CALCOLO LETTERALE: MONOMI E POLINOMI

1. ESPRESSIONI ALGEBRICHE; SIGNIFICATO DELLE LETTERE IN ALGEBRA

Si dice “**espressione algebrica**”
un insieme di numeri e/o lettere
legati fra loro dai segni di operazione.

- Se un’espressione algebrica non contiene lettere, ma solo numeri, viene detta “espressione algebrica numerica”, o semplicemente “**espressione numerica**”.
- Se c’è almeno una lettera, si parlerà invece di “**espressione letterale**”.

Esempi:

$$\underbrace{\frac{5^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3+7}}_{\textit{espressione numerica}} \qquad \underbrace{-7a+5abc;\quad \frac{x^2-1}{\sqrt{x-4}}}_{\textit{espressioni letterali}}$$

In un’espressione algebrica, una *lettera* può, a seconda delle circostanze, avere il significato di:

♥ **VARIABILE**, **ossia**
numero del quale non si desidera specificare il valore,
perché tale valore potrà essere scelto, di volta in volta, in modi diversi

Esempio 1
Per determinare l’area di un triangolo
si utilizza l’espressione $\boxed{\dfrac{b\cdot h}{2}}$
(dove b indica la misura della base , h quella dell’altezza), calcolandola per i valori di b, h che interessano in quel momento.

Esempio 2
Un atleta si allena per una corsa di resistenza percorrendo 3,5 metri ogni secondo.
Che distanza copre in 20 secondi? In un minuto? In un’ora?

$\boxed{s=}\ v\cdot t=\boxed{3{,}5\cdot t}$
Con $t=20 \to s=3{,}5\cdot 20=70$
Con $t=60 \to s=3{,}5\cdot 60=210$
Con $t=3600 \to s=3{,}5\cdot 3600=12600$

♥ **INCOGNITA**, ossia
numero del quale non è possibile specificare il valore,
perché questo è, almeno per il momento, sconosciuto, “incognito”

Esempio

Problema:
trovare due numeri interi consecutivi tali che la somma della terza parte del minore con la quarta parte del maggiore dia 58.

$x=$ numero minore, $x+1=$ numero maggiore; $\boxed{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}(x+1)=58}$

Risolvendo, con le tecniche opportune, l’**equazione** ottenuta,
si riesce a determinare il valore di x.

♥ **COSTANTE**
Per “costante” si può intendere, a seconda dei casi:

- **un numero particolare, dal valore fisso e immutabile …**

Esempi classici:

$\pi = 3{,}1415926...$ *"p greco"*
$e = 2{,}7182818...$ *numero di Nepéro*

QUALCHE FORMULA CON π:

Lunghezza della circonferenza $=\boxed{2\pi r}$

Area del cerchio $=\boxed{\pi r^2}$

Volume della sfera $=\boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$

Superficie della sfera $=\boxed{4\pi r^2}$

- **…** oppure **un “parametro” o “costante arbitraria”**

Quando una lettera è utilizzata nel ruolo di “costante arbitraria” o “parametro”, si comporta a tratti come una costante (nel senso che il suo valore viene tenuto fisso) e a tratti come una variabile (nel senso che il suo valore viene cambiato).

La rana, per un po’ sta sott’acqua
e per un po’ esce fuori a prendere una boccata d’aria:
allo stesso modo il parametro fa vita da anfibio
fra il ruolo di costante e quello di variabile.
Ti pare strano e nebuloso questo discorso? Sì???
Sono perfettamente d’accordo con te! Ma più avanti, con le *equazioni letterali* (pag. 380), avrai esempi appropriati.

ESERCIZI (risposte a pag. 103)

1) Indicando l'età di Mario con e, scrivi le espressioni letterali corrispondenti alle età:
a) di sua moglie, che ha 2 anni più di lui
b) dei suoi figli, che Mario ha avuto rispettivamente alle età di 31 e 34 anni
c) di sua suocera, sapendo che quando partorì la figlia, che ora è moglie di Mario, aveva 29 anni

2) Se Aldo possiede p euro meno di Bruno, e Bruno a sua volta possiede q euro più di Carlo, allora, detta c la cifra, in euro, posseduta da Carlo, quanti euro posseggono i tre in totale?

3) In un parco ci sono b biciclette e t tricicli. Scrivi l'espressione che corrisponde al numero totale di ruote.

4) Se in un salvadanaio ci sono a monete da 1 euro, b monete da 50 centesimi, e c monete da 20 centesimi, scrivi l'espressione letterale che indica il valore contenuto nel salvadanaio, espresso in euro

5) Sia n un numero intero. Scrivi l'espressione letterale che indica
a) il numero successivo b) il numero precedente c) l'opposto di n
d) il triplo di n e) il successivo del triplo di n f) il triplo del successivo di n
g) il cubo del quadruplo di n h) il quadruplo del cubo di n
i) il numero che supera di 2 unità il doppio di n
l) il doppio del numero che supera n di 2 unità

Per indicare gli *interi* si preferisce di norma impiegare lettere *centrali* dell'alfabeto, come n, m, i, k …

6) Sia n un numero intero diverso da 0. Scrivi l'espressione letterale che indica
a) il reciproco di n b) il quadrato del reciproco di n c) il reciproco del quadrato di n
d) l'*antireciproco* (= opposto del reciproco) di n e) il quadrato della somma fra n e il suo reciproco

7) Siano x, y due numeri. Scrivi l'espressione letterale che indica:
a) il reciproco della loro somma b) la somma dei loro reciproci c) la differenza dei loro quadrati (sottinteso: prendendo i numeri nell'ordine dato, ossia prima x poi y) d) il quadrato della loro differenza
e) il loro prodotto, diminuito di una unità f) il numero che supera di 4 il reciproco del loro prodotto
g) il loro rapporto (prendendoli nell'ordine dato) h) il prodotto della loro somma per la loro differenza
i) il valore assoluto della loro differenza l) la differenza fra i loro valori assoluti
m) la somma fra il triplo del 1° e il doppio del 2° n) il triplo della somma del 1° col doppio del 2°

8) Inversamente rispetto ai tre esercizi precedenti, descrivi a parole le espressioni algebriche che seguono:

a) $x\cdot\frac{1}{x}$ b) $(x+y)^2$ c) $\frac{1}{x^2+y^2}$ d) $|-x|$ e) $x^3+\left(\frac{1}{2}x\right)^3$ f) $x^2+(-x)^2$ g) $-\frac{x-y}{x+y}$ h) $(3x+4y)^2$

9) Se la somma di due numeri è s e uno di questi numeri è x, quanto vale l'altro numero?
Se la differenza di due numeri è d e uno di questi numeri è x, quanto vale l'altro numero?
[Rispondi sotto l'ipotesi che x sia a) il minore fra i due b) il maggiore fra i due]

10) Se il prodotto fra due numeri non nulli è p e uno di questi numeri è x, quanto vale l'altro numero?
Se il rapporto fra due numeri non nulli è r e uno di questi numeri è x, quanto vale l'altro numero?
[Rispondi sotto l'ipotesi che x sia a) il divisore nel rapporto b) il dividendo nel rapporto]

11) Considera le seguenti sequenze di uguaglianze e:
I) scrivi l'uguaglianza che ti sembra debba venire dopo;
II) controlla, svolgendo i calcoli, se è corretta;
III) scrivi un'uguaglianza letterale che esprima la relazione in forma astratta
(puoi usare ad esempio n come lettera, ma qualunque scelta per la lettera andrebbe bene)
IV) verifica se la formula trovata va bene anche per altri valori assegnati alla lettera

a)	b)	c)	d)	e)
$2-\frac{1}{2}=\frac{(2+1)(2-1)}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{9-4}{6}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$1^2+2^2=2\cdot1\cdot2+1$
$3-\frac{1}{3}=\frac{(3+1)(3-1)}{3}$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}=\frac{2}{3^2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{16-9}{12}$	$2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$	$2^2+3^2=2\cdot2\cdot3+1$
$4-\frac{1}{4}=\frac{(4+1)(4-1)}{4}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}=\frac{3}{4^2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{25-16}{20}$	$3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$	$3^2+4^2=2\cdot3\cdot4+1$
…	…	…	…	$4^2+5^2=2\cdot4\cdot5+1$
				…

f)	g)	h)	i)	l)
$1+1^2=1\cdot2$	$1-1\cdot0=1$	$1+1+2=4$	$1+1+4+3=9$	$0\cdot1\cdot2=1-1$
$2+2^2=2\cdot3$	$4-2\cdot1=2$	$1+4+4=9$	$1+2+9+4=16$	$1\cdot2\cdot3=8-2$
$3+3^2=3\cdot4$	$9-3\cdot2=3$	$1+9+6=16$	$1+3+16+5=25$	$2\cdot3\cdot4=27-3$
$4+4^2=4\cdot5$	$16-4\cdot3=4$	$1+16+8=25$	$1+4+25+6=36$	$3\cdot4\cdot5=64-4$
…	…	…	…	…

12) $1^2+2^2+3^2=\dfrac{3\cdot 4\cdot(6+1)}{6}$; $1^2+2^2+3^2+4^2=\dfrac{4\cdot 5\cdot(8+1)}{6}$; $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\dfrac{5\cdot 6\cdot(10+1)}{6}$

Dopo aver controllato che queste uguaglianze sono corrette, scrivi quella che a tuo parere viene dopo. Scrivi anche il secondo membro di quella che potrebbe essere la formula generale $1^2+2^2+...+n^2=...$ e verifica se "funziona", assegnando a n qualche valore maggiore di 6.

13) Scrivi le uguaglianze letterali che esprimono le affermazioni seguenti.
Poiché si tratta di affermazioni vere qualunque siano i numeri coinvolti (eccettuato, tutt'al più, qualche valore "eccezionale": ad esempio, un denominatore non può mai essere uguale a zero), otterrai delle "identità" (= uguaglianze letterali, vere per tutti i valori "ammissibili" delle lettere).

a) Sottraendo dalla somma di due numeri la loro differenza, si ottiene il doppio del secondo numero
b) Sommando il precedente e il successivo di un intero si ottiene il doppio dell'intero stesso
c) Moltiplicando la somma di due numeri per la loro differenza, si ottiene la differenza fra il quadrato del primo e il quadrato del secondo
d) Dato un intero, se dal quadrato del successivo si sottrae il quadrato del precedente si ottiene il quadruplo del numero di partenza
e) La somma di quattro interi consecutivi supera di 6 unità il quadruplo del più piccolo di essi
f) La somma di un numero col suo reciproco è uguale al rapporto fra il quadrato, aumentato di 1, di quel numero, e il numero stesso.

14) Scrivi le uguaglianze letterali che esprimono le affermazioni seguenti.
Quelle che otterrai saranno delle "equazioni".
Una "equazione" è una "uguaglianza letterale problematica", di fronte alla quale ci si domanda: "Quali saranno (se esistono) i valori della lettera, o delle lettere, per cui l'uguaglianza è vera?"

a) La somma di un numero col suo doppio è uguale a 21
b) Un numero supera di 4 unità i suoi 2/3
c) Un numero è inferiore di 12 unità al suo quadrato
d) Il quadrato di un numero supera di 48 unità il doppio del numero stesso
e) Un numero è uguale alla quarta parte del suo reciproco
f) I quadrati di due numeri differiscono di 9 unità
g) Moltiplicando un numero per 3, aumenta di 8 unità.

15) Calcola il valore delle espressioni letterali che seguono, per i valori delle lettere specificati a fianco:

a) $(4-x)^2+x$ per $x=4;\ x=5;\ x=-4$ b) $\dfrac{h-1}{h^2-2h-1}$ per $h=1;\ h=-1;\ h=0;\ h=\dfrac{1}{4};\ h=-\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x-1}$ per $x=2;\ x=-3;\ x=\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{y}{y+\dfrac{1}{y}}$ per $y=1;\ y=\dfrac{2}{3};\ y=-\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{a^2+a^3}{1-a+a^2}$ per $a=1,\ a=-1,\ a=-10$

Ciò che segue è tratto dal sito
www.themathpage.com
del professor Lawrence Spector
(New York),
una ricca e ben curata raccolta
di lezioni ed esercitazioni interattive.

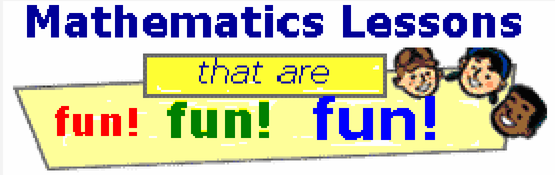
TheMathPage
Lawrence Spector

Let the value of the variable (leggi: *vèriabol*) y depend on the value of the variable x as follows: $y=2x+4$.
Calculate the value of y that corresponds to each value of x:
When $x=0$, $y=...$ When $x=1$, $y=...$ When $x=2$, $y=...$ When $x=3$, $y=...$

Write an algebraic expression that will symbolize each of the following.
a) Six times a certain number b) Six more than a certain number c) Six less than a certain number
d) A certain number less than 6 e) A number repeated as a factor three times
f) A number repeated as a term three times g) The sum of three consecutive whole numbers
h) Eight less than twice a certain number i) One more than three times a certain number

NOTA
La parola "*times*" è di uso frequente in lingua Inglese per indicare *moltiplicazione*. Ad esempio, $5\cdot 8$ si legge: "five *times* eight", $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}$ si legge: "one half *times* three fourths" (anche: one half "*multiplied by* three fourths")

Il sito http://math.rice.edu/~lanius/
della professoressa Cynthia Lanius
di Houston, Texas,
è stato selezionato fra i migliori contributi su Internet
in materia di didattica della matematica.



Fra le sue tantissime proposte, ecco un facile gioco che può essere analizzato col calcolo letterale.

Prendi un calendario qualsiasi (*purché abbia una settimana su ogni riga*).
Dì a un tuo amico di scegliere 4 giorni che formano un quadrato, come i quattro qui a destra. **18 19**
Il tuo amico dovrà dirti solo la somma dei quattro giorni, e tu gli saprai dire quali sono i giorni. **25 26**
Come funziona il giochino? … Supponiamo, per fissare le idee, che i quattro numeri scelti dalla persona siano quelli raffigurati. La somma sarà allora $18+19+25+26=88$.
Indichiamo il primo numero con un simbolo, ad esempio n.
Allora gli altri numeri in gioco saranno $n+1$, $n+7$, $n+8$.
L'amico in questo caso ti rivelerebbe che $n+n+1+n+7+n+8=88$. Quindi tu a questo punto potresti …
Prova a continuare il ragionamento per conto tuo, poi clicca sulla freccia ⇨
per andare a vedere cosa dice la professoressa Lanius (*like terms* = termini "simili").

RISPOSTE

1) a) $e+2$ b) $e-31,\ e-34$ c) $e+2+29=e+31$ 2) $c+c+q+c+q-p=3c+2q-p$ 3) $2b+3t$

4) $a+0{,}50b+0{,}20c$ oppure $a+\frac{b}{2}+\frac{c}{5}=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{5}c$ oppure $\frac{100a+50b+20c}{100}$

5) a) $n+1$ b) $n-1$ c) $-n$ d) $3n$ e) $3n+1$ f) $3(n+1)$ g) $(4n)^3$ h) $4n^3$ i) $2n+2$ l) $2(n+2)$

6) a) $\frac{1}{n}$ o anche n^{-1} b) $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ o $\left(n^{-1}\right)^2$ c) $\frac{1}{n^2}$ d) $-\frac{1}{n}$ e) $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2$

7) a) $\frac{1}{x+y}$ b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ c) x^2-y^2 d) $(x-y)^2$ e) $xy-1$ f) $\frac{1}{xy}+4$ g) $\frac{x}{y}$ h) $(x+y)(x-y)$
i) $|x-y|$ l) $|x|-|y|$ m) $3x+2y$ n) $3(x+2y)$

8) a) il prodotto di un numero per il suo reciproco b) il quadrato della somma di due numeri
c) il reciproco della somma dei quadrati di due numeri d) il valore assoluto dell'opposto di un numero
e) la somma del cubo di un numero col cubo della sua metà
f) la somma del quadrato di un numero col quadrato del suo opposto
g) l'opposto del rapporto fra la differenza di due numeri e la loro somma
h) il quadrato della somma del triplo di un numero col quadruplo di un altro numero

9) $s-x$; a) $x+d$ b) $x-d$ 10) $\frac{p}{x}$; a) rx b) $\frac{x}{r}$

11) a) I) $5-\frac{1}{5}=\frac{(5+1)(5-1)}{5}$ III) $n-\frac{1}{n}=\frac{(n+1)(n-1)}{n}$ b) I) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}=\frac{4}{5^2}$ III) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$
c) I) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{36-25}{30}$ III) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n(n+1)}$ d) I) $4-\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$ III) $n-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2}{n+1}$
e) I) $5^2+6^2=2\cdot5\cdot6+1$ III) $n^2+(n+1)^2=2\cdot n\cdot(n+1)+1$ f) I) $5+5^2=5\cdot6$ III) $n+n^2=n\cdot(n+1)$
g) I) $25-5\cdot4=5$ III) $n^2-n\cdot(n-1)=n$ h) I) $1+25+10=36$ III) $1+n^2+2n=(n+1)^2$
i) I) $1+5+36+7=49$ III) $1+(n-1)+n^2+(n+1)=(n+1)^2$ *oppure* $1+n+(n+1)^2+(n+2)=(n+2)^2$
l) $4\cdot5\cdot6=125-5$ III) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=(n+1)^3-(n+1)$ *oppure* $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=n^3-n$

12) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=\frac{6\cdot7\cdot(12+1)}{6}$; $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

13) a) $(x+y)-(x-y)=2y$ b) $(x-1)+(x+1)=2x$ c) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
d) $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$ e) $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=4x+6$ f) $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$

14) a) $x+2x=21$ b) $x=\frac{2}{3}x+4$ c) $x=x^2-12$ d) $x^2=2x+48$ e) $x=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}$ f) $x^2-y^2=9$ g) $3x=x+8$

15) a) 4; 6; 60 b) $0,\ -1;\ 1;\ \frac{12}{23};\ -6$ c) $-\frac{3}{2};\ -\frac{13}{12};\ 3$ d) $\frac{1}{2};\ \frac{4}{13};\ \frac{1}{5}$ e) $2;\ 0;\ -\frac{300}{37}$

2. DEFINIZIONE DI MONOMIO, GRADO DI UN MONOMIO

Si dice "monomio" un'espressione algebrica costituita da numeri e/o lettere moltiplicati fra loro.
Le lettere possono eventualmente essere elevate a potenza con esponente intero positivo.

Esempi di monomi sono:

$$4a^2b \qquad -\frac{5}{6}ax^3y^5z \qquad t^4 \qquad -c^2x \qquad y \qquad -\frac{7}{5}$$

(anche una singola lettera o un numero "puro" possono essere considerati come casi particolari di monomio)

In un monomio distinguiamo un **coefficiente** e una **parte letterale**.

monomio	*coefficiente*	*parte letterale*
$4a^2b$	4	a^2b
$-\frac{5}{6}ax^3y^5z$	$-\frac{5}{6}$	ax^3y^5z
t^4	$\boxed{+1}$. *Infatti* $t^4 = \underbrace{+1\cdot t^4}_{\text{qualsiasi numero, moltiplicato per +1, resta invariato}}$	t^4
$-c^2x$	$\boxed{-1}$. *Infatti* $\underbrace{-c^2x}_{\text{opposto del numero } c^2x} = \underbrace{-1\cdot c^2x}_{\text{moltiplicando un numero per }-1\text{ ne ottengo l'opposto}}$	c^2x
$-\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{5}$	*non c'è*
$4\cdot a^2b\cdot 5bx$	20. *Infatti* $4\cdot a^2b\cdot 5bx = \underbrace{20a^2b^2x}_{\textbf{monomio scritto in "forma normale"}}$	a^2b^2x

In un monomio, l'esponente di una lettera si dice anche "grado" di quella lettera.
Quando si parla di "GRADO" DI UN MONOMIO, senza far riferimento a nessuna lettera in particolare, **si vuole intendere il "grado complessivo",**
definito come la **SOMMA DEI GRADI (= ESPONENTI) DELLE SINGOLE LETTERE**.

monomio	*grado*
$4a^2b$	$2+1=3$
$-\frac{5}{6}ax^3y^5z$	10
t^4	4
$-c^2x$	3
y	1
$-\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{5}$, se pensato come un monomio, è di grado 0. Infatti è possibile scrivere, ad esempio, $-\frac{7}{5}=-\frac{7}{5}\cdot x^0$ (un numero elevato a 0 dà sempre come risultato 1, tranne il caso particolarissimo 0^0 = indeterminato)

3. OPERAZIONI CON MONOMI

MOLTIPLICAZIONE

$$\boxed{(7a^4b^3)\cdot(2a^2bx)} \underset{dissociativa}{=} 7a^4b^3\cdot 2a^2bx \underset{commutativa}{=} 7\cdot 2\cdot a^4\cdot a^2\cdot b^3\cdot b\cdot x \underset{associativa}{=}$$

$$=(7\cdot 2)\cdot(a^4\cdot a^2)\cdot(b^3\cdot b)\cdot x \underset{additiva\ degli\ esponenti}{=} \boxed{14a^6b^4x}$$

Per moltiplicare fra loro due o più monomi basta **moltiplicare i coefficienti**,
e poi eseguire il prodotto delle parti letterali tenendo conto della **proprietà additiva degli esponenti**.

Altri esempi: $\quad -4x^3y^2z\cdot(3x^2yw)=-12x^5y^3zw \qquad -\frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{16}_{2}}ab\cdot\left(-\frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{35}_{5}}b\right)=+\frac{9}{10}ab^2$

DIVISIONE

$$\boxed{(24a^5b^5c^5):(8a^3b^4c^5)}=\frac{24a^5b^5c^5}{8a^3b^4c^5}=\frac{24}{8}\cdot\frac{a^5}{a^3}\cdot\frac{b^5}{b^4}\cdot\frac{c^5}{c^5}=\boxed{3a^2b}$$

Per dividere due monomi basta **dividere i coefficienti**,
poi eseguire il quoziente delle parti letterali tenendo conto della **proprietà sottrattiva degli esponenti**.

