$ (*abbiamo diviso ancora una volta per* 5)

♥ **Definizione: un numero elevato all'esponente 1 è uguale a sé stesso, cioè resta invariato**

$\boxed{\mathbf{a^1 = a \quad \forall a}}$ (leggi: a elevato all'esponente 1 è uguale ad a, qualunque sia a)

La definizione data, oltre che apparire la più "logica", è anche l'unica che permetta di conservare pure per il "nuovo" esponente 1, la validità delle sette proprietà che sussistono per gli esponenti maggiori di 1. Infatti, se voglio formulare la definizione di a^1 in modo che continuino a valere le "vecchie" proprietà, allora, in particolare, avrò bisogno che sia corretto scrivere:

$$a^1 = a^{4-3} = \frac{a^4}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a$$

Insomma, la definizione $a^1 = a$ è l'unica che sia compatibile con la proprietà sottrattiva degli esponenti: se si scegliesse un'altra definizione, la sottrattiva degli esponenti cesserebbe di valere per l'esponente 1.

Si può poi dimostrare che la definizione posta è compatibile
non solo con la "sottrattiva degli esponenti", ma anche con TUTTE le altre proprietà.

❑ L'ESPONENTE 0 $\boxed{5^0 = ?}$

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^2 = 5 \cdot 5$
$5^1 = 5$
$5^0 = \mathbf{1}$ (*abbiamo diviso ancora una volta per* 5)

♥ **Definizione:**
un numero (che non sia lo 0; vedremo dopo il perché di questa eccezione)
elevato all'esponente 0 è uguale a 1

$\boxed{\mathbf{a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0}}$ (leggi: a elevato all'esponente 0 è uguale a 1, per ogni a diverso da 0)

Tale definizione è l'unica che permetta di estendere anche all'esponente 0,
le proprietà già dimostrate valide per gli esponenti 1, 2, 3, 4, …
Infatti, se voglio formulare la definizione di a^0 in modo che continuino a valere le "vecchie" proprietà, allora, in particolare, dovrò poter scrivere:

$$a^0 = a^{4-4} = \frac{a^4}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1$$

Si può poi dimostrare che la definizione posta è compatibile
non solo con la "sottrattiva degli esponenti", ma anche con TUTTE le altre proprietà.

Abbiamo anticipato che la definizione ha un'eccezione: infatti

♥ **l'operazione 0^0 è considerata "INDETERMINATA"**

Per comprendere il motivo di questa scelta da parte dei matematici, consideriamo le due sequenze:

$4^0 = 1 \quad 3^0 = 1 \quad 2^0 = 1 \quad 1^0 = 1 \;\rightarrow\; 0^0 = \mathbf{1???}$
$0^4 = 0 \quad 0^3 = 0 \quad 0^2 = 0 \quad 0^1 = 0 \;\rightarrow\; 0^0 = \mathbf{0???}$

… come si vede, c'è ambiguità!

Osserviamo che in questo caso particolarissimo NON è possibile sciogliere l'indecisione attraverso la richiesta che continui a valere la sottrattiva degli esponenti,
in quanto una catena che iniziasse, ad esempio, con $0^4/0^4$ non potrebbe essere scritta,
perché conterrebbe uno 0 $(0^4 = 0)$ a denominatore (*illegal* operation).