Volendo, per svolgere una divisione fra due monomi
è anche possibile ricorrere agli esponenti negativi:

$$\boxed{(24a^5b^5c^5):(8a^3b^4c^5)}=24a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{8a^3b^4c^5}=24a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^4}\cdot\frac{1}{c^5}\boxed{=\,^{3}\cancel{24}a^5b^5c^5\cdot\frac{1}{\cancel{8}}\cdot a^{-3}b^{-4}c^{-5}=3a^2b}$$

Si tratta, quindi, **di trasformare la divisione in moltiplicazione, nel modo seguente:**
- **si moltiplica il coefficiente del primo monomio per il reciproco del coefficiente del secondo;**
- **si cambiano di segno gli esponenti delle lettere del secondo monomio.**

Ecco un altro esempio, svolto nei due possibili modi:

$$\left(\frac{1}{8}x^3y^6\right):\left(-\frac{5}{4}x^2y^2\right)=\begin{cases}\frac{1}{8}:\left(-\frac{5}{4}\right)x^{3-2}y^{6-2}=\frac{1}{_2\cancel{8}}\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{5}\right)xy^4=-\frac{1}{10}xy^4\\[2ex] \frac{1}{_2\cancel{8}}x^3y^6\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{5}x^{-2}y^{-2}\right)=-\frac{1}{10}xy^4\end{cases}$$

Ancora:

$$3ab^3c^3:(-2abc^5d^5)=3ab^3c^3\cdot\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}c^{-5}d^{-5}\right)=-\frac{3}{2}b^2c^{-2}d^{-5}\ \text{(NOTA)}$$

NOTA
Il risultato di quest'ultima espressioncina è dunque un prodotto di numeri e lettere, in cui qualche lettera è elevata a esponente negativo.
Non si tratta perciò di un monomio "in senso stretto"
(la definizione da noi posta all'inizio prevedeva che in un monomio le lettere potessero essere elevate soltanto ad esponente positivo);
tuttavia, in questi casi si continua a usare ugualmente il termine "monomio".

♥ DIVIDERE per una lettera elevata ad esponente equivale a MOLTIPLICARE per quella stessa lettera con ESPONENTE CAMBIATO DI SEGNO!

$$\boxed{\begin{array}{l}:a^2\\ \cdot\frac{1}{a^2}\\ \cdot a^{-2}\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}:a^{-3}\\ \cdot\frac{1}{a^{-3}}\\ \cdot\frac{1}{\frac{1}{a^3}}\\ \cdot a^3\end{array}}$$

Si può facilmente verificare che **tutte le operazioni che coinvolgono questi "MONOMI CON ESPONENTI ANCHE NEGATIVI" si effettuano esattamente come per i "*monomi in senso stretto*".**
Avvertiamo soltanto che, **in presenza di esponenti negativi, non viene utilizzato il concetto di "grado".**

E' pur vero che, di fronte a una divisione come $3ab^3c^3:(-2abc^5d^5)$,
nella quale l'osservazione degli esponenti in gioco ci indica subito che nel risultato uscirebbero esponenti negativi, **potremmo anche scegliere di trasformare in "frazione algebrica"** e scrivere:

$$3ab^3c^3:(-2abc^5d^5)=\frac{3\cancel{a}b^{\cancel{3}\,2}\cancel{c^3}}{-2\cancel{a}\cancel{b}c^{\cancel{5}\,2}d^5}=-\frac{3b^2}{2c^2d^5}\quad \text{che equivale appunto a}\quad -\frac{3}{2}b^2c^{-2}d^{-5}$$

ELEVAMENTO A POTENZA

$\boxed{(3x^3y^4z)^2} \underset{\text{"la potenza di un prodotto..."}}{=} 3^2\cdot(x^3)^2\cdot(y^4)^2\cdot z^2 \underset{\text{moltiplicativa degli esponenti}}{=} \boxed{9x^6y^8z^2}$

Per elevare un monomio a potenza basta **elevare a potenza il coefficiente,**
poi elevare a potenza ogni singola lettera tenendo conto della **proprietà moltiplicativa degli esponenti**.

Questo procedimento contiene in sé anche l'applicazione della proprietà che afferma:
la potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

Altro esempio: $\left(-\frac{2}{5}abc^4\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 a^3b^3c^{12} = -\frac{8}{125}a^3b^3c^{12}$

SOMMA ALGEBRICA

Innanzitutto si deve chiarire cosa si intende per "monomi simili".

Def.: **due o più monomi si dicono "simili" se hanno la stessa parte letterale**. Esempi, controesempi:

$3a^2b,\ \frac{1}{5}a^2b,\ -a^2b$ sono simili — $\frac{3}{4}x^3y^3,\ \frac{1}{2}x^3y^2$ NON sono simili

$4xy,\ 4xy$ sono simili (addirittura uguali) — $2abx,\ 2abxy$ NON sono simili

Regola: **la somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati, che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.**

Ad es., $2a+3a=5a$ (*2 volte un numero, più 3 volte LO STESSO numero, dà 5 volte quel numero*)

Nell'eseguire una somma algebrica fra monomi, è **CALDAMENTE RACCOMANDATO di**
♥ **SOTTOLINEARE in modo diverso le "famigliole" di termini simili**:

- $x^3 \underline{+3x^2} \underline{+5x} \underline{+12x^2} \underline{+x^2} \underline{-7x} = x^3+16x^2-2x$
- $-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{10}ab-ab^2+\frac{1}{7}ab^2+ab+\frac{1}{15}ab=$
  $=\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+1+\frac{1}{15}\right)ab+\left(-1+\frac{1}{7}\right)ab^2=$
  $=\frac{-5+3+30+2}{30}ab-\frac{6}{7}ab^2=\frac{30}{30}ab-\frac{6}{7}ab^2=ab-\frac{6}{7}ab^2$

Osserviamo che i risultati delle due espressioni qui a fianco non sono più ulteriormente semplificabili:
la somma algebrica fra monomi NON simili non conduce ad un unico monomio, può solo essere lasciata indicata così com'è.

♥ Questo è importante!
Un'espressioncina come $2a+3b$
NON può assolutamente essere portata
sotto una forma ancora più semplice.

APPROFONDIMENTO

La regola per la somma algebrica di due o più monomi simili,
che abbiamo giustificato elementarmente in un caso particolare a coefficienti interi ($2a+3a=5a$),
richiede precisamente, per una sua giustificazione più generale, di pensare a quel procedimento, che è
l'inverso dell'applicazione della propr. distributiva, ed è chiamato "**raccoglimento a fattor comune**".

- Ad esempio, possiamo scrivere $2a+3a=(2+3)\cdot a=5a$
  dove il passaggio $2a+3a=(2+3)\cdot a$ è, appunto, un "raccoglimento a fattor comune".
- Altro esempio: $-\frac{1}{2}xy+\frac{3}{4}xy-2xy=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-2\right)xy=\frac{-2+3-8}{4}xy=-\frac{7}{4}xy$

♥ RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE

**Data una somma algebrica i cui termini siano dei prodotti,
se c'è un fattore che è comune a tutti questi prodotti, esso potrà essere "raccolto", ossia:
potrà essere scritto fuori da una parentesi, al cui interno si metterà quella somma algebrica
la quale, rimoltiplicata per il numero scritto fuori, permette di riottenere l'espressione iniziale.
La somma algebrica che finisce fra parentesi sarà, evidentemente, ricavabile da quella iniziale,
privando ciascun prodotto del fattore raccolto (= dividendo ciascun prodotto per il fattore raccolto).**

Esempi:

$5\cdot7+5\cdot8+5\cdot9=5\cdot(7+8+9)=5\cdot24=120$

$93-75+36-21=3\cdot(31-25+12-7)=3\cdot11=33$

$2^{12}-3\cdot2^{10}=2^{10}\cdot(2^2-3)=2^{10}\cdot1=1024$

$ab+ac+ad=a(b+c+d)$

$35x-14y=7(5x-2y)$

$12x^3y^2z-18x^5y=6x^3y(2yz-3x^2)$

4. ESERCIZI SUI MONOMI (risultati alla pag. successiva)

- **Moltiplicazione**

1) $3x\cdot 4x$ 2) $11n^2\cdot 3n^4$ 3) $2b^4\cdot 2b^2\cdot 2b$ 4) $3y^3\cdot 2y^2$ 5) $2a\cdot 3ab\cdot 4abc$

6) $6x\cdot 4xy^3z\cdot 2xy^4$ 7) $2k\cdot\left(-3k^3\right)$ 8) $\left(-10x^3y\right)\left(-3x^2y^2\right)$ 9) $-a^2\cdot 4a^2\cdot 3a^3$

10) $-\frac{1}{2}xy^5z\cdot\frac{21}{8}xy^6\cdot\left(-\frac{12}{35}xy^2z^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{9}x\right)$ 11) $\frac{3}{25}ab^3\left(-\frac{15}{4}ac^3\right)\left(-\frac{5}{18}b^3\right)$ 12) $-2x\left(-\frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{8}xy\right)\cdot 32x^3$

- **Divisione**

13) $15a^8:\left(5a^2\right)$ 14) $6x^6:\left(3x^3\right)$ 15) $18a^4:\left(6a^3\right)$ 16) $28b^5:(-4b)$ 17) $-4x^5y^6z^7:\left(2x^2y\right)$

18) $10x^2:2$ 19) $-8xy:4$ 20) $a^2:a$ 21) $-a^3:a$ 22) $-a^3:a^3$

23) $\frac{22}{15}a^7b^{10}:\left(-\frac{55}{3}a^4b^9\right)$ 24) $-\frac{3}{5}x^5:\left(-\frac{7}{10}x^3\right)$ 25) $-\frac{125}{4}a^9b^8c^7:\left(-\frac{75}{8}a^7b^7c^7\right)$

26) $-\frac{2}{7}x^6y:\left(\frac{8}{21}x^2y\right)$ 27) $-\frac{5}{14}x^5y^2z^3:\left(\frac{10}{21}x^4y^2z\right)$ 28) $2x^2:\left(-\frac{3}{5}x\right)$

29) $-7a^2:a^2$ 30) $a^2:\left(-7a^2\right)$ 31) $3a^{10}:\left(11a^2\right)$ 32) $-7x^3y:\left(14x^2\right)$ 33) $xy:(5x)$

34) $x^3:\left(\frac{1}{3}x\right)$ 35) $\frac{3}{5}a^4:\left(\frac{3}{5}a^4\right)$ 36) $\frac{1}{2}a:\left(-\frac{1}{2}a\right)$ 37) $\frac{1}{2}a:(-2a)$ 38) $2a:\left(-\frac{1}{2}a\right)$

- **Elevamento a potenza**

39) $\left(2x^2\right)^3$ 40) $\left(-3a^4y^5\right)^2$ 41) $\left(-3a^4y^5\right)^3$ 42) $\left(-2xy^2z^3w^4\right)^5$

43) $\left(\frac{2}{5}x^4y\right)^3$ 44) $(-x)^2$ 45) $(-x)^3$ 46) $\left(-0,25a^3\right)^2$

- **Somma algebrica**

47) $2x+3x+4x$ 48) $3y^2+5y^2-y^2$ 49) $ab-8ab+6ab$ 50) $3x+4y+5x-2z+y+3z$

51) $4a^2+3a-2+4a-4a^2+1$ 52) $a^2-ab+2ab-b^2+a^2-ab$ 53) $14x-4x^2+x^2-4x-10x+3x^2$

54) $x+\frac{1}{2}x$ 55) $y-\frac{1}{4}y$ 56) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2$ 57) $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{3}a^2b$ 58) $\frac{13}{6}x-\frac{2}{3}x+x$

59) $\frac{3}{5}x^3-x^3$ 60) $-\frac{1}{6}a-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a$ 61) $-\frac{3}{10}x^2+\frac{13}{10}x^2$ 62) $-\frac{3}{5}a^2-\frac{1}{10}a^2+\frac{3}{10}a^2$

- **Esponenti negativi**

63) $10a^{-6}\cdot 2a^{-3}$ 64) $3a^5\cdot 2a^{-2}$ 65) $\frac{1}{5}a^{-3}\cdot\frac{1}{4}a$ 66) $4x^{-2}y^{-5}\cdot 2x^2y^{-1}$

67) $10a^{-6}:\left(2a^{-3}\right)$ 68) $3a^5:\left(2a^{-2}\right)$ 69) $\frac{1}{5}a^{-3}:\left(\frac{1}{4}a\right)$ 70) $4x^{-2}y^{-5}:\left(2x^2y^{-1}\right)$

71) $3a^{-2}+5a^{-2}$ 72) $3a^{-2}-5a^{-2}$ 73) $0,\overline{3}xy^{-1}-xy^{-1}$ 74) $a^{-1}b^{-1}-2a^{-1}b^{-1}$

75) $3x:\left(-4x^4y\right)$ 76) $1:\left(\frac{2}{3}x\right)$ 77) $(x+2x):\left(6x^{-1}\right)$ 78) $(x+2x)\cdot\left(6x^{-1}\right)$

79) $\left(\frac{2}{5}x^3y^{-4}\right)^{-2}$ 80) $\left(-4ab^{-2}\right)^{-1}$ 81) $\left(\frac{1}{3}x^4y^{-5}\right)^{-3}$ 82) $\left(-10ab^{-3}\right)^{-2}$

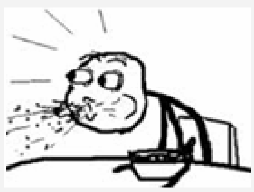
83) **POVERO PIERINO, NON NE AZZECCA UNA …**
VUOI CORREGGERE GLI ERRORI TREMENDI CHE IL COMPAGNO HA COMMESSO?

a) $7xy-xy=7$ b) $5a-4a=1$ c) $\left(3x^2\right)^2=3x^4$ d) $\left(3a^3\right)^3=27a^{27}$

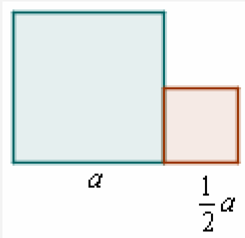
e) $4x+5x=9x^2$ f) $7a\cdot 2a=14a$ g) “ $-x^2$, quando $x=7$, vale 49 ”

h) $7x+5y=12xy$ i) $(-3xy):(-3xy)=0$ l) $5ab^2:(3b)=5ab^2\cdot\frac{1}{3}b$

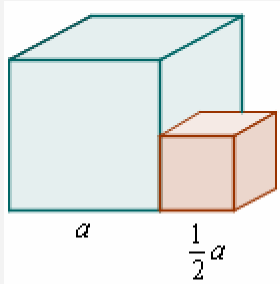
m) “Il grado del monomio $6x^3y^4$ è 12” n) $2x^3y^2:(7x^2y)=2x^3y^2\cdot 7x^{-2}y^{-1}$



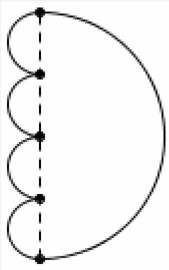
84) La figura qui a destra mostra due quadrati i cui lati misurano rispettivamente a e $\frac{1}{2}a$.
Quanto misura l'area della superficie? E il suo contorno?



85) Due cubi accostati.
Quanto misura il volume del solido? E la sua superficie totale?



86)

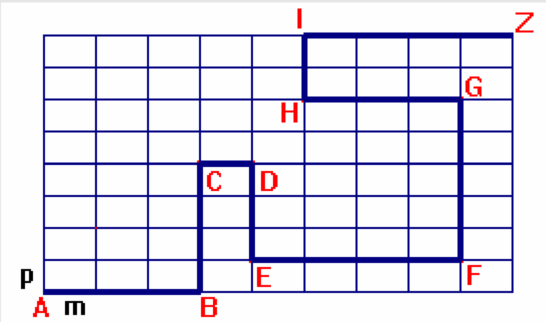


La figura mostra 5 semicirconferenze; indichiamo con R il raggio della maggiore. Allora sia l'area della figura, che la lunghezza del suo contorno, sono espresse da monomi: quali?

87) Supponiamo che un prezzo sia inizialmente di p euro. Se viene prima aumentato, poi dopo un certo tempo diminuito, del 20%, allora il prezzo finale è espresso da un monomio: quale?

88) Supponiamo che una laboriosa schedatura di dati richieda x addetti per essere portata a termine in 10 giorni; quanti addetti ci vorranno per far sì che il lavoro richieda 8 giorni soltanto? La risposta è un monomio.

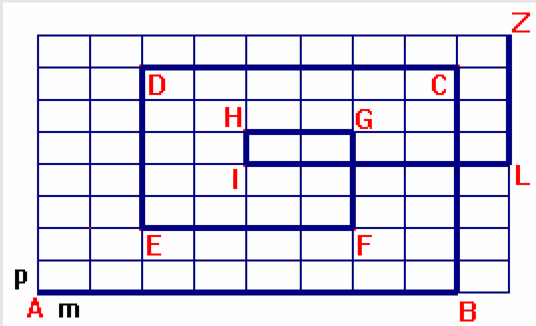
89)



Ogni segmentino orizzontale misura m, ogni segmentino verticale misura p.
Il cammino ABCDEFGHIZ equivale a uno spostamento

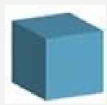
$orizzontale = 3m + m + 4m - 3m + 4m = \boxed{9m}$;

$verticale = 4p - 3p + 5p + 2p = \boxed{8p}$



Calcola ora tu il valore degli spostamenti corrispondenti a quest'altro cammino ABCDEFGHILZ.
… Il risultato era prevedibile, ti pare?

90) Determina la superficie totale di un cubo il cui volume è uguale a $\frac{1}{27}k^{27}$



RISULTATI

1) $12x^2$ 2) $33n^6$ 3) $8b^7$ 4) $6y^5$ 5) $24a^3b^2c$ 6) $48x^3y^7z$ 7) $-6k^4$ 8) $30x^5y^3$ 9) $-12a^7$ 10) $-\frac{1}{20}x^4y^{13}z^3$

11) $\frac{1}{8}a^2b^6c^3$ 12) $-2x^6y$ 13) $3a^6$ 14) $2x^3$ 15) $3a$ 16) $-7b^4$ 17) $-2x^3y^5z^7$ 18) $5x^2$ 19) $-2xy$ 20) a

21) $-a^2$ 22) -1 23) $-\frac{2}{25}a^3b$ 24) $\frac{6}{7}x^2$ 25) $\frac{10}{3}a^2b$ 26) $-\frac{3}{4}x^4$ 27) $-\frac{3}{4}xz^2$ 28) $-\frac{10}{3}x$ 29) -7 30) $-\frac{1}{7}$

31) $\frac{3}{11}a^8$ 32) $-\frac{1}{2}xy$ 33) $\frac{1}{5}y$ 34) $3x^2$ 35) 1 36) -1 37) $-\frac{1}{4}$ 38) -4 39) $8x^6$ 40) $9a^8y^{10}$ 41) $-27a^{12}y^{15}$

42) $-32x^5y^{10}z^{15}w^{20}$ 43) $\frac{8}{125}x^{12}y^3$ 44) x^2 45) $-x^3$ 46) $\frac{1}{16}a^6$ 47) $9x$ 48) $7y^2$ 49) $-ab$ 50) $8x+5y+z$

51) $7a-1$ 52) $2a^2-b^2$ 53) 0 54) $\frac{3}{2}x$ 55) $\frac{3}{4}y$ 56) $-x^2$ 57) $\frac{5}{6}a^2b$ 58) $\frac{5}{2}x$ 59) $-\frac{2}{5}x^3$ 60) $-a$ 61) x^2

62) $-\frac{2}{5}a^2$ 63) $20a^{-9}$ 64) $6a^3$ 65) $\frac{1}{20}a^{-2}$ 66) $8y^{-6}$ 67) $5a^{-3}$ 68) $\frac{3}{2}a^7$ 69) $\frac{4}{5}a^{-4}$ 70) $2x^{-4}y^{-4}$ 71) $8a^{-2}$

72) $-2a^{-2}$ 73) $-\frac{2}{3}xy^{-1}$ 74) $-a^{-1}b^{-1}$ 75) $-\frac{3}{4}x^{-3}y^{-1}$ 76) $\frac{3}{2}x^{-1}$ 77) $\frac{1}{2}x^2$ 78) 18 79) $\frac{25}{4}x^{-6}y^8$

80) $-\frac{1}{4}a^{-1}b^2$ 81) $27x^{-12}y^{15}$ 82) $\frac{1}{100}a^{-2}b^6$ 83) Consultati con i tuoi compagni … 84) $\frac{5}{4}a^2$, $5a$

85) $\frac{9}{8}a^3$, $7a^2$ 86) $\frac{5}{8}\pi R^2$, $2\pi R$ 87) $\frac{96}{100}p = \frac{24}{25}p$ 88) $\frac{5}{4}x$ 89) Stesso risultato di prima! 90) $\frac{2}{3}k^{18}$

5. ESPRESSIONI VARIE CON MONOMI (la freccia, se c'è, è un link verso la correzione)

1) $\left[2\cdot(3x+4x+x)-5x\cdot 3\right]:x$ 2) $\left(x^2-4x-2x\cdot x+x^2\right)^2-(4x)^2$ ⇨ 3) $\left(x^3+2x^3+7x^3\right):(-5x)+3x^2$

4) $4\left(5a^6-7a^6\right)+\left(3a^3\right)^2$ 5) $\left[\left(3x^2-x^2+2x^2\right)\cdot(3x-x+2x)+(2x)^3\right]:(12x)$ 6) $\left(-a^3-3a^3\right):\left(a^2-5a^2\right)$

7) $2\cdot\left[(3x-x-4x)(x+5x-3x)+7x^2\right]\cdot 3x-5x^3$ 8) $\left\{\left[(a+2a)(a-2a)+4a^2\right]\cdot 2a+(-2a)^3+7a^3\right\}^3$

9) $a+\left[3a\cdot(-3ab)-5b\left(-2a^2\right)\right]:(-ab)$ 10) $\left[(3a-a)(3a+a)-(3a)^2\right]^2-2a^4$ 11) $\left[-x\cdot(-2x)-x^2\right]:(-x)$

12) $x^4+\left(-x\cdot x^2+2x^2\cdot x+3x^3-4x^3\right):x-2x^2\left(2x^2-x^2\right)$ 13) $-(abc+2abc)(abc-2abc)^2-2^2\cdot(-abc)^3$

14) $\left[(-3ab)^2+(-2ab)^3:(ab)+2a^2b\cdot b\right]^2-\frac{1}{2}(-2ab)^4$ 15) $\left[\left(y^2+\frac{1}{4}y^2\right)\left(y-\frac{1}{5}y\right)+y^3\right]^2-3y^6$ ⇨

16) $\left[\left(\frac{1}{8}n-\frac{1}{4}n+\frac{1}{2}n\right)\cdot\frac{4}{3}n\right]^2:\left[(-n)^4+n^4+2n^4\right]-\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ ⇨ 17) $\left[\left(\frac{9}{8}y^4-y^4\right):\left(-\frac{1}{2}y\right)^3\right]:y$

18) $\left\{\left[-c^2\cdot(-c)^2+c\cdot(-c)^3-c^4+\left(-2c^2\right)^2\right]:c+(2c)^3\right\}:c-(3c)^2$ ⇨ 19) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x-x\right)\cdot\left(-2x^2\right)^2+x^5$

20) $\left\{\left[-\frac{2}{5}x^2\cdot\left(-\frac{15}{4}x\right)\cdot(-2x)-x^4\right]:\left(-4x^3\right)+\frac{1}{4}x\right\}(-x)+\left(-\frac{3}{2}x\right)^2$ 21) $\left[\left(-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{8}t^4\right):3+\left(\frac{1}{2}t\right)^3\cdot t\right]:3$

22) $\left[\left(\frac{3}{2}pq-\frac{2}{3}pq-pq\right):\left(\frac{1}{3}p-\frac{1}{2}p\right)-3q\right]^2-3q^2$ 23) $\left\{\left[-\frac{1}{2}a\cdot\left(-\frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{3}{4}c\right)-\frac{3}{4}abc\right]:\left(\frac{ab}{2}\right)-4c\right\}:(6c)$

24) $\left(\frac{3}{4}a^2\right)^2+\frac{1}{3}\left(a^4+\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{8}a^4\right)-\left[\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right]^2-2a^2\cdot\left(-\frac{1}{4}a\right)^2$ 25) $\left(\frac{3}{2}k\right)^2-3\left(2k-\frac{3}{2}k\right)\left(k+\frac{1}{2}k\right)$

26) $0,\bar{5}\cdot\left[0,25\left(n^3+n^2\cdot n\right)+0,5\left(n^2\right)^3:n^3\right]\cdot 9n-\left(2n^2\right)^2$ 27) $-x^3+\left(3,456x^2-6,543x^2+0,087x^2\right)\cdot\left(-0,\bar{3}x\right)$

28) $\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x^2\right):\left(\frac{3}{4}x-\frac{x}{4}\right)-x$ 29) $\left[-\frac{4}{3}x^3y\cdot\frac{15}{8}xy^3+3(-xy)^4-\frac{1}{2}x\left(-xy^2\right)^3:y^2\right]:(-xy)^3+2xy$

30) $\frac{1}{12}\left(a^{-2}+2a^{-2}+3a^{-2}+6a^{-2}\right)\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)$ 31) $\left[\left(a^{-1}-2a^{-1}-3a^{-1}\right)\cdot\frac{1}{4}a^2\right]:a+1$

32) $\left[\left(x^{-2}-3x^{-3}+x^{-2}+x^{-3}+2x^{-3}\right)^{-2}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot(-x)^2\right]:(-x)-(-x)^3$ ⇨

33) $\left[\left(-2x^2\right)^{-5}\left(4x^3\right)^2-\frac{3}{2}x^2:x^6+\frac{3}{x^4}\right]^{-2}$ ⇨ 34) $\left[\frac{2}{5}a^{-2}b^{-5}:\left(\frac{1}{4}a^{-5}b\right)\cdot\left(\frac{a^{-1}b^2}{2}\right)^3+\frac{3}{5}\right]:a^2\cdot\left(-\frac{5}{2}a^{-1}\right)^2$

35) $y^2\left\{\left[\left(2x^{-1}y\right)^{-2}+\left(2xy^{-1}\right)^2\right]\cdot 4x^{-2}-\left(-\frac{1}{2}y\right)^{-4}\cdot y^2\right\}$ 36) $\left\{1:\left[\left(x^{-2}\right)^2\cdot\left(x^2\right)^{-2}\right]+(-x)^8\right\}:x^7-x$

37) $\left[\frac{3}{4}a^{-5}b^6c^{-1}\cdot\frac{2}{3}a^{-1}b^{-5}c+\frac{1}{2}\left(a^{-3}\right)^2b\right]:\left(\frac{5}{3}a^{-8}b\right)-\frac{2}{5}(-2a)^2$ 38) $\left[a:\left(2a^4\right)-\frac{3}{2}a^{-5}:a^{-2}\right]^4\cdot a^{13}$

39) $x\cdot\left[\left(0{,}125x^2\right)^{-1}\cdot 0{,}25x^3\right]^{-1}$ 40) $\left[\frac{2}{5}x^{-10}y^{-7}z^{-1}:\left(\frac{3}{10}x^{-8}y^{-8}z\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}x^2y^{-1}z^3\right)-4z\right]:\left[(-yz)^3:\left(-\frac{1}{2}y\right)^3:\left(8z^2\right)\right]$

RISULTATI

1) 1 2) 0 3) x^2 4) a^6 5) $2x^2$ 6) a 7) x^3 8) a^9 9) 0 10) $-a^4$ 11) $-x$ 12) $-x^4$ 13) $a^3b^3c^3$
14) a^4b^4 15) y^6 16) 0 17) -1 18) 0 19) 0 20) x^2 21) 0 22) q^2 23) -1 24) a^4 25) 0 26) n^4
27) 0 28) x 29) xy 30) 1 31) 0 32) 0 33) x^8 34) $5a^{-4}$ 35) 1 36) x 37) $-a^2$ 38) a 39) 1/2 40) -5

POLINOMI

6. DEFINIZIONE DI POLINOMIO, GRADO DI UN POLINOMIO

Si dice "polinomio" la somma indicata di due o più monomi.

Esempi di polinomi sono:

$$5a+4b \qquad \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{6}x-1$$

I monomi che compongono un polinomio vengono chiamati i "termini" del polinomio stesso.

2 termini	binomio
3 termini	trinomio
4 termini	quadrinomio
5 termini	polinomio di 5 termini
…	…

Si dice "GRADO" DI UN POLINOMIO, IL MASSIMO FRA I GRADI DEI SUOI MONOMI (ricorda che il *grado di un monomio* è la *somma dei gradi*, ossia degli esponenti, *delle sue lettere*).
Se tutti i termini di un polinomio hanno lo stesso grado, il polinomio si dice "omogeneo".

$\underbrace{-\frac{1}{5}a^3b^2c}_{3+2+1=6°\ grado}\quad\underbrace{+\frac{4}{7}ab^3c^3}_{1+3+3=7°\ grado}\quad\underbrace{-\frac{2}{3}b^4}_{4°\ grado}$	trinomio di 7° grado
x^2-5x+4	trinomio di 2° grado
$7a-2$	binomio di 1° grado (= lineare)
$a^5+2a^4b+3a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5$	polinomio omogeneo di 6 termini, di 5° grado

7. OPERAZIONI CON POLINOMI

- **SOMMA E DIFFERENZA (SOMMA ALGEBRICA)**

$$(8x+2y-1)-(3x-y+7)+(-5x+3)=8x+2y-1\underbrace{-3x+y-7}_{\substack{\text{"–" davanti}\\ \text{a somma}\\ \text{algebrica}\\ \text{cambia}\\ \text{tutti i segni}}}\ \underbrace{-5x+3}_{\substack{\text{"+" davanti}\\ \text{a somma}\\ \text{algebrica}\\ \text{conferma}\\ \text{tutti i segni}}}=3y-5$$

- **PRODOTTO DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO E VICEVERSA**

Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:

quando si deve moltiplicare una somma per un numero, è possibile, volendo, moltiplicare per quel numero ciascun addendo della somma, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$(9+4+7)\cdot5=9\cdot5+4\cdot5+7\cdot5=45+20+35=100$$

$$3\cdot(1+3+5+7)=3\cdot1+3\cdot3+3\cdot5+3\cdot7=3+9+15+21=48$$

$$\left(\frac{12}{5}+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{10}{3}=\frac{12}{5}\cdot\frac{10}{3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{3}=8+\frac{25}{3}=\frac{49}{3}$$

$$3\cdot(-2+7-1)=3\cdot(-2)+3\cdot(+7)+3\cdot(-1)=-6+21-3=12$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(-3-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot(-3)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{4}=\frac{30+2-5}{20}=\frac{27}{20}$$

$$a\cdot(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae$$

$$\left(x^2+3x-5\right)\cdot x^3=x^5+3x^4-5x^3$$

$$2ab\left(a+b\right)=2a^2b+2ab^2$$

$$\left(4a^2x-\frac{1}{3}ax^2+\frac{15}{2}\right)\cdot\left(-\frac{12}{5}ax^2\right)=-\frac{48}{5}a^3x^3+\frac{4}{5}a^2x^4-18ax^2$$

PRODOTTO DI DUE POLINOMI

Proprietà distributiva generalizzata:

quando si deve moltiplicare una somma per un'altra somma, è possibile, volendo, moltiplicare ciascun addendo della prima somma per ciascun addendo della seconda, poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}+3\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot 3=$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{2}+\frac{4}{15}+1=\frac{12+45+8+30}{30}=\frac{95}{30}=\frac{19}{6}$$

$$(-2-3+4)\cdot(-5+3)=$$
$$=(-2)(-5)+(-2)(+3)+(-3)(-5)+(-3)(+3)+(+4)(-5)+(+4)(+3)=$$
$$=+10-6+15-9-20+12=+2$$

$$(a+b)\cdot(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$$

$$(x+y)(x-y+1)=x^2\cancel{-xy}+x\cancel{+xy}-y^2+y=$$
$$=x^2-y^2+x+y$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2\right)\cdot(2ab+1)=a^3b+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}ab^3+\frac{1}{3}b^2$$

Il procedimento, chiamato in Inglese **FOIL** (vedi finestrella qui a fianco), è ben descritto, ad esempio, in QUESTO ⇨ sito.

In Inglese l'applicazione della "distributiva generalizzata" viene di norma denominata con la sigla **FOIL** (si pronuncia come si scrive).
FOIL = First, Outside, Inside, Last.

First: multiply the first term in each set of parenthesis
Outside: multiply the two terms on the outside
Inside: multiply both of the inside terms
Last: multiply the last term in each set of parenthesis
(da www.freemathhelp.com)

PRODOTTO DI UN MONOMIO PER DUE POLINOMI

$$\boxed{5a^2(2a+b)(3a-b)}=\begin{cases}(10a^3+5a^2b)(3a-b)=30a^4-10a^3b+15a^3b-5a^2b^2=30a^4+5a^3b-5a^2b^2\\(15a^3-5a^2b)(2a+b)=30a^4+15a^3b-10a^3b-5a^2b^2=30a^4+5a^3b-5a^2b^2\\\boxed{5a^2(6a^2-2ab+3ab-b^2)=5a^2(6a^2+ab-b^2)=30a^4+5a^3b-5a^2b^2}\end{cases}$$

♥ Delle tre possibili modalità, è **DECISAMENTE PREFERIBILE L'ULTIMA (moltiplicare innanzitutto i due polinomi, lasciando il monomio indicato)** perché conduce a situazioni di calcolo più comode

PRODOTTO DI TRE POLINOMI

$$\boxed{(2a-1)(3a-1)(a+1)}=\begin{cases}(2a-1)(3a^2+3a-a-1)=(2a-1)(3a^2+2a-1)=6a^3+4a^2-2a-3a^2-2a+1=\\\qquad=6a^3+a^2-4a+1\\(3a-1)(2a^2+2a-a-1)=(3a-1)(2a^2+a-1)=ecc.\\(a+1)(6a^2-2a-3a+1)=(a+1)(6a^2-5a+1)=ecc.\end{cases}$$

PRODOTTO DI DUE POLINOMI, PRECEDUTO DAL SEGNO –

Osserviamo **innanzitutto che un segno "–" davanti ad un prodotto equivale ad un fattore -1,** perché

- "–" davanti ad un prodotto indicherebbe di eseguire il prodotto e poi cambiare di segno il risultato
- ma allora, evidentemente, sostituendo un fattore -1 al posto del "–" l'effetto sarà il medesimo

$$\boxed{-(a+2)(a-b-1)}=\begin{cases}\boxed{-(a^2-ab-a+2a-2b-2)}=-(a^2-ab+a-2b-2)=-a^2+ab-a+2b+2\\(-a-2)(a-b-1)=-a^2+ab+a-2a+2b+2=-a^2+ab-a+2b+2\\(a+2)(-a+b+1)=-a^2+ab+a-2a+2b+2=-a^2+ab-a+2b+2\end{cases}$$

♥ Delle tre possibili modalità, **è DECISAMENTE PREFERIBILE LA PRIMA (moltiplicare innanzitutto i due polinomi, lasciando il segno "–" indicato)** perché conduce a situazioni di calcolo più comode.

❑ POTENZA DI UN POLINOMIO

- $\boxed{(a+b)^2} = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 \underline{+ab}\ \underline{+ab} + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$

  da cui, per esempio:

  $$\left(5x^3+3x\right)^2 = \left(5x^3\right)^2 + 2\cdot 5x^3\cdot 3x + (3x)^2 = 25x^6 + 30x^4 + 9x^2$$

  $$(x-3)^2 = (x+(-3))^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot(-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

- $\boxed{(a+b)^3} = (a+b)^2\cdot(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)\cdot(a+b) =$

  $= a^3 \underline{+2a^2b}\ \underline{\underline{+ab^2}}\ \underline{+a^2b}\ \underline{\underline{+2ab^2}} + b^3 = \boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

- $\boxed{(a+b)^4} = (a+b)^3\cdot(a+b) = \ldots = \boxed{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$

- …

- $\boxed{(a+b+c)^2} = (a+b+c)\cdot(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 =$

  $= \boxed{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$

- …

Gli esempi fatti mostrano che

per ELEVARE A POTENZA UN POLINOMIO
si deve ricorrere ad un PRODOTTO RIPETUTO,
oppure applicare FORMULE PARTICOLARI.

Di queste formule ci occuperemo in una sezione successiva
(“**PRODOTTI NOTEVOLI**”, ossia “prodotti degni di nota, rilevanti”, a partire da pagina 122).

❑ QUOZIENTE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma:
quando si deve dividere
una somma per un numero,
è possibile, volendo,
dividere per quel numero
ciascun addendo della somma,
poi addizionare
i quozienti parziali così ottenuti.

$$(15+10+35):5 = 15:5 + 10:5 + 35:5 = 3+2+7 = 12$$

$$\frac{15+10+35}{5} = \frac{15}{5} + \frac{10}{5} + \frac{35}{5} = 3+2+7 = 12$$

$$\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+2\right):(-2) = -\frac{3}{4}:(-2) + \left(-\frac{1}{2}\right):(-2) + 2:(-2) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{8}$$

Esempi:

$$\left(-6x^3 + x^2y\right):x^2 = -6x^3:x^2 + x^2y:x^2 = -6x + y$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 + 5ab - 3b^2\right):(-3) = -\frac{1}{6}a^2 - \frac{5}{3}ab + b^2$$

Potrà essere comodo in taluni casi trasformare in moltiplicazione, come nell’esempio che segue:

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + x\right):\left(-\frac{4}{9}x\right) \overset{\text{NOTA}}{=} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + x\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}x^{-1}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{8}x - \frac{9}{4}$$

NOTA
DIVIDERE per una lettera elevata ad esponente equivale a MOLTIPLICARE per quella stessa lettera con ESPONENTE CAMBIATO DI SEGNO!

Gli **ESERCIZI SULLE ESPRESSIONI CON POLINOMI** si trovano alle **pagine 118 e 119**

8. ESPRESSIONI CON ESPONENTI LETTERALI

Ecco una piccola **rassegna di esempi svolti**.

$a^{3k+1}\cdot a^{2k+3}=a^{(3k+1)+(2k+3)}=a^{3k+1+2k+3}=a^{5k+4}$ (propr. add. degli esp.)

$a^{3k+1}:a^{2k+3}\overset{\textbf{NOTA 1}}{=}a^{(3k+1)-(2k+3)}=a^{3k+1-2k-3}=a^{k-2}$ (propr. sottr. degli esp.)

$\left(a^{3k+1}\right)^{2k+3}=a^{(3k+1)(2k+3)}=a^{6k^2+9k+2k+3}=a^{6k^2+11k+3}$ (propr. molt. degli esp.)

$\frac{1}{2}t^{3k}\cdot\frac{1}{5}t^{k}=\frac{1}{10}t^{3k+k}=\frac{1}{10}t^{4k}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}t^{3k}:\left(\frac{1}{5}t^{k}\right)=\frac{1}{2}t^{3k}\cdot 5t^{-k}=\frac{5}{2}t^{2k}$

$\left(a^{n+2}+a^{n}\right)\cdot a^{3}=a^{n+5}+a^{n+3}$ $\qquad$ $\left(a^{n+2}+a^{n}\right):a^{3}=a^{n-1}+a^{n-3}$

$a^x\cdot a^x=a^{2x}$	$a^x:a^x=1$	$\left(a^x\right)^x\overset{\textbf{NOTA 2}}{=}a^{x^2}$	$a^x+a^x=2a^x$
$a^x\cdot a^2=a^{x+2}$	$a^x:a^2=a^{x-2}$	$\left(a^x\right)^2=a^{2x}$	$a^x+a^2=\text{STOP}$ (non sono monomi simili)
$a^x\cdot a=a^{x+1}$	$a^x:a=a^{x-1}$		
$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$	$a^x:a^y=a^{x-y}$	$\left(a^x\right)^y=a^{xy}$	$a^x+a^y=\text{STOP}$
$a^x\cdot a^{x-3}=a^{2x-3}$	$a^x:a^{x-3}=a^3$	$\left(a^x\right)^{x-3}=a^{x^2-3x}$	$a^x+a^{x-3}=\text{STOP}$

$a^{x+y}\cdot a^{x-y}=a^{x+y+x-y}=a^{2x}$ $\qquad$ $a^{x+y}:a^{x-y}=a^{x+y-x+y}=a^{2y}$

$\left(a^{x+y}\right)^{x-y}=a^{(x+y)(x-y)}=a^{x^2\cancel{-xy}\cancel{+xy}-y^2}=a^{x^2-y^2}$

$\left(x^n+2\right)\left(x^n-3\right)=x^{2n}-3x^n+2x^n-6=x^{2n}-x^n-6$

$\left(a^b\right)^3:\left(a^{b-c}\right)^2=a^{3b}:a^{2b-2c}=a^{3b-2b+2c}=a^{b+2c}$ $\qquad$ $a^k\left(2a^k+3a\right)=2a^{2k}+3a^{k+1}$

NOTA 1 - Oppure:
$a^{3k+1}:a^{2k+3}=$
$=a^{3k+1}\cdot a^{-(2k+3)}=$
$=a^{3k+1}\cdot a^{-2k-3}=$
$=a^{3k+1-2k-3}=a^{k-2}$
DIVIDERE per una lettera elevata ad esponente è come MOLTIPLICARE per quella stessa lettera con ESPONENTE CAMBIATO DI SEGNO!

♥ **NOTA 2**
☹ *Professore, non riesco a convincermi del fatto che* $(a^x)^x=a^{x^2}$ … *Mi confondo, e sono portato a scrivere che il risultato è invece* a^{2x} …
☺ Pierino, **quando hai qualche dubbio, prova a dare un valore numerico alla lettera che compare a esponente!**
Ad es., con $x=3$ avresti $(a^x)^x=(a^3)^3$. Ora, il risultato è a^9, che va d'accordo con a^{x^2} e NON con a^{2x} !!!

ESERCIZI

1) $6x^{n-1}\cdot 3x^{n-2}$ **2)** $6x^{n-1}:\left(3x^{n-2}\right)$ **3)** $\left(x^{n-1}\right)^{n-2}$ **4)** $\frac{2}{3}a^{y+2}\cdot\frac{3}{4}a^{2y}\cdot\frac{4}{5}a^2$ **5)** $2a^x\cdot 3a$

6) $2a^x:(3a)$ **7)** $\left(3x^m\right)^2$ **8)** $\left(3x^m\right)^n$ **9)** $\frac{1}{2}b^n\left(\frac{1}{4}b^{2n}-\frac{1}{3}b^n+2\right)$ **10)** $\left(a^x+2a^y\right)\left(3a^x-4a\right)$

11) $\left(x^p+1\right)\left(x^p+2\right)\left(x^p+3\right)$ **12)** $\left[a\left(a^p+a^q\right)+a^{p+1}\right]:a^2$ **13)** $a^x\cdot a^{-x}$ **14)** $a^x:a^{-x}$ **15)** $\left(a^x\right)^{-x}$

16) $\left[x^{2k+3}:\left(3x^{k-1}\right)\right]^2$ **17)** $\left(a^b\right)^b:a$ **18)** $3x^k+x^{-k}-2\left(x^k+x^{-k}\right)$ **19)** $\left(a+b^m\right)\left(a+b^n\right)$

20) $\left(a^x-3\right)\left(a^x+4\right)-\left(a^x+3\right)\left(a^x-4\right)$ **21)** $\left(a^x\right)^y\cdot a^x$ **22)** $a^{x-y+2}\cdot a^{2x+y-1}$ **23)** $a^{x-y+2}:a^{2x+y-1}$

24) $\left(a^y-1\right)\left(a^y-2\right)+2\left(a^y-3\right)\left(a^y+1\right)$ **25)** $2a:\left(-\frac{3}{4}a^{n-2}\right)^{-3}$ **26)** $3h^{2p+1}\cdot 4h^{p-2}$ **27)** $3h^{2p+1}:\left(4h^{p-2}\right)$

28) $\dfrac{4h^{p-2}}{3h^{2p+1}}$ **29)** $2a^{x+1}+\left(a^x-a\right)\left(a^x-1\right)-\left[\left(a^x\right)^2+a-a^{2x}:a^x\right]$ **30)** $\left(3c^k\right)^2:\left(c^{2+h}\right)^k-\left(\frac{1}{9}c^{hk}\right)^{-1}$

RISULTATI

1) $18x^{2n-3}$ **2)** $2x$ **3)** x^{n^2-3n+2} **4)** $\frac{2}{5}a^{3y+4}$ **5)** $6a^{x+1}$ **6)** $\frac{2}{3}a^{x-1}$ **7)** $9x^{2m}$ **8)** $3^n x^{mn}$ **9)** $\frac{1}{8}b^{3n}-\frac{1}{6}b^{2n}+b^n$

10) $3a^{2x}-4a^{x+1}+6a^{x+y}-8a^{y+1}$ **11)** $x^{3p}+6x^{2p}+11x^p+6$ **12)** $2a^{p-1}+a^{q-1}$ **13)** 1 **14)** a^{2x} **15)** a^{-x^2}

16) $\frac{1}{9}x^{2k+8}$ **17)** a^{b^2-1} **18)** x^k-x^{-k} **19)** $a^2+ab^n+ab^m+b^{m+n}$ **20)** $2a^x$ **21)** a^{xy+x} **22)** a^{3x+1}

23) $a^{-x-2y+3}$ **24)** $3a^{2y}-7a^y-4$ **25)** $-\frac{27}{32}a^{3n-5}$ **26)** $12h^{3p-1}$ **27)** $\frac{3}{4}h^{p+3}$ **28)** $\frac{4}{3}h^{-p-3}$ **29)** a^{x+1} **30)** 0

9. IL QUOZIENTE DI DUE POLINOMI

A) PREMESSA: LA "DIVISIONE INTERA"

La divisione di due polinomi richiama molto la divisione di due interi,
come la interpreterebbe un bambino delle prime classi elementari.

– "Pierino, quanto fa $23:5$"?
– "Fa **4 col resto di 3**, signora maestra!
  Infatti il 5 nel 23 ci sta 4 volte; $4\cdot 5$ però dà solo 20, quindi mi rimane un resto di 3".

E' pur vero che se la stessa operazione 23:5 gli venisse proposta qualche anno più tardi, nelle scuole medie, Pierino probabilmente non risponderebbe più come prima, ma scriverebbe invece:

$23:5=\dfrac{23}{5}$ oppure $23:5=4,6$.

Ma è anche vero che *non sempre*, quando si imposta una divisione fra due interi,
interessa il risultato "esatto":
a volte interessa proprio determinare un quoziente intero, accompagnato da un resto.

Esempi:

a) *Si divide un percorso podistico di 10 km in 8 tappe intermedie esattamente uguali.*
   Qual è la lunghezza di ciascuna tappa?
   Risposta: $10:8=1,25$ km (1 km e 250 metri).

b) *Sono a disposizione 6 torte alla crema, e i partecipanti alla festa sono 20.*
   Che parte di torta tocca a ciascuno?
   Risposta: $6:20=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$. Perciò a ciascuno toccheranno 3/10 di torta, ossia 3 fette da 1/10 di torta.

c) *Sono arrivati in città 63 bambini di un paese povero, che saranno ospiti per una vacanza.*
   29 famiglie sono disposte ad accoglierli. Quanti bambini andranno presso ciascuna famiglia?
   Questa volta, poiché tagliare a fette i bambini è decisamente poco gentile,
   NON avrebbe alcun senso fare 63:29 = 63/29 o 63:29 = 2,… : si farà invece
   63:29 = 2 col resto di 5.
   2 bambini per famiglia, dunque; poi ci sono altri 5 bambini, cui provvederemo in qualche modo;
   magari, 5 fra le famiglie potranno accettare un bambino in più,
   oppure vorrà dire che quei 5 di resto dormiranno in parrocchia.

In matematica, la "DIVISIONE INTERA"
(così viene infatti chiamata la divisione fra due interi, quando non si accetta
un risultato frazionario o decimale, ma si vuole invece un quoziente intero ed un resto)
è definita con precisione nel modo seguente.

Se a, b sono due numeri naturali (con b diverso da 0),
e il simbolo ":" viene utilizzato per indicare DIVISIONE INTERA, allora

$$\mathbf{a:b=c} \text{ quando } \mathbf{c\cdot b+r=a,}\ \boxed{\textbf{con } \mathbf{r<b}} \quad (\mathbf{a,b,c,r}\in\mathbb{N},\ \mathbf{b\neq 0})$$

Notare l'IMPORTANTISSIMA condizione $r<b$:
♥ IL RESTO DEV'ESSERE SEMPRE MINORE DEL DIVISORE.

Ad esempio, è giusto scrivere che $\mathbf{23:5=4}$ **col resto di 3** perché $\mathbf{4\cdot 5+3=23}$, ed è $\mathbf{3<5}$.

Nei linguaggi di programmazione utilizzati in Informatica,
solitamente **l'operazione di divisione "esatta" viene indicata con uno "slash" (** / **)**
mentre si utilizzano **due "operatori" specifici**, **DIV** e **MOD**, **per indicare rispettivamente**

- il **QUOZIENTE INTERO** (**DIV**)
- e il **RESTO** (**MOD**)

della DIVISIONE INTERA.

Esempi:
$23 \text{ DIV } 5=4;\quad 92 \text{ DIV } 10=9;\quad 33 \text{ DIV } 3=11;\quad 5 \text{ DIV } 7=0;$
$23 \text{ MOD } 5=3;\quad 92 \text{ MOD } 10=2;\quad 33 \text{ MOD } 3=0;\quad 5 \text{ MOD } 7=5.$

B) COME E' DEFINITA E COME SI EFFETTUA LA DIVISIONE FRA DUE POLINOMI

E veniamo ora alla **divisione fra due polinomi**.
Siano A, B due polinomi, contenenti entrambi la stessa lettera,
diciamo per fissare le idee x, ma potrebbe essere una lettera qualsiasi.
Per evidenziare questo fatto, ossia che i polinomi dipendono entrambi da x,
li indicheremo, più precisamente, coi simboli: $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$.

A(x) si legge: "A di x" e si interpreta:
"polinomio A, che dipende dalla lettera x". Idem per B(x).

Ciò premesso:

Dati due polinomi $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ (NOTA 1)
la divisione $\mathrm{A}(x):\mathrm{B}(x)$ è quell'operazione mediante la quale
si determina un terzo polinomio $\mathrm{Q}(x)$,
detto "polinomio quoziente", o semplicemente "quoziente",
e simultaneamente un quarto polinomio $\mathrm{R}(x)$, detto "resto", tali che

I) si abbia $\mathrm{A}(x)=\mathrm{Q}(x)\cdot\mathrm{B}(x)+\mathrm{R}(x)$

II) il grado di $\mathrm{R}(x)$ sia minore del grado di $\mathrm{B}(x)$

NOTA 1
Qui per precisione occorrerebbe aggiungere che in questo contesto si deve escludere il "caso limite" in cui il polinomio B(x) si riduca alla costante 0

Si può dimostrare che:

♪ in una divisione fra due polinomi,
così come è stata definita,
quoziente e resto esistono sempre
e sono determinati in modo unico;

♫ **l'operazione si può svolgere**
tramite un *algoritmo*
(= procedimento; tuttavia, clicca su questa freccia ⇨ oppure consulta il Volume 2 per una definizione più accurata dell'importante termine "**algoritmo**")
molto simile all'ordinario metodo
per la divisione fra due numeri,
e **che illustriamo mediante**
l'esempio qui a fianco.

a. *Divido il 1° termine del dividendo $6x^4$*
per il 1° termine del divisore $2x^2$
ottenendo il monomio $3x^2$,
che sarà il primo termine del quoziente.

b. *Moltiplico $3x^2$*
per il divisore $2x^2-x+3$,
CAMBIO I SEGNI
DEI TERMINI OTTENUTI
e metto in colonna.

c. *Addiziono algebricamente* (**NOTA 3**),
ottenendo un "resto parziale".

d. *Ripeto il procedimento con*
il 1° termine del resto parziale,
ossia con $-2x^3$ ...

e. *Mi fermerò quando il grado*
del resto parziale diventerà
minore del grado del divisore.
Allora QUELLO sarà il resto definitivo

$$\underbrace{(6x^4-5x^3+12x^2+2)}_{\mathrm{A}(x)}\ :\ \underbrace{(2x^2-x+3)}_{\mathrm{B}(x)}$$

(**NOTA 2**)
spazio!
↓

$$\begin{array}{cccccl|l}
6x^4 & -5x^3 & +12x^2 & & +2 & & 2x^2-x+3 \\
\cline{7-7}
-6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & & \underbrace{3x^2-x+1}_{\mathrm{Q}(x)} \\
\cline{1-5}
/ & -2x^3 & +3x^2 & & +2 & \rightarrow \textit{resto parziale} & \\
 & +2x^3 & -x^2 & +3x & & & \\
\cline{2-5}
 & / & 2x^2 & +3x & +2 & \rightarrow \textit{resto parziale} & \\
 & & -2x^2 & +x & -3 & & \\
\cline{3-5}
 & & / & \underbrace{4x \quad -1}_{\mathrm{R}(x)} & & \rightarrow \textit{resto definitivo} &
\end{array}$$

Il grado del resto parziale è diventato minore del grado del divisore: perciò $4x-1$ è il resto definitivo

$\mathrm{Q}(x)=3x^2-x+1;$
$\mathrm{R}(x)=4x-1$

Prova:

$$\boxed{\mathrm{Q}(x)\cdot\mathrm{B}(x)+\mathrm{R}(x)}=$$
$$=\left(3x^2-x+1\right)\cdot\left(2x^2-x+3\right)+\left(4x-1\right)=$$
$$=6x^4-3x^3+9x^2-2x^3+x^2\cancel{-3x}+2x^2\cancel{-x}+3\cancel{+4x}-1=$$
$$=6x^4-5x^3+12x^2+2=\boxed{\mathrm{A}(x)}\quad \textit{OK!!!}$$

NOTA 2 - Poiché il POLINOMIO DIVIDENDO è "INCOMPLETO" (manca del termine di 1° grado),
♥ nello schema si deve lasciare uno SPAZIO VUOTO fra il termine di grado 2 e quello di grado 0, per poter eventualmente "ospitare" una colonna di termini di grado 1, che in effetti in questo esercizio poi si presenterà.

NOTA 3 - Quando moltiplico, *poi cambio i segni, poi sommo*, potrei anche, in alternativa, moltiplicare, *lasciare i segni inalterati e sottrarre.* Ma evidentemente cambiare i segni e poi sommare algebricamente è più facile.

Gli **ESERCIZI** sulla divisione di polinomi
si trovano a **pagina 120**.

C) IL TEOREMA DEL RESTO E LA “REGOLA DI RUFFINI”

Supponiamo di avere una divisione fra due polinomi (aventi, è ovvio, la stessa variabile, diciamo x) nella quale il polinomio divisore sia un binomio della forma $(x-k)$, essendo k un numero fissato.

Per fare un esempio, nella divisione $(2x^3-5x^2-x+6):(x-4)$
il divisore è appunto della forma $(x-k)$*; in questo caso, ovviamente,* $k=4$.

Se dunque si ha una divisione di questo tipo, allora …

I) … si può determinare il resto della divisione anche senza effettuare la divisione stessa, mediante il

> **♥ TEOREMA DEL RESTO:**
> **“Il resto della divisione $P(x):(x-k)$ è uguale a $P(k)$, cioè al numero che si ottiene sostituendo il numero k al posto di x nel polinomio dividendo, e poi svolgendo i calcoli”**

> **OSSERVAZIONE**
> Quando il **divisore** è un **binomio di 1° grado** come $(x-k)$, allora il **resto**, essendo di **grado inferiore rispetto al divisore**, è obbligato ad essere di **grado zero**, quindi a non contenere più la variabile, riducendosi ad una **costante numerica**.

Ad esempio, considerando la divisione $(2x^3-5x^2-x+6):(x-4)$
posso subito dire che il resto sarà $P(4)=2\cdot4^3-5\cdot4^2-4+6=128-80-4+6=50$

II) … e in più la divisione si può eseguire, in alternativa al solito metodo di pag. 115 (il quale continua, volendo, a essere pienamente valido), tramite un algoritmo più veloce chiamato REGOLA DI RUFFINI e illustrato qui di seguito, sempre sull’esempio di prima:

$$\left(2x^3-5x^2-x+6\right):\left(x-4\right)\ \rightarrow\ \begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ 4 & & 8 & 12 & 44 \\ \hline & 2 & 3 & 11 & 50 \end{array}\quad \text{DA CUI}\ \ Q(x)=2x^2+3x+11;\ \ R=50$$

Spieghiamo lo schema.

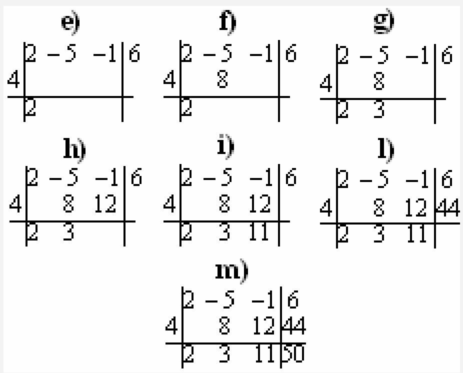
a) **Sulla prima riga in alto, si scrivono i coefficienti del polinomio dividendo**;
b) si traccia una linea verticale davanti al 1° coefficiente, ed un’altra davanti all’ultimo coefficiente;
c) si traccia, sotto la riga dei coefficienti ma un poco distanziata, una linea orizzontale;
d) **nell’angolino a sinistra in alto, si scrive il “ k ” (che nel nostro esempio vale 4)**

Così facendo si ottiene $\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ 4 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$ … e a questo punto si incomincia a “lavorare”:

sulla riga più in basso, il calcolo fornirà i coefficienti del polinomio quoziente, seguiti (nell’angolo in basso a destra) dal resto della divisione.

Ma come avviene questo calcolo? Semplice:

e) si “**abbassa**” il 1° coefficiente, che è 2
f) si **moltiplica** $2\cdot4$ e si scrive il risultato, 8, sotto al 2° coeff.
g) si **somma** algebricamente, in colonna: $-5+8=3$
h) si **moltiplica** $3\cdot4$ e si scrive il risultato, 12, sotto al 3° coeff.
i) si **somma** algebricamente, in colonna: $-1+12=11$
l) si **moltiplica** $11\cdot4$ scrivendo il risultato, 44, sotto al 4° coeff.
m) si **somma** algebricamente, in colonna: $6+44=50$



Così il procedimento è terminato. Ora:

♪ **il polinomio quoziente ha grado inferiore di 1 unità rispetto al polinomio dividendo** (basti pensare che se si svolgesse la divisione con il “vecchio” procedimento, il primo calcolo sarebbe $2x^3:x=2x^2$) quindi, essendo i suoi coefficienti $2\ \ 3\ \ 11$, si avrà $Q(x)=2x^2+3x+11$

♫ **il resto, come si diceva, compare nella parte bassa dell’angolino di destra** ed è, come d’altronde si era già previsto tramite il Teorema del Resto, $R=50$.

Controlla tu stesso che effettuando la divisione col “vecchio” algoritmo, si otterrebbero lo stesso quoziente e lo stesso resto.

- Vediamo ora quest'altro esempio, interessante sotto diversi aspetti.

$$(a^4-4a^2-3a-7):(a+2)$$

C'è la lettera a al posto della lettera x, e fin qui niente di speciale;

inoltre, il polinomio dividendo è "incompleto", in quanto manca il termine di 3° grado;
… beh, non importa, faremo conto che il termine di 3° grado abbia coefficiente 0.

Ma soprattutto, si osserva che il divisore è della forma

lettera + un numero

anziché

lettera − un numero

e questa sì che è una novità di rilievo!
Dobbiamo domandarci:
sarà possibile anche in questo caso applicare il Teorema del Resto e la Regola di Ruffini?

La risposta è AFFERMATIVA, per il fatto che

♥ **il binomio $a+2$ si può scrivere come $a-(-2)$**
e quindi anche in questo caso si può ritenere di avere un binomio della forma
$(\textit{variabile}-k)$;
basta pensare che il valore di k sia, questa volta, -2 !!!

$$\boxed{a+2=a-(-2)=a-k\ \ (\textit{con}\ \ k=-2)}$$

Dunque, procediamo.

Calcolo preliminare del resto col Teorema del Resto:

$$\mathrm{R}=\mathrm{P}(k)=\mathrm{P}(-2)=(-2)^4-4(-2)^2-3\cdot(-2)-7=16-16+6-7=-1$$

Determinazione del quoziente tramite la Regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -4 & -3 & -7 \\ -2 & & -2 & 4 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Q}(a)=a^3-2a^2-3; \\ \mathrm{R}=-1 \end{array}$$

Ecco fatto!

- Un ultimo esempio:

$$\left(x^3-1\right):\left(x-1\right)$$

$$\mathrm{R}=\mathrm{P}(1)=1^3-1=0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$Q(x)=x^2+x+1$
$R=0$

Quando si divide un polinomio per un altro polinomio
e si vede che il resto della divisione è zero,
si dice che il primo polinomio è "divisibile" per il secondo.

In matematica, l'aggettivo "divisibile"
è sempre utilizzato col significato di
"divisibile esattamente, cioè con resto 0".

Ma allora possiamo affermare che il Teorema del Resto
ci fornisce, in un contesto di polinomi, un vero e proprio
"**CRITERIO DI DIVISIBILITA'** ":

"**un polinomio $\mathrm{P}(x)$ è divisibile per un binomio della forma $(x-k)$**
se e soltanto se $\mathrm{P}(k)=0$"

E veniamo, per concludere "in bellezza", alla

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL RESTO

Supponiamo di avere la divisione

$$\mathrm{P}(x):(x-k),$$

e indichiamo

- con $\mathrm{Q}(x)$ il quoziente della divisione stessa,
- e con R il resto.

Allora varrà l'**identità** (NOTA)

$$\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)\cdot(x-k)+\mathrm{R}$$

Se adesso noi in questa identità sostituiamo k al posto di x
(= assegniamo a x il valore k) avremo

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{k})=\mathrm{Q}(k)\cdot(k-k)+\mathrm{R}=\mathrm{Q}(k)\cdot 0+\mathrm{R}=0+\mathrm{R}=\mathbf{R}\quad \text{C.V.D.}$$

NOTA
Come sappiamo, per "identità" si intende
un'uguaglianza letterale che è sempre vera,
per qualsiasi valore "ammissibile"
delle lettere in gioco. Ad esempio ,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

è un'identità.
*Generalmente il termine "**identità**"*
*è contrapposto a "**equazione**".*

Gli **ESERCIZI** sul Teorema del Resto e sulla Regola di Ruffini si trovano a **pagina 121**.

10. ESPRESSIONI VARIE CON POLINOMI

Esempi svolti:

A) $\boxed{\left[x(2x+3)-2x(x+1)+4\right](x-2)+2(4-x)} =$

$\left(\cancel{2x^2}\ \underline{+3x}\ \cancel{-2x^2}\ \underline{-2x}+4\right)(x-2)+8-2x=$

$=(x+4)(x-2)+8-2x=$

$=x^2\ \cancel{\underline{-2x}}\ \cancel{\underline{+4x}}\ \cancel{-8}\ \cancel{+8}\ \cancel{\underline{-2x}} = x^2$

SUGGERIMENTI

da amico!

I) La **sottolineatura** delle famigliole di **termini simili** è **preziosa**, e caldamente **consigliata**.

II) **RILEGGI** sempre **attentamente** **dopo ogni passaggio**!

B) $\boxed{\left(a^2-2ab-b^2\right)(2b-a)-2a\left(3a^2+2ab-2b^2\right)-(a-2b)\cdot b^2+(2a)^3} =$

$=\ \cancel{\underline{2a^2b}}\ -a^3\ \cancel{-4ab^2}\ \cancel{\underline{+2a^2b}}\ \cancel{-2b^3}\ \cancel{+ab^2}\ -6a^3\ \cancel{\underline{-4a^2b}}\ \cancel{+4ab^2}\ \cancel{-ab^2}\ \cancel{+2b^3}\ +8a^3 = a^3$

C) $\boxed{\frac{1}{2}\left[x\left(x^2-1\right)-2(x-1)\left(x^2-x-1\right)-(2-x)\left(x^2-2x-1\right)\right]} =$

$=\frac{1}{2}\left[x^3-x-2\left(x^3\underline{-x^2}\ \cancel{-x}\ \underline{-x^2}\ \cancel{+x}\ +1\right)-\left(2x^2-4x-2-x^3+2x^2+x\right)\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[x^3-x-2\left(x^3-2x^2+1\right)-\left(4x^2-3x-2-x^3\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cancel{x^3}\ \underline{\underline{-x}}\ \cancel{-2x^3}\ \cancel{+4x^2}\ \cancel{-2}\ \cancel{-4x^2}\ \underline{\underline{+3x}}\ \cancel{+2}\ \cancel{+x^3}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$

11a. ESERCIZI (ESPRESSIONI CON POLINOMI) (freccia **= link verso la correzione**)

1) $9a-(7a-b-1)-(a+b-5)-6$ ⇨

2) $x^2-\left(-3x^2-5x+2\right)+(2x-4)-7x$

3) $-\left(-b^2+4a^2-ab\right)+a^2+\left(3a^2-ab+b^2\right)$ ⇨

4) $\frac{1}{5}c-\left(-\frac{3}{8}c+5d\right)-\left(\frac{19}{40}c-3d\right)+\left(-\frac{1}{10}c+3d\right)$ ⇨

5) $6xy-\left(x^2-xy-y^2\right)+\left(-5x^2-7xy\right)-\left(+11y^2-6x^2\right)+10y^2$

6) $\frac{1}{3}x^2-\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{3}x+1\right)-\left(-\frac{1}{6}x+\frac{7}{15}x^2-2\right)+\left(\frac{14}{15}x^2+\frac{1}{2}x\right)$

7) $\frac{5}{4}ab^2-\left[\left(\frac{1}{4}ab^2-\frac{7}{3}ab+a\right)-\left(-\frac{4}{3}ab+2a\right)\right]$

8) $3a(2a-5b)-b(3a-4b)-6a(a-3b)-3b^2$ ⇨

9) $-ab\left(a^2+2b^2\right)-\left[a\left(a^2b-b^3\right)-b\left(ab^2+a^3\right)\right]+(ab)^3:(-b)^2$

10) $(3x+y)\cdot 2x-\left\{4x(x-2y)-2\left[x(3x+y)-2x(2x+3y)\right]\right\}$

11) $\left\{-3c\left[-3c(2c-1)-(5c+1)\right]-2c^2(-5+9c)+13c\right\}\cdot\frac{1}{16}$

12) $4(a+2)(a-3)-(2a-1)(2a-5)+29$ ⇨

13) $\left(a^2-3a+2\right)(a+3)-(a-1)(a+2)(a-3)+2a$ ⇨

14) $3(x-2)(x-1)-(2x+3)(x-6)$

15) $(a+b)(3a-b)-5b(-a+b)-3(a-b)(a+2b)$

16) $-x^2+2x(3-x)(1+x)-(1-x)\left(2x^2-x+1\right)$

17) $1+x(3x-2)-(x+1)\left(x^2-x+1\right)+x(x-1)(x-2)$

18) $9a^2b^2+\left[\frac{3}{4}a\left(2a-\frac{1}{6}b\right)-\left(3a-\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)\right]\left(\frac{1}{4}b^2+3ab\right)-\left(\frac{1}{2}b\right)^4$

19) $2(3a-1)(2a+1)-(4a-1)(3a+1)+1$ ⇨ (clicca sulla freccia per utili suggerimenti!)

20) $2(y-1)(2y+1)-(y+1)(y-2)-3y(y-1)$

21) $(x+3)(x+4)-2(x-1)(x-6)-x(21-x)$

22) $2(t-2)(t-5)-(t+2)(2t+10)+7\cdot 4t$

23) $-(x-1)\left(x^2+x+1\right)-x(2-x)(x-4)+6x^2$

24) $4(a+1)(2a+1)-(4a-1)(2a-3)-1$

25) $\left[(a+b)(a-2b)-(a-b)(a+2b)\right]:(-2b)$

26) $28+3(b-2)(4-b)-b(b+18)+4\left(b^2-1\right)$

27) $6(x-y)(x+2y)-(3x+y)(2x-y)-7y(x-3y)$

28) $-\left(2a^2-ax-3x^2\right)(x-3a)+\left(3a^2+2ax-x^2\right)(3x-2a)$

29) $\frac{x^2}{4}-x\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x\right)\left(\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{16}x^4-2x^2\cdot x$

30) $y^3+11y+(y+1)(y+2)(y+3)-2(y-1)(y-2)(y-3)-18(y^2+1)$

31) $0{,}5\cdot\left[2(a-3b)(2a-b)-3(2a+b)(a-3b)-(5b-4a)(a+b)\right]-5b^2$

32) $(3x-1)(2x-1)(x-1)-(6x+1)(x^2-1)-12(1-x)x$ 33) $\frac{1}{8}a^2-2\left(\frac{3}{8}a-b\right)\left(\frac{3}{2}a+4b\right)-8b^2$

34) $(a+10b)\cdot ab+(a+b)(a+3b)(a-5b)-\left[2b^2(a-8b)-9ab^2\right]$

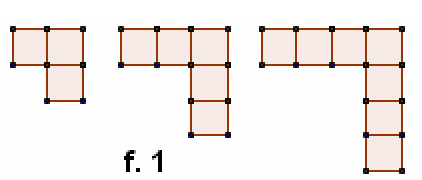
35) $\left(3a^2-a+\frac{1}{6}\right)\left(3a^2+a-\frac{1}{6}\right)-\left(3a^2+\frac{1}{4}\right)\left(3a^2-\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{17}{8}a+1\right)\cdot a$

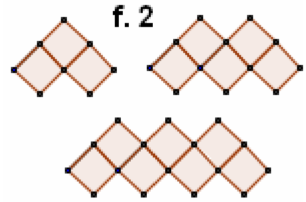
36) $\frac{1}{4}m\left(\frac{5}{4}m-1\right)-\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}m+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}m-1\right)+\frac{1}{9}(m^2+12)$

37) $x(2x-1)(x+1)(x-2)+(1-x)(2+x)(1+x)(1+2x)+x^2(8x+3)-(7x+1)$

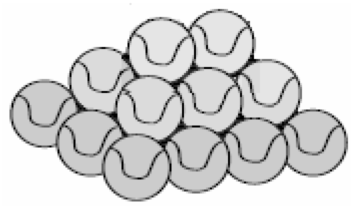
38) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)-(a-1)(a+2)(a-3)(a+4)-16a(3a+4)-(2a)^3$

39) Anna si diverte a utilizzare dei cerini per delimitare quadrati disposti come in fig. 1, mentre Betta li colloca come in figura 2.
Ora, indichiamo con n un generico intero dispari. Volendo realizzare n quadrati,
a) di quanti fiammiferi necessiterebbe ciascuna?
b) E quanti fiammiferi starebbero sul contorno della figura, nei due casi?





40) La figura qui a fianco mostra alcune palline da tennis sistemate su più strati sovrapposti: quello più in alto è formato da 2 palline soltanto, quello appena sotto da 6 palline, quello sotto ancora da 12, ecc.
Se ora si avessero n strati,
quante sarebbero le palline dello strato inferiore?



RISULTATI

1) a 2) $4x^2-6$ 3) $2b^2$ 4) d 5) 0 6) 1 7) ab^2+ab+a 8) b^2 9) 0 10) 0 11) c^2+c 12) $8a$
13) $2a^2$ 14) x^2+24 15) $4ab$ 16) $8x-1$ 17) 0 18) 0 19) a 20) $2y$ 21) 0 22) 0 23) $8x+1$ 24) $26a$
25) a 26) 0 27) $10y^2$ 28) 0 29) $4x^2-x^4$ 30) 0 31) a^2 32) 0 33) $-a^2$ 34) a^3+b^3 35) a 36) 1 37) 1
38) 0 39) L'espressione è la stessa nei due casi: a) $4+(n-1)\cdot 3=3n+1$; b) $2n+2$ 40) $n(n+1)=n^2+n$

VERIFICHE DI IDENTITA'

Cos'è un' "*identità*"?
E' un'**uguaglianza letterale, vera per tutti i valori "ammissibili" delle lettere coinvolte**
(gli eventuali valori "non ammissibili" sono quelli che darebbero luogo a un'operazione non eseguibile:
ad esempio, l'identità $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a(a+1)}$ vale per $a\neq 0,\ a\neq -1$, ossia vale tutti i valori di a TRANNE i valori 0 e -1, non ammissibili perché renderebbero un denominatore uguale a 0).

Esempio svolto - *Verifica che vale la seguente identità*: $\boxed{(x+1)(4x+1)+x^2=(2x+1)(3x+1)-x^2}$

Eseguo i calcoli ai due membri, per constatare che si ottenga il medesimo risultato:
$\underline{4x^2}\ \underline{\underline{+x}}\ \underline{\underline{+4x}}+1\ \underline{+x^2}=\underline{6x^2}\ \underline{\underline{+2x}}\ \underline{\underline{+3x}}+1\ \underline{-x^2}$; $5x^2+5x+1=5x^2+5x+1$, *OK*!!!

CONTRARIAMENTE agli esercizi di pag. 63
(che erano dei puri controlli "a test", su alcuni valori delle lettere), queste verifiche effettuate tramite il calcolo letterale hanno una validità DEL TUTTO GENERALE e ci danno l'AUTENTICA SICUREZZA che si tratti davvero di un'identità.

ESERCIZI - Verifica che valgono le seguenti **identità**:

1) $a(a+2b)+(b-1)(1+b)=(a+b+1)(a+b-1)$ 2) $(a-1)(a^2-1)=(a+1)(a^2-2a+1)$
3) $k+2(k+3)=(k+2)(k+3)-(k+2)\cdot k$ 4) $(a+b)(a-b+1)=(a-b)(a+b+1)+2b$
5) $(x+2)(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)(x+3)=3(x-2)(x-3)+30x$ 6) $(1-x^3)(1+x^3)=-(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

11b. ESERCIZI (DIVISIONE DI POLINOMI)

1) $\left(6x^4+23x^3-8x^2+10x-3\right):\left(x^2+4x-1\right)$

2) $\left(4a^4-a^2+8a-5\right):\left(2a^2-a+3\right)$

3) $\left(2y^3-4y+11\right):\left(y-1\right)$

4) $\left(16x^4-5x^2+9x\right):\left(4x^2-3x+2\right)$

5) $\left(x^6-3x^4+3x^2-1\right):\left(x^3-x^2-x+1\right)$

6) $\left(6b^4+11b^3-12b^2-5b+2\right):\left(b^2+2b-1\right)$

7) $\left(6t^5-8t^4+t^3-5t^2+10t-6\right):\left(2t^3-t-3\right)$

8) $\left(a^6+a^5+a^3+a^2+1\right):\left(a+2\right)$

9) $\left(-3x^4+2x^2+2x-1\right):\left(x-1\right)$

10) $\left(9t^4-16t^2+20t-4\right):\left(3t^2+4t-2\right)$

11) $\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{7}{18}x^2-\frac{11}{24}x+\frac{3}{8}\right):\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\right)$

12) $\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{13}{6}a^3+4a^2-2a+2\right):\left(\frac{1}{2}a^2-2a+3\right)$

13) $\left(4x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{12}\right):\left(2x-\frac{1}{3}\right)$

14) $\left(x^4+x^3-x^2+x+1\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

15) $\left(x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4\right):\left(x^2-xy+y^2\right)$ (NOTA)

16) $\left(9x^4+12x^3y+4x^2y^2-y^4\right):\left(3x^2+2xy-y^2\right)$

17) $\left(x^3-8x^2y+77y^3\right):\left(x-5y\right)$

18) $\left(a^4+a^3b-6a^2b^2+ab^3+3b^4\right):\left(a^2-ab-b^2\right)$

19) $\left(a^5-a^4b-2a^3b^2+2a^2b^3+b^5\right):\left(a^2-ab-b^2\right)$

20) $\left(x^3+y^3\right):\left(x^2-xy+y^2\right)$

21) $\left(\frac{1}{16}x^2-x+\frac{11}{4}\right):\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

22) $\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{4}{3}a^2-\frac{40}{9}a-\frac{8}{9}\right):\left(2a^2-12a-\frac{8}{3}\right)$

23) $\left(3a^4-3b^4\right):\left(4a+4b\right)$

24) $\left(2a+3\right):\left(a+1\right)$

25) $\left(a^2+a+1\right):\left(a+1\right)$

26) $\left(x+1\right):x$ (*)

27) $x:\left(x+1\right)$ (*)

(*) *Negli esercizi 26, 27 il monomio viene pensato come caso particolare di polinomio*

28) In una divisione fra polinomi, il divisore è x^2+1, il quoziente $3x^2-x-2$, il resto $x+3$. E il dividendo?

N O T A
In casi di questo genere, quando si hanno due lettere, i polinomi dividendo e divisore sono, di norma, omogenei.
La lettera che è ordinata secondo le potenze decrescenti viene pensata come la variabile, mentre la seconda lettera è "trattata" come una costante, che va a far parte dei coefficienti.

Quindi, ad esempio, il polinomio $x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4$ è pensato nella variabile x:

$$x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4=P(x), \quad \text{con coefficienti} \quad 1, -3y,\ 2y^2,\ y^3,\ y^4.$$

Volendo considerare come variabile la y, prima di effettuare la divisione occorrerebbe invertire l'ordine dei termini (sia nel dividendo che nel divisore).
E si osserverebbe che cambia anche il polinomio quoziente (a meno che il resto sia 0).

RISULTATI

1) $Q(x)=6x^2-x+2 \quad R(x)=x-1$

2) $Q(a)=2a^2+a-3 \quad R(a)=2a+4$

3) $Q(y)=2y^2+2y-2 \quad R=9$

4) $Q(x)=4x^2+3x-1 \quad R=2$

5) $Q(x)=x^3+x^2-x-1 \quad R=0$

6) $Q(b)=6b^2-b-4 \quad R(b)=2b-2$

7) $Q(t)=3t^2-4t+2 \quad R=0$

8) $Q(a)=a^5-a^4+2a^3-3a^2+7a-14 \quad R=29$

9) $Q(x)=-3x^3-3x^2-x+1 \quad R=0$

10) $Q(t)=3t^2-4t+2 \quad R(t)=4t$

11) $Q(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{2} \quad R=0$

12) $Q(a)=a^2-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3} \quad R(a)=\frac{1}{3}a$

13) $Q(x)=2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \quad R=0$

14) $Q(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{7}{8} \quad R=\frac{23}{16}$

15) $Q(x)=x^2-2xy-y^2 \quad R(x)=2xy^3+2y^4$

16) $Q(x)=3x^2+2xy+y^2 \quad R=0$

17) $Q(x)=x^2-3xy-15y^2 \quad R=2y^3$

18) $Q(a)=a^2+2ab-3b^2 \quad R=0$

19) $Q(a)=a^3-ab^2+b^3 \quad R=2b^5$

20) $Q(x)=x+y \quad R=0$

21) $Q(x)=\frac{1}{8}x-\frac{7}{4} \quad R=1$

22) $Q(a)=\frac{1}{6}a+\frac{1}{3} \quad R=0$

23) $Q(a)=\frac{3}{4}a^3-\frac{3}{4}a^2b+\frac{3}{4}ab^2-\frac{3}{4}b^3 \quad R=0$

24) $Q=2 \quad R=1$

25) $Q(a)=a \quad R=1$

26) $Q=1 \quad R=1$

27) $Q=1 \quad R=-1$

28) Il dividendo è $3x^4-x^3+x^2+1$. Per determinarlo, basta utilizzare la relazione $Q(x)\cdot B(x)+R(x)=A(x)$.

11c. ESERCIZI (TEOREMA DEL RESTO E REGOLA DI RUFFINI)

E' richiesto di:

i) **determinare il resto applicando il Teorema del Resto**
ii) **determinare il quoziente** (e ritrovare, una seconda volta, il resto) **mediante la regola di Ruffini**.

Due esempi svolti:

A) $\left(y^4-5y^2+4\right):\left(y-2\right)$

$R=P(2)=2^4-5\cdot 2^2+4=...=0$

	1	0	-5	0	4
2		2	4	-2	-4
	1	2	-1	-2	0

$Q(y)=y^3+2y^2-y-2 \quad R=0$

B) $\left(8t^4-t^3-\frac{1}{6}\right):\left(t+\frac{1}{2}\right) \qquad R=P\left(-\frac{1}{2}\right)=8\left(-\frac{1}{2}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{6}=...=\frac{11}{24}$

	8	-1	0	0	$-\frac{1}{6}$
$-\frac{1}{2}$		-4	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$
	8	-5	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{11}{24}$

$Q(t)=8t^3-5t^2+\frac{5}{2}t-\frac{5}{4} \quad R=\frac{11}{24}$

1) $\left(3x^3-8x^2-x+13\right):\left(x-2\right)$

2) $\left(x^3-x^2-x+10\right):\left(x+2\right)$

3) $\left(x^4+x^3+x+1\right):\left(x-1\right)$

4) $\left(a^4+3a^3-a^2-5a-6\right):\left(a+3\right)$

5) $\left(x^5+x^3+x+1\right):\left(x-1\right)$

6) $\left(b^3+6b^2+6b\right):\left(b+5\right)$

7) $\left(x^5+x^3+x+1\right):\left(x+1\right)$

8) $\left(2y^3-4y+8\right):\left(y+2\right)$

9) $\left(x^3-x^2+\frac{7}{12}x-\frac{1}{6}\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

10) $\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}\right):\left(z+1\right)$

OCCHIO

agli eventuali
termini mancanti …
… vogliono
coefficiente 0 !!!

11) $\left(\frac{1}{2}w^3-\frac{4}{3}w^2-\frac{3}{4}w+\frac{1}{12}\right):\left(w+\frac{1}{3}\right)$ 12) $\left(\frac{1}{9}x^3-x\right):\left(x-3\right)$ 13) $\left(d^4-\frac{9}{10}d^3+\frac{12}{25}d^2+\frac{27}{5}d+2\right):\left(d+\frac{2}{5}\right)$

14) $\left(3000x^3-10x-2\right):\left(x-0{,}1\right)$ 15) $\left(0{,}75a^4-1{,}125a^3-0{,}25a^2+0{,}125a-0{,}0625\right):\left(a+0{,}5\right)$

16) $\left(x^3+ax^2-2a^2x-a^3\right):\left(x-3a\right)$ (NOTA) 17) $\left(a^3-a^2b-ab^2+b^3\right):\left(a-b\right)$ 18) $\left(x^3-8k^3\right):\left(x-2k\right)$

19) $\left(x^3+ax^2-2a^2x-a^3\right):\left(x+3a\right)$ 20) $\left(a^3-a^2b-ab^2+b^3\right):\left(a+b\right)$ 21) $\left(x^4-s^2x^2+s^4\right):\left(x+s\right)$

N O T A
In casi di questo genere, quando si hanno **due lettere**, i polinomi in gioco sono, di norma, **omogenei**.
La lettera che è ordinata secondo le potenze decrescenti viene pensata come la **variabile**,
mentre la seconda lettera è "trattata" come una **costante**, che va a far parte dei **coefficienti**.
Quindi, ad es., il pol. $x^3+ax^2-2a^2x-a^3$ è pensato nella variabile x, con coeff.: $1, \quad a, \quad -2a^2, \quad -a^3$

22) a) Without doing the division, work out the remainder of the division $P(x)=x^3-6x^2+5$ into $x-2$
b) Calculate the quotient and the remainder of $\left(x^2+5x+6\right):\left(x+3\right)$ (www.personal.psu.edu)

23) Quanto deve valere k se si desidera che il resto della divisione $\left(x^{16}+kx^4+2x+8\right):\left(x+1\right)$ sia 0?

24) La divisione $\left(x^7-1\right):\left(x-1\right)$ ha come resto 0; verificalo, e serviti di questo fatto per esprimere il polinomio x^7-1 come prodotto di due opportuni polinomi.

RISULTATI

1) $Q(x)=3x^2-2x-5 \quad R=3$ 2) $Q(x)=x^2-3x+5 \quad R=0$ 3) $Q(x)=x^3+2x^2+2x+3 \quad R=4$

4) $Q(a)=a^3-a-2 \quad R=0$ 5) $Q(x)=x^4+x^3+2x^2+2x+3 \quad R=4$ 6) $Q(b)=b^2+b+1 \quad R=-5$

7) $Q(x)=x^4-x^3+2x^2-2x+3 \quad R=-2$ 8) $Q(y)=2y^2-4y+4 \quad R=0$

9) $Q(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} \quad R=0$ 10) $Q(z)=\frac{1}{2}z-\frac{5}{6} \quad R=\frac{13}{12}$ 11) $Q(w)=\frac{1}{2}w^2-\frac{3}{2}w-\frac{1}{4} \quad R=\frac{1}{6}$

12) $Q(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x \quad R=0$ 13) $Q(d)=d^3-\frac{13}{10}d^2+d+5 \quad R=0$ 14) $Q(x)=3000x^2+300x+20 \quad R=0$

15) $Q(a)=0{,}75a^3-1{,}5a^2+0{,}5a-0{,}125 \quad R=0$ 16) $Q(x)=x^2+4ax+10a^2 \quad R=29a^3$

17) $Q(a)=a^2-b^2 \quad R=0$ 18) $Q(x)=x^2+2kx+4k^2 \quad R=0$ 19) $Q(x)=x^2-2ax+4a^2 \quad R=-13a^3$

20) $Q(a)=a^2-2ab+b^2 \quad R=0$ 21) $Q(x)=x^3-sx^2 \quad R=s^4$ 22) a) -11 b) $Q(x)=x+2 \quad R=0$

23) $R=P(k)=P(-1)=k+7$, perciò $R=0$ con $k=-7$ 24) $x^7-1=\left(x-1\right)\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$

PRODOTTI NOTEVOLI

12. QUADRATO DI UN BINOMIO

$\boxed{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2 \underline{+ab} \underline{+ab} + b^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$

Abbiamo così ricavato la formula

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

che si può esprimere a parole nel modo seguente.

Il **quadrato di un binomio** si esegue facendo
- il **quadrato del primo** termine;
- 2 volte il primo termine $\times$ il secondo termine (= il **doppio prodotto del primo per il secondo**)
- il **quadrato del secondo** termine

Esempi di applicazione della formula:

a) $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2+30xy+25y^2$

b) $\underbrace{(a-6x)^2}_{(a+(-6x))^2} = a^2+2\cdot a\cdot(-6x)+(-6x)^2 = a^2-12ax+36x^2$

♥ Ricordare che la formula va applicata mettendo (ovviamente)
al posto di "*a*" il primo termine del binomio dato, e al posto di "*b*" il secondo termine, e
tenendo soprattutto presente che **ciascun termine deve comprendere anche il segno che lo precede!**

♫ **I passaggi intermedi si possono fare a mente;** un **buon consiglio** è tuttavia quello di **indicare il doppio prodotto, prima di svolgerlo, nei casi in cui questo non è semplicissimo**.

c) $\left(-\frac{1}{4}x+3y\right)^2 = \left(\underbrace{\boxed{-\frac{1}{4}x}}_{1^\circ\ termine}\ \underbrace{\boxed{+3y}}_{2^\circ\ termine}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}x\right)^2 + \cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{4}_2}x\right)\cdot 3y+(3y)^2 = \frac{1}{16}x^2-\frac{3}{2}xy+9y^2$

d) $\left(\boxed{-t}\boxed{-3}\right)^2 = (-t)^2+2\cdot(-t)\cdot(-3)+(-3)^2 = t^2+6t+9$

e) $(3x^2+7x)^2 = 9x^4+42x^3+49x^2$

f) $(2a-b)^2 = 4a^2-4ab+b^2$
- **Verifica** per $a=5,\ b=3$

  $1^\circ\ membro = (2a-b)^2 = (2\cdot 5-3)^2 = (10-3)^2 = 7^2 = \boxed{49}$

  $2^\circ\ membro = 4a^2-4ab+b^2 = 4\cdot 5^2-4\cdot 5\cdot 3+3^2 = 4\cdot 25-60+9 = 100-60+9 = \boxed{49}$
- **Verifica** svolgendo il calcolo letterale in un altro modo:

  $(2a-b)^2 = (2a-b)(2a-b) = 4a^2-2ab-2ab+b^2 = 4a^2-4ab+b^2$

g) $\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{5}{6}x^2y\right)^2 = \frac{9}{16}x^6+\cancel{2}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{4}x^3\right)\cdot\frac{5}{\cancel{6}_{\cancel{2}}}x^2y+\frac{25}{36}x^4y^2 = \frac{9}{16}x^6-\frac{5}{4}x^5y+\frac{25}{36}x^4y^2$

h) $(-5-x^2)^2 = 25+10x^2+x^4$

i) Un esempio di **espressione**:

$(x-1)(x-6)+3(x-1)^2-(2x-3)^2 = x^2\underline{-6x}\ \underline{-x}+6+3(x^2-2x+1)-(4x^2-12x+9) =$

$= \cancel{x^2}\ \underline{-7x}\ \cancel{+6}\ \cancel{+3x^2}\ \underline{-6x}\ \cancel{+3}\ \cancel{-4x^2}\ \underline{+12x}\ \cancel{-9} = -x$

- Lo **schema qui a fianco** rappresenta le varie **combinazioni di segno nel binomio di partenza e nel risultato**

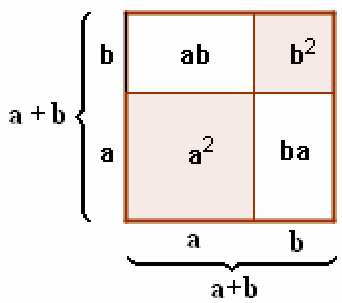
$$\begin{array}{llllll} (+ & +)^2 & = & + & + & + \\ (+ & -)^2 & = & + & - & + \\ (- & +)^2 & = & + & - & + \\ (- & -)^2 & = & + & + & + \end{array}$$

- **I seguenti due esempi sono puramente numerici (= senza lettere)**, e mostrano come il quadrato di un binomio possa, in taluni casi, costituire una tecnica efficace di **calcolo mentale**. Tutti i passaggi intermedi, infatti, possono essere svolti a mente, senza scrivere nulla!

  l) $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 3 + 3^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$

  m) $29^2 = (30-1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

- La **figura qui a destra** costituisce una **visualizzazione-giustificazione geometrica della formula per il quadrato di un binomio.**
  Essa mostra un **quadrato il cui lato misura $\mathbf{a+b}$**. **L'area** di questo **quadrato** può essere calcolata in **2 modi diversi**.
  I) Pensando direttamente all'area totale si ottiene $S = (a+b)^2$
  II) … e sommando invece le 4 aree parziali si ha $S = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  Poiché però *i due calcoli devono portare al medesimo risultato*, ecco che salta fuori la nostra formula.



Il limite di questa giustificazione sta nel fatto che si riferisce solo ai casi in cui a, b assumano valori non negativi.

- Gli **esempi che seguono** presentano **esponenti letterali:**

  n) $\left(3a^k-2\right)^2 = \left(3a^k\right)^2 + 2\cdot 3a^k\cdot(-2) + (-2)^2 = 9a^{2k} - 12a^k + 4$

  o) $\left(a^x+a^y\right)^2 = \left(a^x\right)^2 + 2\cdot a^x\cdot a^y + \left(a^y\right)^2 = a^{2x} + 2a^{x+y} + a^{2y}$

  p) $\left(x^{a+b}+x^{a-b}\right)^2 = \left(x^{a+b}\right)^2 + 2\cdot x^{a+b}\cdot x^{a-b} + \left(x^{a-b}\right)^2 = x^{2a+2b} + 2x^{2a} + x^{2a-2b}$

ESERCIZI

1) $(x+1)^2$ 2) $(x+2)^2$ 3) $(x+3)^2$ *con verifica per* $x=1$

4) $(x-4)^2$ 5) $(x-5)^2$ 6) $(x-6)^2$ *con verifica per* $x=8$

7) $(4w-7)^2$ 8) $(3x-2y)^2$ 9) $(-t+8)^2$ *con due verifiche: per* $t=3$ *e per* $t=-2$

10) $\left(\frac{11}{12}x^2+\frac{5}{2}x\right)^2$ 11) $\left(-\frac{1}{5}e^5+\frac{1}{3}e^3\right)^2$ 12) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ *con verifica per* $a=1/2$

13) $(2k-9)^2$ 14) $\left(1-x^2\right)^2$ 15) $(-abc-1)^2$

16) *Calcolo mentale:* $61^2 = (60+1)^2 = \ldots$ 17) *Calcolo mentale:* $59^2 = (60-1)^2 = \ldots$ 18) *Calcolo mentale:* $999^2 = (1000-1)^2 = \ldots$

19) *Ricordando che* $24^2 = 576$, *calcola a mente* $2^{20} = \left(2^{10}\right)^2 = 1024^2$ (*il "Mega"* ⇨ *dell'Informatica*)

20) $\left(4s^n+3s\right)^2$ 21) $\left(a^{m+1}+a^{m+2}\right)^2$ 22) $\left(5x^n-4x^p\right)^2$

RISULTATI

1) x^2+2x+1 2) x^2+4x+4 3) x^2+6x+9

4) $x^2-8x+16$ 5) $x^2-10x+25$ 6) $x^2-12x+36$

7) $16w^2-56w+49$ 8) $9x^2-12xy+4y^2$ 9) $t^2-16t+64$

10) $\frac{121}{144}x^4+\frac{55}{12}x^3+\frac{25}{4}x^2$ 11) $\frac{1}{25}e^{10}-\frac{2}{15}e^8+\frac{1}{9}e^6$ 12) $a^2+a+\frac{1}{4}$

13) $4k^2-36k+81$ 14) $1-2x^2+x^4$ 15) $a^2b^2c^2+2abc+1$

16) 3721 17) 3481 18) 998001 19) 1.048.576

20) $16s^{2n}+24s^{n+1}+9s^2$ 21) $a^{2m+2}+2a^{2m+3}+a^{2m+4}$ 22) $25x^{2n}-40x^{n+p}+16x^{2p}$

13. PRODOTTO $(a+b)(a-b)$, ossia PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE TERMINI PER LA LORO DIFFERENZA

$\boxed{(a+b)(a-b)} = a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ab} - b^2 = \boxed{a^2-b^2}$

Quindi

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Se si deve **moltiplicare** la **somma di due termini per la differenza di quegli stessi termini**, basta fare **la differenza dei quadrati**, ossia
il quadrato del primo termine **meno il quadrato del secondo** termine

Esempi di applicazione della formula:

a) $(x+5y)(x-5y)=x^2-25y^2$

♥ **Osservazione importante**
Nella formula di cui ci stiamo occupando i "termini" sono
i due monomi, che nella prima parentesi compaiono sommati, e nella seconda sottratti (o viceversa).
Ad esempio, nell'operazione appena svolta, i "termini" erano: x (1° termine), $5y$ (2° termine).
I due segni +, − fra i due termini non devono dunque, in questo caso,
essere pensati come segni che fanno parte dei termini stessi,
bensì come segni di operazione (addizione e sottrazione) che li separano:

$$\left(\boxed{x}+\boxed{5y}\right)\left(\boxed{x}-\boxed{5y}\right)=x^2-25y^2$$

b) $(3ab-c^2)(3ab+c^2)=9a^2b^2-c^4$

c) $\left(a^3+\frac{1}{2}\right)\left(a^3-\frac{1}{2}\right)=a^6-\frac{1}{4}$

d) $(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2)=(a^2-9b^2)(a^2+9b^2)=a^4-81b^4$

e) Utilità per il **calcolo mentale**: $53\cdot 47=(50+3)(50-3)=50^2-3^2=2500-9=2491$

f) $(3x^n+4y^{n-1})(3x^n-4y^{n-1})=(3x^n)^2-(4y^{n-1})^2=9x^{2n}-16y^{2n-2}$

g) $(-c+4d)(-c-4d)=\left(\boxed{-c}+\boxed{4d}\right)\left(\boxed{-c}-\boxed{4d}\right)=(-c)^2-(4d)^2=c^2-16d^2$

h) Un esempio di **espressione**:

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)+(1-x^2)^2-2(1+x)(1-x)=$$
$$=(1-x^2)(1+x^2)+1-2x^2+x^4-2(1-x^2)=$$
$$=\cancel{1}\cancel{-x^4}\cancel{+1}\cancel{-2x^2}\cancel{+x^4}\cancel{-2}\cancel{+2x^2}=0$$

ESERCIZI

1) $(a+1)(a-1)$	2) $(a+2)(a-2)$	3) $(a+3)(a-3)$
4) $(3x-2y)(3x+2y)$	5) $(a^3+4)(a^3-4)$	6) $(y^4-y^3)(y^4+y^3)$
7) $\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)\left(\frac{1}{3}x^3-1\right)$	8) $\left(-\frac{1}{2}y-2\right)\left(-\frac{1}{2}y+2\right)$	9) $(a^k+3)(a^k-3)$
10) $108\cdot 92=(100+8)(100-8)=\ldots$	11) $49\cdot 51$	12) $48\cdot 52$

RISULTATI

1) a^2-1	2) a^2-4	3) a^2-9
4) $9x^2-4y^2$	5) a^6-16	6) y^8-y^6
7) $\frac{1}{9}x^6-1$	8) $\frac{1}{4}y^2-4$	9) $a^{2k}-9$
10) 9936	11) 2499	12) 2496

14. QUADRATO DI UN TRINOMIO E, PIU' IN GENERALE, DI UN POLINOMIO

$$\boxed{(a+b+c)^2} = (a+b+c)(a+b+c) =$$
$$= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 = \boxed{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

Il **quadrato di un TRINOMIO** si esegue facendo:
- il **quadrato del primo** termine
- il **quadrato del secondo**
- **il quadrato del terzo**
- **il doppio prodotto del primo per il secondo**
- **il doppio prodotto del primo per il terzo**
- **il doppio prodotto del secondo per il terzo**

$$\boxed{(a+b+c+d)^2} = (a+b+c+d)(a+b+c+d) =$$
$$= a^2+ab+ac+ad+ab+b^2+bc+bd+ac+bc+c^2+cd+ad+bd+cd+d^2 =$$
$$= \boxed{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}$$

$$\boxed{(a+b+c+d+e)^2} = \ldots = \boxed{\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+ \\ +2ab+2ac+2ad+2ae+ \\ +2bc+2bd+2be+ \\ +2cd+2ce+ \\ +2de \end{array}}$$

In generale, il **quadrato di un POLINOMIO** si esegue facendo
- il **quadrato di ciascun termine;**
- il **doppio prodotto di ciascun termine per ciascuno dei successivi**

Esempi di applicazione delle formule:

a) $\left(\boxed{3x}\boxed{-4y}\boxed{+5}\right)^2 = 9x^2+16y^2+25-24xy+30x-40y$

b) $\left(x^2-x-2\right)^2 = x^4+x^2+4-2x^3-4x^2+4x = x^4-2x^3-3x^2+4x+4$

c) $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{6}{5}x-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2+\left(\frac{6}{5}x\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^2\cdot\frac{\cancel{6}^{\,2}}{5}x+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^2\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{\,2}}\right)+\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{6}^{\,3}}{5}x\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{4}_{\,\cancel{2}}}\right)=$

$=\frac{1}{9}x^4+\underline{\frac{36}{25}x^2}+\frac{9}{16}+\frac{4}{5}x^3\underline{-\frac{1}{2}x^2}-\frac{9}{5}x=\frac{1}{9}x^4+\frac{4}{5}x^3+\frac{72-25}{50}x^2-\frac{9}{5}x+\frac{9}{16}=\frac{1}{9}x^4+\frac{4}{5}x^3+\frac{47}{50}x^2-\frac{9}{5}x+\frac{9}{16}$

d) $\left(3a-x+y-1\right)^2 = 9a^2+x^2+y^2+1-6ax+6ay-6a-2xy+2x-2y$

ESERCIZI

1) $\left(1+x+y\right)^2$ 2) $\left(3a-2b-c\right)^2$ 3) $\left(5a^2-a+1\right)^2$ 4) $\left(y^4+y^3+y^2+y+1\right)^2$

5) Verifica la validità: □ dell'uguaglianza 3) per $a=1$ e poi per $a=2$; □ della 4) per $y=\pm1$

6) $\left(-\frac{1}{4}ab-\frac{1}{2}ac+2bc\right)^2$ 7) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-z\right)^2$ 8) $\left(a^k+5a-6\right)^2$ 9) $\left(x^{3k}-x^p-x^2-x\right)^2$

RISULTATI

1) $1+x^2+y^2+2x+2y+2xy$ 2) $9a^2+4b^2+c^2-12ab-6ac+4bc$

3) $25a^4-10a^3+11a^2-2a+1$ 4) $y^8+2y^7+3y^6+4y^5+5y^4+4y^3+3y^2+2y+1$

6) $\frac{1}{16}a^2b^2+\frac{1}{4}a^2c^2+4b^2c^2+\frac{1}{4}a^2bc-ab^2c-2abc^2$ 7) $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2-\frac{1}{3}xy-\frac{2}{3}xz+yz$

8) $a^{2k}+25a^2+36+10a^{k+1}-12a^k-60a$

9) $x^{6k}+x^{2p}+x^4+x^2-2x^{3k+p}-2x^{3k+2}-2x^{3k+1}+2x^{p+2}+2x^{p+1}+2x^3$

15. CUBO DI UN BINOMIO

$$\boxed{(a+b)^3} = (a+b)^2(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b) = a^3 \underline{+a^2b}\underline{+2a^2b} + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \boxed{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Il **cubo di un binomio** si esegue mediante la formula

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

e cioè facendo:

- il **cubo del primo** termine
- **3 volte il quadrato del primo × il secondo**
- **3 volte il primo × il quadrato del secondo**
- il **cubo del secondo**

Esempi:

a) $(x+2y)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot 4y^2+8y^3 = x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

b) $\underbrace{(a-5)}_{a+(-5)}{}^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot(-5)+3\cdot a\cdot(-5)^2+(-5)^3 = a^3-15a^2+75a-125$

c) $\left(-x^2+1\right)^3 = -x^6+3\cdot x^4\cdot 1+3\cdot\left(-x^2\right)\cdot 1+1 = -x^6+3x^4-3x^2+1$

d) $\left(-4a^2-a\right)^3 = -64a^6+3\cdot 16a^4\cdot(-a)+3\cdot\left(-4a^2\right)\cdot a^2-a^3 = -64a^6-48a^5-12a^4-a^3$

e) $\left(2-x^n\right)^3 = 8-12x^n+6x^{2n}-x^{3n}$

f) **Alla fine**, dopo aver fatto i calcoli, la **successione dei segni** potrà essere *esclusivamente* una delle seguenti:

$\boxed{+\ +\ +\ +}$	$\boxed{+\ -\ +\ -}$	$\boxed{-\ +\ -\ +}$	$\boxed{-\ -\ -\ -}$
esercizio a)	*esercizi b), e)*	*esercizio c)*	*esercizio d)*

❑ **Il primo segno** dello sviluppo **coinciderà** quindi sempre **con quello del 1° termine** del binomio dato

♥ e **i quattro segni** dello sviluppo **saranno**

♪ **tutti uguali** fra loro, **se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano concordi**;

♫ **alterni**, **se i coefficienti dei termini del binomio iniziale erano discordi.**

g) Un'**espressione**:

$$\frac{1}{5}\left[(x+3)^3-(x-2)^3\right]-3x(x+1) = \frac{1}{5}\left[x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 9+27-\left(x^3+3\cdot x^2\cdot(-2)+3\cdot x\cdot 4-8\right)\right]-3x^2-3x =$$

$$= \frac{1}{5}\left[x^3+9x^2+27x+27-\left(x^3-6x^2+12x-8\right)\right]-3x^2-3x = \frac{1}{5}\left[\cancel{x^3}\underline{+9x^2}+27x\underline{\underline{+27}}\cancel{-x^3}\underline{+6x^2}-12x\underline{\underline{+8}}\right]-3x^2-3x =$$

$$= \frac{1}{5}\left[15x^2+15x+35\right]-3x^2-3x = \cancel{3x^2}\cancel{+3x}+7\cancel{-3x^2}\cancel{-3x} = 7$$

ESERCIZI

1) $(y+1)^3$ *con verifica per* $y=1$ 2) $(y+2)^3$ *con verifica per* $y=1$ 3) $(y+3)^3$ *con verifica per* $y=1$

4) $(y-4)^3$ *con verifica per* $y=1$ 5) $(y-z)^3$ *e verifica per* $y=5, z=4$ 6) $(2xy+1)^3$

7) $\left(\frac{1}{3}a-x\right)^3$ 8) $\left(-\frac{1}{2}s+\frac{2}{3}t\right)^3$ 9) $\left(-\frac{1}{4}h-2\right)^3$ 10) $\left(\frac{1}{5}a^2-\frac{1}{2}a\right)^3$ 11) $\left(\frac{3}{2}x^m+\frac{2}{3}x^p\right)^3$ 12) $\left(a+a^k\right)^3$

RISULTATI

1) y^3+3y^2+3y+1 2) $y^3+6y^2+12y+8$ 3) $y^3+9y^2+27y+27$

4) $y^3-12y^2+48y-64$ 5) $y^3-3y^2z+3yz^2-z^3$ 6) $8x^3y^3+12x^2y^2+6xy+1$

7) $\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{3}a^2x+ax^2-x^3$ 8) $-\frac{1}{8}s^3+\frac{1}{2}s^2t-\frac{2}{3}st^2+\frac{8}{27}t^3$ 9) $-\frac{1}{64}h^3-\frac{3}{8}h^2-3h-8$

10) $\frac{1}{125}a^6-\frac{3}{50}a^5+\frac{3}{20}a^4-\frac{1}{8}a^3$ 11) $\frac{27}{8}x^{3m}+\frac{9}{2}x^{2m+p}+2x^{m+2p}+\frac{8}{27}x^{3p}$ 12) $a^3+3a^{2+k}+3a^{1+2k}+a^{3k}$

16. QUARTA, QUINTA, … n-ESIMA POTENZA DI UN BINOMIO

$$\boxed{(a+b)^4} = (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) =$$
$$= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 = \boxed{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$$

$$\boxed{(a+b)^5} = (a+b)^4(a+b) = \left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right)(a+b) =$$
$$= a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4+a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 = \boxed{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$$

$$\boxed{(a+b)^6} = (a+b)^5(a+b) = \ldots = \boxed{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$$

ecc. ecc.

Vediamo così che le formule per le **potenze di un binomio** presentano un aspetto armonioso e regolare.

Si ha, in generale, $\boxed{(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + nab^{n-1} + b^n}$, ossia:

lo sviluppo di $(a+b)^n$
- **comincia da a^n**
- e **prosegue poi secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*, fino a terminare con b^n** ;
- **il polinomio è omogeneo**, perché questo decrescere dell'esponente di *a*, abbinato al simultaneo crescere dell'esponente di *b*, fa sì che il grado dei vari termini si mantenga sempre uguale a n ;
- inoltre, si osserva che **il secondo e il penultimo coefficiente valgono n.**

Ciò permetterebbe di ricordare le varie formule senza fatica, se non fosse per i coefficienti intermedi:
… quelli, non è affatto facile tenerli a mente!

Ci domandiamo allora:
esiste un metodo comodo per ricostruire rapidamente pure i coefficienti intermedi?

Cominciamo con l'osservare che lo sviluppo di $(a+b)^4$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^3$;
allo stesso modo, lo sviluppo di $(a+b)^5$ viene ricavato da quello (già noto) di $(a+b)^4$, e così via.

Prendiamo ora, per esempio, il calcolo tramite il quale $(a+b)^5$ viene "generato" a partire da $(a+b)^4$.
Si scrive $(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b)$, dopodiché si sviluppa $(a+b)^4$ e infine si svolge il prodotto:
i monomi di $(a+b)^4$ vengono moltiplicati prima tutti per a poi tutti per b,
e da ultimo si riducono i termini simili.

Riprendiamo in esame la moltiplicazione $(a+b)^4(a+b)$, ponendo particolare attenzione sui coefficienti,
e andando a capo in modo "furbo", affinché i monomi simili risultino incolonnati. Avremo:

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= (a+b)^4(a+b) = (a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b) = \\
&= \underbrace{\left(\boxed{1}a^4 + \boxed{4}a^3b + \boxed{6}a^2b^2 + \boxed{4}ab^3 + \boxed{1}b^4\right)}_{\text{sviluppo di }(a+b)^4}(a+b) = \\
&= 1a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + 1ab^4 \\
&\qquad\; + 1a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + 1b^5 \\
&= \underbrace{\boxed{1}a^5 + \boxed{\underset{4+1}{5}}a^4b + \boxed{\underset{6+4}{10}}a^3b^2 + \boxed{\underset{4+6}{10}}a^2b^3 + \boxed{\underset{1+4}{5}}ab^4 + \boxed{1}b^5}_{\text{sviluppo di }(a+b)^5}
\end{aligned}$$

Possiamo a questo punto rilevare un fatto molto interessante:
i coefficienti dello sviluppo di una potenza di binomio sono tali che ognuno di essi
(a parte il primo e l'ultimo, che sono unitari)
è ricavabile sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente!

Ad esempio, il secondo coefficiente del nostro risultato (sto pensando al coefficiente 5 del termine $5a^4b$)
è ottenuto sommando 4 e 1, che sono poi il secondo e il primo coefficiente, relativi alla potenza precedente.
Analogamente, il terzo coefficiente del nostro risultato (mi riferisco al coefficiente 10 del termine $10a^3b^2$)
è ottenuto sommando 6 e 4, che sono poi il terzo e il secondo coefficiente, relativi alla potenza precedente.

Bene! **Abbiamo così trovato il metodo per ricostruire rapidamente i vari coefficienti successivi!**

> **Ogni coefficiente (a parte il primo e l'ultimo, unitari)**
> **si può ricavare sommando due opportuni coefficienti, relativi alla potenza precedente,**
> **e per l'esattezza:**
> ♪ **il coefficiente di ugual posto (nella potenza precedente)**
> ♫ **e il coefficiente che precedeva quest'ultimo (sempre nella potenza precedente).**

Ad es., i coeff. di $(a+b)^6$ *potranno essere ricavati istantaneamente partendo dai coeff. di* $(a+b)^5$ *, che sono*

$\boxed{1}\quad \boxed{5}\quad \boxed{10}\quad \boxed{10}\quad \boxed{5}\quad \boxed{1}$.

Basterà scrivere la sequenza di numeri

$\boxed{1}\quad 1+5=\boxed{6}\quad 5+10=\boxed{15}\quad 10+10=\boxed{20}\quad 10+5=\boxed{15}\quad 5+1=\boxed{6}\quad \boxed{1}$

dopodiché sarà sufficiente appiccicare a ciascun coefficiente la parte letterale corretta per ottenere

$$(a+b)^6 = a^6 + \boxed{6}\,a^5b + \boxed{15}\,a^4b^2 + \boxed{20}\,a^3b^3 + \boxed{15}\,a^2b^4 + \boxed{6}\,ab^5 + b^6$$

Ricapitoliamo. **L' n-esima potenza di un binomio è un polinomio con le seguenti caratteristiche:**

- **è di grado n**
- **è omogeneo (= tutti i suoi termini hanno lo stesso grado)**
- **è ordinato secondo le potenze decrescenti del primo termine e crescenti del secondo termine**
- **contiene n+1 termini**
- **il suo primo e il suo ultimo coefficiente valgono 1**
- **il suo secondo e il suo penultimo coefficiente valgono n**
- **i coefficienti intermedi** possono essere ricavati tenendo presente che ogni coeff. è uguale alla somma
  ♪ fra il coefficiente di ugual posto, dello sviluppo precedente,
  ♫ e il coefficiente che, sempre nello sviluppo precedente, precedeva quest'ultimo.

  A tale scopo, i vari coefficienti possono essere organizzati in un apposito schema, detto **"Triangolo di Tartaglia"** (Niccolò Fontana detto il Tartaglia, algebrista italiano, 1499-1557), **nel quale ogni numero di ciascuna fila orizzontale** (tranne il primo e l'ultimo, che sono uguali a 1) **è calcolato come somma dei due che lo sovrastano.**

Per **costruire il Triangolo di Tartaglia**, possiamo immaginarlo come un **albero di Natale**. In alto, **sul cucuzzolo, ci mettiamo un 1**.

Ora **scendiamo lungo le pendici dell'albero, scrivendo (seconda riga) un 1 e poi un altro 1**.

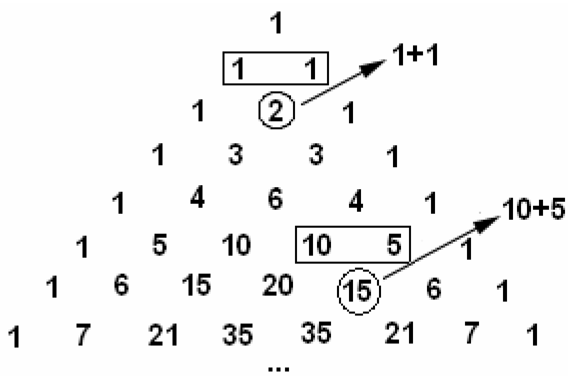
Scendiamo ancora: siamo sulla **terza riga**; **come primo elemento della riga scriviamo un 1**; poi, dato che sopra di noi troviamo una coppia di 1, **scriviamo un 2 (1 + 1 = 2). Terminiamo la riga con un 1.**

Abbiamo così costruito i coefficienti (1, 2, 1) di $(a+b)^2$.

Scendiamo ancora, ed ecco che, **procedendo allo stesso modo**,

si generano i coefficienti (1, 3, 3, 1) di $(a+b)^3$

E così per le righe successive.



Secondo te, si può dare un significato anche alla seconda riga **(1, 1)** *del triangolo di Tartaglia?*
E al cucuzzolo?

> Dal "Triangolo di Tartaglia" otteniamo, dunque, le **formule**:
>
> $(a+b)^4 = a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4$
>
> $(a+b)^5 = a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + b^5$
>
> $(a+b)^6 = a^6 + \mathbf{6}a^5b + \mathbf{15}a^4b^2 + \mathbf{20}a^3b^3 + \mathbf{15}a^2b^4 + \mathbf{6}ab^5 + b^6$
>
> $(a+b)^7 = a^7 + \mathbf{7}a^6b + \mathbf{21}a^5b^2 + \mathbf{35}a^4b^3 + \mathbf{35}a^3b^4 + \mathbf{21}a^2b^5 + \mathbf{7}ab^6 + b^7$
>
> $(a+b)^8 = a^8 + \mathbf{8}a^7b + \mathbf{28}a^6b^2 + \mathbf{56}a^5b^3 + \mathbf{70}a^4b^4 + \mathbf{56}a^3b^5 + \mathbf{28}a^2b^6 + \mathbf{8}ab^7 + b^8$
>
> *ecc. ecc.*

Esempi di applicazione:

a) $\boxed{(3x+2)^4} = 81x^4 + 4\cdot 27x^3\cdot 2 + 6\cdot 9x^2\cdot 4 + 4\cdot 3x\cdot 8 + 16 = \boxed{81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16}$

b) $\boxed{(x^2-2)^5} = (x^2)^5 + 5\cdot(x^2)^4(-2) + 10\cdot(x^2)^3(-2)^2 + 10\cdot(x^2)^2(-2)^3 + 5\cdot x^2(-2)^4 + (-2)^5 =$
$= \boxed{x^{10} - 10x^8 + 40x^6 - 80x^4 + 80x^2 - 32}$

c) $\boxed{\left(\frac{1}{2}a-1\right)^6} = \frac{1}{64}a^6 + 6\cdot\frac{1}{32}a^5\cdot(-1) + 15\cdot\frac{1}{16}a^4\cdot(+1) + 20\cdot\frac{1}{8}a^3\cdot(-1) + 15\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot(+1) + 6\cdot\frac{1}{2}a\cdot(-1) + 1 =$
$= \boxed{\frac{1}{64}a^6 - \frac{3}{16}a^5 + \frac{15}{16}a^4 - \frac{5}{2}a^3 + \frac{15}{4}a^2 - 3a + 1}$

d) $\boxed{(-x-3)^4} = (-x)^4 + 4\cdot(-x)^3\cdot(-3) + 6\cdot(-x)^2\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-x)\cdot(-3)^3 + (-3)^4 =$
$= x^4 + 4\cdot(-x^3)\cdot(-3) + 6\cdot x^2\cdot 9 + 4\cdot(-x)\cdot(-27) + 81 = \boxed{x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81}$

e) $\boxed{(-2a-b)^5} = (-2a)^5 + 5\cdot(-2a)^4\cdot(-b) + 10\cdot(-2a)^3\cdot(-b)^2 + 10\cdot(-2a)^2\cdot(-b)^3 + 5\cdot(-2a)\cdot(-b)^4 + (-b)^5 =$
$= -32a^5 + 5\cdot 16a^4\cdot(-b) + 10\cdot(-8a^3)\cdot b^2 + 10\cdot 4a^2\cdot(-b^3) + 5\cdot(-2a)\cdot b^4 - b^5 =$
$= \boxed{-32a^5 - 80a^4b - 80a^3b^2 - 40a^2b^3 - 10ab^4 - b^5}$

f) $\boxed{(a^x+a^y)^4} = a^{4x} + 4\cdot a^{3x}\cdot a^y + 6\cdot a^{2x}\cdot a^{2y} + 4\cdot a^x\cdot a^{3y} + a^{4y} =$
$= \boxed{a^{4x} + 4a^{3x+y} + 6a^{2x+2y} + 4a^{x+3y} + a^{4y}}$

OSSERVAZIONE

I termini dello sviluppo dell' n-esima potenza di un binomio hanno sempre **segni**:

- **TUTTI UGUALI** fra loro (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **concordi**)
  $+\ +\ +\ +\ \ldots$ *oppure* $-\ -\ -\ -\ \ldots$
- o altrimenti **ALTERNI** (se i coefficienti dei due termini di partenza sono **discordi**)
  $+\ -\ +\ -\ \ldots$ *oppure* $-\ +\ -\ +\ \ldots$

Basterà perciò determinare il PRIMO di questi segni (che dipende dal segno del primo fra i due coefficienti nel binomio, e dal fatto se l'esponente sia pari o dispari) per avere la corretta sequenza dei segni finali.

ESERCIZI

1) $(t-3)^4$ *con verifica ponendo* $t=1$

2) $(5x+2y)^4$ *Verifica per* $x=1,\ y=-2$

3) $(2a^2-a)^4$ *Due verifiche, con* $a=1$ *e* $a=-1$

4) $(t+10)^5$ *Verifica con* $t=-10$

5) $(x-3y)^5$ *Verifica con* $x=y=1$

6) $(-1-b^3)^5$ *Verifica con* $b=-1$

7) $(1+c)^6$ *Verifica con* $c=-1$ *e con* $c=1$

8) $(-1+c)^6$ *Verifica con* $c=1$ *e con* $c=2$

9) $(p-2)^6$ *Verifica con* $p=1$

10) $(-1+w)^9$ *Verifica con* $w=1$

RISULTATI

1) $t^4 - 12t^3 + 54t^2 - 108t + 81$

2) $625x^4 + 1000x^3y + 600x^2y^2 + 160xy^3 + 16y^4$

3) $16a^8 - 32a^7 + 24a^6 - 8a^5 + a^4$

4) $t^5 + 50t^4 + 1000t^3 + 10000t^2 + 50000t + 100000$

5) $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$

6) $-1 - 5b^3 - 10b^6 - 10b^9 - 5b^{12} - b^{15}$

7) $1 + 6c + 15c^2 + 20c^3 + 15c^4 + 6c^5 + c^6$

8) $1 - 6c + 15c^2 - 20c^3 + 15c^4 - 6c^5 + c^6$

9) $p^6 - 12p^5 + 60p^4 - 160p^3 + 240p^2 - 192p + 64$

10) $-1 + 9w - 36w^2 + 84w^3 - 126w^4 + 126w^5 - 84w^6 + 36w^7 - 9w^8 + w^9$

17. COMPLEMENTI SUI PRODOTTI NOTEVOLI

Ti presento in questo paragrafo qualche approfondimento interessante.

A. Possiamo "ritrovare" la nota formula per il **quadrato di un trinomio** anche procedendo come segue:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Analogamente, si potrà scrivere, per il **quadrato di un quadrinomio**:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b)+(c+d)]^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

oppure, in alternativa:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+2ad+2bd+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

❑ **Esercizio 1.** *Ricostruisci la formula per il quadrato di un polinomio di 5 termini scrivendo:*

$$(a+b+d+c+e)^2=[(a+b+c)+(d+e)]^2$$

Correzione ⇨

B. Un prodotto come $(a+b+c)(a-b-c)$, se svolto "normalmente", porterebbe a ottenere 9 termini. In alternativa, possiamo fare così:

$$(a+b+c)(a-b-c)=[a+(b+c)][a-(b+c)]=$$
$$=a^2-(b+c)^2=$$
$$=a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-b^2-2bc-c^2$$

Nel passaggio $a-b-c=a-(b+c)$, si dice che "si è messo in evidenza il segno $-$".

" METTERE IN EVIDENZA IL SEGNO $-$ "
significa prendere un **POLINOMIO**
e riscriverlo come $-($**POLINOMIO COI SEGNI CAMBIATI**$)$

Altri esempi:

$$4a^2-3a-2=-(-4a^2+3a+2) \qquad -x^3+x^2y-xy^2+y^3=-(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$$

Ed ecco ancora un caso in cui "mettere in evidenza il segno $-$" si rivela utile ai fini del calcolo:

$$(x^3+x^2-2x+4)(x^3-x^2+2x+4)=(x^3+4+x^2-2x)(x^3+4-x^2+2x)=$$
$$=[(x^3+4)+(x^2-2x)][(x^3+4)-(x^2-2x)]=$$
$$=(x^3+4)^2-(x^2-2x)^2=$$
$$=x^6+8x^3+16-(x^4-4x^3+4x^2)=$$
$$=x^6+8x^3+16-x^4+4x^3-4x^2=x^6-x^4+12x^3-4x^2+16$$

❑ **Esercizio 2** **Correzione** ⇨

Svolgi i seguenti prodotti nel modo ottimale:

$(3x+2y+z)(3x-2y-z)$ $\quad(3x+2y-z)(3x-2y+z)$ $\quad(a+b+c+d)(a-b-c-d)$

$(3x+2y+z)(3x+2y-z)$ $\quad(3x+2y+z)(3x-2y+z)$ $\quad(a+b+c+d)(a+b+c-d)$

C.

La formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, se viene riscritta da destra verso sinistra, diventa

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Ma quest'ultima uguaglianza ci dice che
"una differenza di quadrati è uguale alla somma delle basi, moltiplicato la loro differenza"

Questo fatto
(che sarà fondamentale tener presente nel capitolo
dedicato alla scomposizione in fattori di un polinomio),
può rivelarsi **molto utile ai fini del calcolo rapido**.

Ad esempio, se in un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 52 e un cateto 48,
per il Teorema di Pitagora (vedi pag. 214) l'altro cateto misurerà

$$\sqrt{52^2-48^2}\ .$$

A questo punto, anziché metterci a svolgere i quadrati, potremmo scrivere

$$\sqrt{52^2-48^2}=\sqrt{(52+48)(52-48)}=\sqrt{100\cdot 4}=\sqrt{400}=20$$

❑ **Esercizio 3** **Correzione** ⇨

Svolgi i seguenti calcoli nel modo più efficace:

$45^2-35^2 \qquad 46^2-36^2 \qquad 99^2-98^2 \qquad 67^2-33^2 \qquad 156^2-144^2$

RICAPITOLAZIONE DEI PRINCIPALI "PRODOTTI NOTEVOLI"

POTENZE DI UN BINOMIO (A PARTIRE DAL QUADRATO)

$$(a+b)^2=a^2+\mathbf{2}ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+\mathbf{3}a^2b+\mathbf{3}ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+\mathbf{4}a^3b+\mathbf{6}a^2b^2+\mathbf{4}ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+\mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2+\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+\mathbf{6}a^5b+\mathbf{15}a^4b^2+\mathbf{20}a^3b^3+\mathbf{15}a^2b^4+\mathbf{6}ab^5+b^6$$
$$(a+b)^7=a^7+\mathbf{7}a^6b+\mathbf{21}a^5b^2+\mathbf{35}a^4b^3+\mathbf{35}a^3b^4+\mathbf{21}a^2b^5+\mathbf{7}ab^6+b^7$$

...

I coefficienti
possono essere determinati
tramite il
Triangolo di Tartaglia

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

....

nel quale
i coefficienti non laterali
sono ciascuno la somma
dei due che lo sovrastano

SOMMA DI DUE TERMINI MOLTIPLICATO LA LORO DIFFERENZA

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

riassumibile nell'importante "slogan" :

"La somma di due termini, moltiplicata per la loro differenza,
è uguale alla DIFFERENZA DEI QUADRATI"

QUADRATO DI UN POLINOMIO (A COMINCIARE DAL TRINOMIO)

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$
$$(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab+2ac+2ad+2ae+2bc+2bd+2be+2cd+2ce+2de$$

...

Per svolgere il quadrato di un polinomio, si fa
1) il QUADRATO DI CIASCUN TERMINE
2) il DOPPIO PRODOTTO DI CIASCUN TERMINE PER CIASCUNO DEI SUCCESSIVI

18. ESPRESSIONI CON PRODOTTI NOTEVOLI

Esempi svolti:

A) $\boxed{9(2a+b)^2-(6a-b)^2-8b(6a+b)}=9(4a^2+4ab+b^2)-(36a^2-12ab+b^2)-48ab-8b^2=$

$=\cancel{36a^2}\cancel{+36ab}\cancel{+9b^2}\cancel{-36a^2}\cancel{+12ab}\cancel{-b^2}\cancel{-48ab}\cancel{-8b^2}=\boxed{0}$

B) $\boxed{\left\{\frac{1}{8}\left[(2x+3y)(2x-3y)-(2x-y)(2x+y)\right]+1\right\}^2+2y^2}=$

$=\left\{\frac{1}{8}\left[4x^2-9y^2-(4x^2-y^2)\right]+1\right\}^2+2y^2=\left\{\frac{1}{8}\left[\cancel{4x^2}-9y^2\cancel{-4x^2}+y^2\right]+1\right\}^2+2y^2=$

$=\left\{\frac{1}{8}\left[-8y^2\right]+1\right\}^2+2y^2=(-y^2+1)^2+2y^2=y^4\cancel{-2y^2}+1\cancel{+2y^2}=\boxed{y^4+1}$

ESERCIZI (la freccia, se c'è, è un link verso la correzione)

1) $(x-3y)^2-2x(13x-33y)+(5x-6y)^2$

2) $7(a-1)^2+2(a+2)^2-(3a-1)^2$

3) $4ab+(a-b)^2-(a+b)^2$

4) $3(k^2+5)-(k+3)^2-(k-1)^2-(k-2)^2$

5) $\left(x+\frac{5}{6}y\right)^2-\frac{1}{3}y\left(2x+\frac{13}{6}y\right)+\left(3x-\frac{1}{6}y\right)^2$

6) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a^3\right)^2-\frac{1}{4}a^3\left(a^3-\frac{4}{3}a\right)+\frac{8}{9}a^2$

7) $\frac{1}{14}\left[8(x-1)(x+2)-2(x+1)^2-6(x-2)^2\right]+3$

8) $\frac{1}{2}\left[(a^5+1)^2+(a^5+3)^2\right]-(a^5+7)(a^5-3)$

9) $\left[(a-10b)^2-3(2a-5b)^2-5(5b^2-2a^2)\right]^2+10\cdot(2a)^3\cdot b$ ⇨

10) $\frac{1}{2}\left[(-2+x)^2+(-2-x)^2\right](x^2-3)-(x^2+2)(x^2-6)$ ⇨

11) $(-y^2-1)^2\left[2(-4+y)^2-(y-8)^2+31\right]^2$ ⇨

12) $\left(3a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a+1\right)\left(1+\frac{1}{2}a\right)-(a-1)^2-\frac{1}{4}(a^2+1)$ ⇨

13) $(3y-1)\left[y(y+1)-(y+3)(y+3)\right]-5(1-y)(3y+1)+4(8y-1)$

14) $(a^x-a)^2$

15) $(x^{k+1}+x^{k-1})^2$

16) $(3y^{k+1}+5y^{3k-2})^2$

17) $(x^py^{p+1}-x^{3p}y)^2$

18) $(a^{3n}-a^4b^n)^2$

19) $(a+1)(a-1)+(a+2)(a-2)+(a+3)(a-3)+(a+4)(a-4)+(a+5)(a-5)$

20) $4(x+2y)(x-2y)+(x+4y)^2-5x^2$

21) $(5a-4b)(5a+4b)-(3a+5b)(3a-5b)-(4a-3b)^2$ ⇨

22) $4(3a-5)(5+3a)-4(-3a+1)^2-(a+4)(a-26)+a^2$

23) $(2x-1)(1+2x)+(1+2x)(2x+1)$

24) $\left(\frac{5}{3}xy+3z\right)\left(\frac{5}{3}xy-3z\right)-\frac{1}{9}(5xy-6z)^2+13z^2-\frac{17}{3}xyz$

25) $2a^2+(a-1)^2(a+1)^2$

26) $\left[\left(\frac{1}{3}w+1\right)^2-\left(\frac{1}{3}w-1\right)^2+\left(-\frac{1}{3}w+1\right)\left(-\frac{1}{3}w-1\right)-\frac{4}{3}w\right]\left(\frac{1}{9}w^2+1\right)+1$ ⇨

27) $\left[2(5n+1)\left(\frac{1}{5}n-\frac{1}{6}\right)-2\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{15}n\right]^2-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}-3n\right)$ ⇨

28) $a^2+(a+3)(-a-3)+3(2a+3)$ ⇨

29) $(2a+3)^2-(-2a-3)^2$

30) $(x-1)(x+1)(x^2+1)-(x-2)(x+2)(x^2+4)$

31) $1+\left[8a^2-(2a-1)(2a+1)\right](2a\cdot 2a-1)-(-2a)^4$

32) $\left\{\left[(b+3)(b-3)(b^2+9)+80\right]\left[(b+4)(b-4)(b^2+16)+257\right]\right\}^2+2b^8$

33) $(3a^{3n}+2a^{n+1})(3a^{3n}-2a^{n+1})$

34) $(1-a^k)(1+a^k)(1+a^{2k})(1+a^{4k})(1+a^{8k})$

35) $(a-b+1)^2-(a+b-1)^2-4a(1-b)$

36) $(3x-2y-1)^2-(3x+2y)^2+2(12xy+3x-2y)$

37) $(5a-b-1)^2-2(1-5a)(1+b)-(b-1)(b+1)-(-5a)^2$

38) $\frac{1}{2}\left[(a-2b+3c)^2+(a+2b-3c)^2+24bc\right]$

39) $(x-1)^2(x-2)^2-(x^2-3x+2)^2$ ⇨

40) $(x^3-x^2+x-1)^2+2x(x^2+1)^2-3x^2(x^2+1)$

41) $(a+b-c-d)^2-(c+d-b)^2-a\left[a+2(b-c-d)\right]$

42) $\left[(b^k-1)(b^{2k}-1)+b^{2k}\right]^2+b^k\left[2(b^{3k}+1)-b^k(b^k+1)\right]$

43) $(x-2)^3-(x+1)^3+9(x^2-x+1)$

44) $\left\{(2x-1)^3-\left[6x(1-2x)-1\right]\right\}:8$

45) $(2-t)^3-(1-t)^3-3t(t-3)$

46) $5x^2+\frac{1}{15}\left[(5x-2)^3-(5x-1)^3+7\right]$

47) $\left[(b+1)^3-(-b+1)^3\right]:2-3b$

48) $(a+y)^3+(a-y)^3+(-a+y)^3+(-a-y)^3$

49) $\left[(x^2+4x-1)^2-8x(x-1)(x+1)-14x^2\right]^3-x^4(x^4+1)(x^4+2)$

50) $(a^2-1)^3-(a+1)^3(a-1)^3$

51) $\left[(y-2)^4-(y+2)^4+64y\right]:(-16y^2)$

52) $(x^2+1)^4-x^2(x^2-1)^3-x^2(7x^4+3x^2+5)$

53) $-2\left[(-2ab)^2+1\right]+\left[(2ab+1)^4-(4a^2b^2-ab+1)^2\right]:(5ab)$

54) $(a+1)^4-(a-1)^4-8a(a^2+1)$

55) $1+(a-1)^5+5a\left[a(a^2+2)-(2a^2+1)\right]$

56) $\left[(x+2y)^5+(x-2y)^5\right]:(2x)-40y^2(x^2+2y^2)$

57) $9(2x-1)^2-(6x-7)^2-8(6x-5)$

58) $-(10+x)^2+(8-x)^2-36(-1-x)$

59) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)^2-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{1}{2}ab$

60) $2c+(-11c+3)^2-\left[9(-4c+1)^2+8c(1-3c)\right]$

61) $37-(4s-1)^2+4(2s+3)(2s-3)$

62) $(3-n)(3+n)(9+n^2)-(2+n)(2-n)(4+n^2)$

63) $\frac{1}{4}\left[(3x^2+2)^2-(3x^2-4)(3x^2+4)\right]-3x^2$

64) $2w^3-9w^2\left(\frac{1}{9}w-1\right)\left(\frac{1}{9}w+1\right)+\left(\frac{1}{3}w^2-3w\right)^2$

65) $(a^2-a-1)^2-(a+2)^2(a-1)^2+(2a-1)(2a^2-3)$

66) $(x^4-x^2-1)^2+x^2\left[2(x^2+1)-x^2(x^2-1)^2\right]-1$

67) $45+(x^2+3)(x^2-3)-\left[(-x^2+x-5)^2-11(x-1)(x+1)\right]$

68) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x+2\right)$

69) $(a-b+3)^2+(3a-b+1)^2-2\left[5(a^2+1)+b^2-4ab\right]+8b$

70) $\left[-\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}x\right)^2+4x^2\left(\frac{1}{3}x+y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{4}{3}x^2y\left(2x-\frac{15}{2}\right)\right]:(-2x)^2$

71) $2\left[a+(b-1)\cdot c\right]+(a+b-c-1)^2-(c-a)^2-(1-b)^2$

72) $(a+1)^3-(a+2)^3+(a-1)^3-(a-2)^3$

73) $(t^4-t^3+2t^2-3t)^2-t^2(t^2-2t+3)^2+2t^5(t^2-2t+3)$

74) $\left[(x+y)^3-(-x+y)^3\right]:(2x)$

75) $(7c-2d)^3-(5c-2d)^3+24cd(6c-d)$

76) $(8a^6-1)^2+4a^4\left[3+4a^2(3a^2+1)\right]-(4a^4+1)^3$

77) $\frac{1}{3}\left[(a+a^2b)^3-a^3(1+a^3b^3)\right]$

78) $2t+\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}t+1\right)\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t+1\right)-\left[\left(\frac{1}{2}t-1\right)^3+2\right]\right\}$

79) $\dfrac{\dfrac{(2e^2-f)^3+f^3}{2e^2}-(2e^2-f)^2}{2}+e^2f$

80) $\dfrac{ab(23a+61b)-\left[-(-3a+b)^3+b(-2a+3b)^2\right]+(3a+2b)^3}{100ab}$

81) $\dfrac{(r^4+r^2)^3-(r^6-r^3)^2-r^8(r^2+1)}{2}$

82) $\frac{1}{15}\left\{124(1+b\cdot b^2)+\left[2b-(5+b)\right]^3+(-5b-1)^3+2\right\}$

83) $\left(2a^x-3a^y\right)^2$ 84) $a^{x+1}+\left(a^x-a\right)^2-a^2$ 85) $\left(-a^x+a\right)^3$ 86) $\left(a^x\right)^x-\left(a^x-1\right)^2\left(a^x+1\right)^2-\left(a^{x^2}+2a^{2x}\right)$

87) $(3a-2)^2-2(a-2)(2a-5)-5(a-2)(a+2)-2(3a+2)$ 88) $\left(x^2+x-1\right)^2-\left(x^2+x\right)^2+2x(x+1)$

89) $(3a-2)^3+18a(3a-2)+8$ 90) $15+(3a-1)^4-(3a-2)^2(3a+2)^2+6a\left(18a^2-21a+2\right)$

91) Dimostra che la differenza dei quadrati di 2 interi consecutivi è uguale alla somma di quegli stessi numeri

92) Qual è il secondo termine dello sviluppo di $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^{1000}$?

93) Se $\mathrm{A}=k+10$ e $\mathrm{B}=k-2$, allora:

I) $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=?$ II) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})=?$ III) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=?$ IV) $\mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2=?$

94) Spiega perché i numeri 1331 1030301 1003003001 1000300030001 ... sono tutti cubi perfetti, e determina gli interi dei quali essi sono cubi (Indicazione: ad esempio, $1331=10^3+3\cdot10^2+...=...$)

95) Se il lato di un quadrato misura *a* cm e viene accorciato di *m* cm, di quanti cm^2 diminuisce l'area?
a) m^2-2am b) m^2 c) $2am-m^2$ d) a^2+m^2-2am

96) Il lato di un cubo misura a cm. Se misurasse *m* centimetri in più, di quanto aumenterebbe la superficie totale del cubo? E di quanto aumenterebbe il suo volume?

97) Determina il lato di un quadrato sapendo che aumentandolo di 1 cm, oppure diminuendolo di 1 cm, le due rispettive aree differirebbero di $204\ \mathrm{cm}^2$ (si risponde risolvendo una semplicissima equazione)

98) Qual è il 3° termine da sinistra nello sviluppo di $(a+a^{-1})^{10}$? Voglio dire: $(a+a^{-1})^{10}=a^{10}+...+?+...$

99) Scrivi il prodotto notevole che, se viene svolto, dà come risultato $81x^4-49$

100) Determina il quadrato di binomio il cui sviluppo è
a) $81x^2-36x+4$ b) $x^4+121x^2-22x^3$ c) $4+4x^3+x^6$

101) $4a^2+12ab+9b^2+16c^2-16ac-24bc$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?

102) $x^4-2x^3-x^2+2x+1$ è un polinomio che si ottiene eseguendo un quadrato di trinomio poi riducendo due termini simili. Sapresti risalire al prodotto notevole di partenza?

103) Quale dei seguenti polinomi NON è lo sviluppo di un quadrato di binomio?
a) $x^2+8x+16$ b) $x^2-14x+49$ c) $x^2+12x+144$ d) $x^2+25-10x$ e) $1+6x^4+9x^8$

104) $x^8+4x^4+...$ Completa col termine mancante, in modo che il trinomio ottenuto sia uguale al quadrato di un binomio. Ci sono DUE POSSIBILITÀ: sapresti scriverle entrambe?

105) Sapendo che $876\cdot874=765624$, stabilisci senza far calcoli qual è il risultato dell'operazione 875^2.

106) Determina il risultato dell'operazione $857239^2-857243\cdot857235$ evitando calcoli impegnativi.

107) Se al quadrato di un qualsiasi numero intero si aggiunge il sestuplo dell'intero successivo, poi si addiziona ancora 3 al risultato così ottenuto, in tal modo si ottiene certamente un quadrato perfetto. Giustifica, con una catena di uguaglianze basata sul calcolo letterale, questa affermazione.

108) Se si prende un qualsiasi numero intero, e gli si somma il suo quadrato, poi anche il consecutivo del numero di partenza, si ottiene in tal modo sempre un quadrato perfetto. Dimostra questa affermazione.

109) Se si prende un qualsiasi numero intero, e dal suo quadrato si sottrae il quadrato dell'intero precedente, diminuito di 1, poi si divide per 2 ciò che si è ottenuto, si ritorna sempre all'intero di partenza! Dimostra la verità di questa affermazione.

Ad esempio:
$7\ \rightarrow\ \dfrac{49-(36-1)}{2}=7$

IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEI POLINOMI

Due polinomi nella stessa variabile si dicono "identici" se, per qualunque valore attribuito alla variabile, i due polinomi assumono sempre ugual valore.
Il cosiddetto "**PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI**" afferma che **due polinomi sono identici se e soltanto se hanno lo stesso grado, e in essi sono uguali i coefficienti dei termini di ugual grado**.

110) Determina i valori dei due numeri a, b in modo che i due polinomi nella variabile x
$2x^2+(a+b)x+a$ e $2x^2+15x+2b$
siano identici, e determina il valore che tali polinomi identici assumono quando $x=4$

RISULTATI, RISPOSTE

1) $45y^2$ 2) 14 3) 0 4) 1 5) $10x^2$ 6) a^2 7) $2x$ 8) 26 9) $a^4+1600a^2b^2$ 10) $5x^2$ 11) y^8-2y^4+1
12) $8a^2$ 13) 0 14) $a^{2x}-2a^{x+1}+a^2$ 15) $x^{2k+2}+2x^{2k}+x^{2k-2}$ 16) $9y^{2k+2}+30y^{4k-1}+25y^{6k-4}$
17) $x^{2p}y^{2p+2}-2x^{4p}y^{p+2}+x^{6p}y^2$ 18) $a^{6n}-2a^{3n+4}b^n+a^8b^{2n}$ 19) $5a^2-55$ 20) $8xy$ 21) $24ab$
22) $46a$ 23) $8x^2+4x$ 24) xyz 25) a^4+1 26) $(1/81)w^4$ 27) n^2 28) 0 29) 0 30) 15
31) 0 32) $b^{16}+1$ 33) $9a^{6n}-4a^{2n+2}$ 34) $1-a^{16k}$ 35) 0 36) 1 37) 0 38) $a^2+4b^2+9c^2$ 39) 0
40) x^6+1 41) 0 42) $b^{6k}+b^{3k}+1$ 43) 0 44) x^3 45) 7 46) $3x$ 47) b^3 48) 0 49) x^4+1 50) 0
51) y 52) 1 53) $3ab$ 54) 0 55) a^5 56) x^4 57) 0 58) 0 59) ab 60) c^2 61) $8s$ 62) 65 63) 5
64) $18w^2$ 65) 0 66) $4x^2$ 67) $2x^3+10x$ 68) $2y$ 69) $12a$ 70) y^2+y 71) $2ab$ 72) $-18a$ 73) t^8
74) x^2+3y^2 75) $218c^3$ 76) 0 77) $a^4b+a^5b^2$ 78) t^2 79) f^2 80) $a+b$ 81) $r^{10}+r^9+r^8$ 82) $4b-6b^2$
83) $4a^{2x}-12a^{x+y}+9a^{2y}$ 84) $a^{2x}-a^{x+1}$ 85) $-a^{3x}+3a^{2x+1}-3a^{x+2}+a^3$ 86) $-a^{4x}-1=-\left(a^{4x}+1\right)$
87) 0 88) 1 89) $27a^3$ 90) 0 91) $(x+1)^2-x^2=\cancel{x^2}+2x+1\cancel{-x^2}=x+(x+1)$ 92) $1000x^{1996}$
93) I) $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=(k+10)^2-(k-2)^2=k^2+20k+100-k^2+4k-4=24k+96$
II) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})=(k+10+k-2)(k+10-k+2)=(2k+8)\cdot 12=24k+96$
III) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2=(2k+8)^2=4k^2+32k+64$ IV) $\mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2=\ldots=4k^2+32k+64$
94) $1331=10^3+3\cdot 10^2+3\cdot 10+1=(10+1)^3=11^3$; $1030301=10^6+3\cdot 10^4+3\cdot 10^2+1=(10^2+1)^3=101^3$
$1003003001=1001^3$; $1000300030001=10001^3$
95) c), perché $a^2-(a-m)^2=a^2-\left(a^2-2am+m^2\right)=\ldots$
96) $6(a+m)^2-6a^2=12am+6m^2$; $(a+m)^3-a^3=3a^2m+3am^2+m^3$ 97) 51 cm
98) $45a^6$ 99) $\left(9x^2+7\right)\left(9x^2-7\right)$ 100a) $(9x-2)^2$ *oppure* $(-9x+2)^2=(2-9x)^2$
100b) $(x^2-11x)^2$ *oppure* $(-x^2+11x)^2=(11x-x^2)^2$ 100c) $(2+x^3)^2=(x^3+2)^2$
101) $(2a+3b-4c)^2$ *opp.* $(-2a-3b+4c)^2=(4c-2a-3b)^2$ 102) $(x^2-x-1)^2$ *opp.* $(-x^2+x+1)^2=(1+x-x^2)^2$
103) c): $(x+12)^2=x^2+\mathbf{24}x+144$ 104) $+4$; $+4x^6$ 105) 765625. Infatti $876\cdot 874=(875+1)(875-1)=875^2-1$
106) $857239^2-857243\cdot 857235=857239^2-\left(857239+4\right)\left(857239-4\right)=857239^2-857239^2+16=16$
107) $n^2+6\left(n+1\right)+3=n^2+6n+6+3=n^2+6n+9=(n+3)^2$, *quadrato di un intero ossia "quadrato perfetto"*
108) Qualunque sia l'intero n, è sempre $n+n^2+(n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$
109) $\dfrac{n^2-[(n-1)^2-1]}{2}=\dfrac{n^2-[n^2-2n\cancel{+1}\cancel{-1}]}{2}=\dfrac{\cancel{n^2}\cancel{-n^2}+2n}{2}=n$ 110) $a=10,\ b=5;\ 102$

VERIFICHE DI IDENTITA'

Cos'è un' "*identità*"? E' un'uguaglianza letterale, vera per tutti i valori "ammissibili" delle lettere coinvolte (gli eventuali valori "non ammissibili" sono quelli che darebbero luogo a un'operazione non eseguibile: ad esempio, l'identità $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{a(a+1)}$ vale per $a\neq 0,\ a\neq -1$, ossia vale tutti i valori di a TRANNE i valori 0 e -1, non ammissibili perché renderebbero un denominatore uguale a 0).

Esempio svolto A) *Verifica che vale la seguente identità*: $\boxed{(2x+1)^2+x^2=(5x+1)(x+1)-2x}$

Eseguo i calcoli ai due membri, per constatare che si ottenga il medesimo risultato:

$\underline{4x^2}+4x+1\underline{+x^2}=\underline{5x^2}\underline{\underline{+5x}}\underline{\underline{+x}}+1\underline{\underline{-2x}}$; $5x^2+4x+1=5x^2+4x+1$, *OK* !!!

Esempio svolto B)

Verifica che vale la seguente identità:

$\boxed{(a+b)(a+c)=(a-b)(a-c)+2a(b+c)}$

$\cancel{a^2}+ac+ab\cancel{+bc}=\cancel{a^2}\underline{-ac}\underline{\underline{-ab}}\cancel{+bc}\underline{\underline{+2ab}}\underline{+2ac}$

$ac+ab=ac+ab$ OK

(NOTA)

NOTA - Giannino ha svolto l'esercizio B) "a modo suo": nel secondo passaggio, avendo individuato a primo e a secondo membro coppie di termini uguali, le ha mandate via, come si fa nelle equazioni.

Il procedimento seguito da Giannino appare certamente comodo, ma … sarà corretto? Sì, è correttissimo!!! Infatti, riflettiamo:
se è vera l'uguaglianza "semplificata"
$\square+\cancel{\triangle}=\bigcirc+\cancel{\triangle}$,
allora vuol dire che era vera anche l'uguaglianza di partenza
$\square+\triangle=\bigcirc+\triangle$!!!

ESERCIZI: IDENTITÀ (vedi riquadro a pag. 135) CON PRODOTTI NOTEVOLI, DA VERIFICARE

1) A) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ B) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

2) $(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2)=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$
(qui le identità sono 3, ma per la proprietà transitiva dell'uguaglianza basta verificarne 2 a scelta …)

3) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

3') Le precedenti identità 3), dette "di Lagrange" o "di Fibonacci",
possono essere utilizzate per esprimere un numero intero come somma

- di 4 quadrati perfetti
- oppure di 2 quadrati perfetti (in due modi).

A) Ad es., sapresti fare questo per l'intero $4453=61\cdot 73$? (Trova 2 interi a, b tali che $a^2+b^2=61$, poi …)
B) Osservato che $2^2+12^2=148$, trova 4 numeri per cui la somma dei quadrati sia uguale a $148^2=21904$.

4) Controlla la validità dell'identità

$$(10d_1+u_1)(10d_2+u_2)=100d_1d_2+10(d_1u_2+d_2u_1)+u_1u_2$$

Spiega in che modo essa potrebbe aiutare a svolgere a mente il prodotto di due interi di due cifre ciascuno:
$x=10d_1+u_1,\ \ y=10d_2+u_2$ (esempio: $45\cdot 67$, dove $d_1=4,\ u_1=5,\ d_2=6,\ u_2=7$)
Stupisci ora i compagni con la tua capacità di eseguire a mente il prodotto di due numeri con due cifre!
Particolarizza anche l'identità al caso in cui i numeri da moltiplicare sono uguali,
osservando la relazione di quest'ultimo procedimento con la formula per il quadrato di un binomio.
E calcola con questa modalità 84^2.

5) $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2=4b(a+c)$ 6) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$
7) $(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$ 8) $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$

9) Formule di Waring:

A) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
B) $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2$
C) $a^5+b^5=(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)$

A), B), C) fanno parte di una famiglia di identità,
chiamate "formule di Waring" in onore del matematico inglese Edward Waring (1736-1798),
che permettono di esprimere una somma di due potenze di ugual grado
per mezzo della somma e del prodotto delle basi.

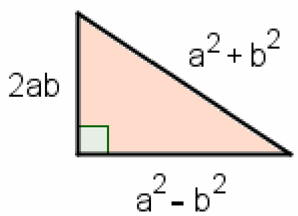
10) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2)+6abc$

11) $a^5-a=(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)+5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$. Quanto vale $8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+5\cdot 9\cdot 10\cdot 11$?

11') (dal bellissimo sito francese dedicato ai numeri di Gérard Villemin: http://villemin.gerard.free.fr)
Serviti dell'identità 11) per dimostrare che

- se a è un intero dispari, il numero a^5-a è sempre divisibile per 120
- mentre se a è un intero pari, il numero a^5-a è sempre divisibile per 30.

12) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$
che viene utilizzata per costruire *terne pitagoriche*
(a, b interi non nulli diversi fra loro qualunque).



Una "**TERNA PITAGORICA**" è una **terna di interi**
***a*, *b*, *c* , tutti non nulli, tali che** $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$.
Ad es., la (3, 4, 5) lo è in quanto $3^2+4^2=5^2$.
Anche (16, 30, 34) è una terna pitagorica: controlla!
… Come mai, piuttosto che l'uguaglianza $a^2+b^2=c^2$, è più semplice verificare la $a^2=c^2-b^2$?

12') Osservato che $5^2+11^2=146$, serviti dell'identità $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$
per determinare una terna pitagorica che abbia 146 come terzo elemento.

13) A) $a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$ B) $a^2+\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right)^2=\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right)^2$

A) viene impiegata per costruire terne pitagoriche, prendendo a dispari,
B) serve allo stesso scopo con a pari

13') Applica le formule precedenti per determinare due terne pitagoriche che abbiano come primo elemento rispettivamente 31 e 32

DA UN'IDENTITÀ, RICAVARNE ALTRE PER SOSTITUZIONE

- Partiamo dalla $\boxed{a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}}$ e facciamo le sostituzioni $\boxed{\begin{array}{l} a\to a \text{ (cioè, } a \text{ resta inalterato)} \\ b\to a+2 \end{array}}$

  Otteniamo così $\boxed{a^2+(a+2)^2=\frac{(a+a+2)^2+(a-(a+2))^2}{2}}$ ossia

  $a^2+(a+2)^2=\frac{(2a+2)^2+(-2)^2}{2}$; $a^2+(a+2)^2=\frac{[2(a+1)]^2+4}{2}$;

  $a^2+(a+2)^2=\frac{4(a+1)^2+4}{2}$; $a^2+(a+2)^2=\frac{{}^2\cancel{4}(a+1)^2}{\cancel{2}}+\frac{{}^2\cancel{4}}{\cancel{2}}$; $\boxed{a^2+(a+2)^2=2(a+1)^2+2}$

  Supponiamo che a sia un intero: l'ultima identità ci dice allora che la somma dei quadrati di due interi che differiscono di 2 unità si può ottenere prendendo l'intero fra essi compreso, elevandolo al quadrato, raddoppiando il numero ottenuto e aggiungendo 2 unità.
  Prova ad eseguire in questo modo il calcolo 99^2+101^2!

- (Paolo Pellegrini)

  $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ da cui $a^x\cdot a^y=\left(\frac{a^x+a^y}{2}\right)^2-\left(\frac{a^x-a^y}{2}\right)^2$

  che con $x=3$ e $y=2$ diventa $a^5=\left(\frac{a^3+a^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^3-a^2}{2}\right)^2$ o anche $a^5=\left(\frac{a^2(a+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2(a-1)}{2}\right)^2$

14) Riparti dalle osservazioni di P. Pellegrini, e costruisci quella identità che permette di esprimere un cubo come differenza di due quadrati. Servitene poi per esprimere come diff. di quadrati il numero $343=7^3$.

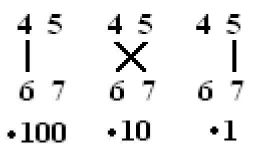
15) Se sostituiamo $-b$ al posto di b, cosa diventano le identità seguenti? A) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
B) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ C) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ D) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

16) Verifica che risulta, qualunque siano a e b, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ e scrivi l'identità che si può ricavare da questa con le sostituzioni $a\to a+1$; $b\to a$. Ricontrolla anche la nuova identità ottenuta.

RISPOSTE

3') A: $4453=61\cdot 73=(5^2+6^2)(3^2+8^2)=15^2+40^2+18^2+48^2=63^2+22^2=33^2+58^2$ B: 4, 24, 24, 144

4) $45\cdot 67=100\cdot 4\cdot 6+10\cdot(4\cdot 7+6\cdot 5)+5\cdot 7=2400+580+35=3015$
$84^2=100\cdot 8\cdot 8+10\cdot(8\cdot 4+8\cdot 4)+4\cdot 4=\ldots$ $\rightarrow$



Moltiplicare due numeri di due cifre

11') $a^5-a=(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)+5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$
Il prodotto $(a-2)\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\cdot(a+2)$ di 5 interi consecutivi è certamente divisibile per 120, perché fra 5 interi consecutivi ce n'è uno (e uno solo) divisibile per 5, uno almeno per 3, due almeno pari consecutivi quindi divisibili uno per 2 e l'altro per 4; ma allora tale prodotto sarà certo divisibile per $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$.
Supponiamo a dispari: il prodotto $5\cdot(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$ ha un fattore 5, uno certamente divisibile per 3, fra i due fattori $(a-1)$ e $(a+1)$, entrambi pari, uno è divisibile per 2 e l'altro per 4: allora tale prodotto sarà anch'esso divisibile per $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$. Ora, la somma di due multipli di 120 è divisibile per 120 …

12) $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$ e l'ultimo prodotto è spesso facile da trattare … ad es., nel caso (16, 30, 34), è $34^2-30^2=(34+30)(34-30)=64\cdot 4=8^2\cdot 2^2=16^2$

12') 96, 110, 146

13') (31, 480, 481); (32, 255, 257)

14) $a^3=\left((a^2+a)/2\right)^2-\left((a^2-a)/2\right)^2$; $7^3=28^2-21^2$

15) A) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ B) Resta invariata C) Ovviamente … D) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

16) $(a+1)^3-a^3=(a+1-a)\left((a+1)^2+(a+1)\cdot a+a^2\right)=(a+1)^2+a(a+1)+a^2$

I PRODOTTI NOTEVOLI E LA DILATAZIONE TERMICA DEI SOLIDI

Le molecole di cui è fatta una sostanza sono in continuo e perenne movimento.
Se si tratta di un solido esse vibrano avanti e indietro intorno a una posizione di equilibrio, nel caso di un gas si hanno invece spostamenti casuali in tutte le direzioni.
E **una sostanza al crescere della sua temperatura si espande**.
Infatti, se aumenta la temperatura, significa che aumenta la velocità media con cui le molecole si muovono; questo incremento della velocità media delle molecole determina un incremento delle vibrazioni e degli urti, quindi della distanza media fra le molecole stesse.
Per esempio, un binario ferroviario d'acciaio lungo 20 metri, quando la temperatura sale di 30 °C, subisce un allungamento di 7 centimetri circa: avrai forse notato che in una linea ferroviaria viene sempre lasciato un certo spazio fra un binario e quelli che lo precedono e lo seguono.
Nel caso del binario, una dimensione (la lunghezza) prevale nettamente sulle altre due, che rispetto ad essa sono trascurabili; nel caso di una lamiera sottile è invece trascurabile lo spessore.
Perciò, per quanto riguarda i solidi, si fa distinzione fra tre tipi di **dilatazione termica**:
a) **lineare**, quando l'effetto di dilatazione è apprezzabile praticamente soltanto nel senso della lunghezza;
b) **superficiale**;
c) **cubica**.
Prendiamo una barra di metallo di qualche metro di lunghezza e sezione trascurabile, e facciamola passare dalla temperatura di 0 °C a quella di t °C.
Vedremo che **l'allungamento della barra è pressappoco proporzionale a t** ; vale a dire, almeno per un ampio intervallo di temperature, se raddoppia la temperatura finale raddoppia all'incirca anche l'allungamento subìto; se triplica la temperatura finale, triplica grossomodo anche l'allungamento, ecc.
Vale cioè, almeno approssimativamente, la relazione

$$\boldsymbol{\ell - \ell_0 = \Delta\ell = \lambda\ell_0 t} \; .$$

- **Cosa significa quel simbolo Δ ("delta")?**
  E' un "**operatore di differenza**", è usato per indicare una differenza.
  - Ad esempio, due coniugi di età molto diverse, diciamo 50 anni e 24 anni, hanno un Δe grande: $\Delta e = e_2 - e_1 = 50 - 24 = 26$.
  - Se nel mio allenamento di corsa dopo 5' mi trovavo a 1 km da casa, e proseguendo nella stessa direzione dopo 20' mi trovavo a 4 km da casa, allora nell'intervallo di tempo (in minuti) $\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 5 = 15$ ho percorso uno spazio (in km) $\Delta s = s_2 - s_1 = 4 - 1 = 3$ quindi la velocità media del mio moto è stata
  $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3\ km}{15\ min} = 0{,}2\ \frac{km}{min} = 0{,}2\ \frac{km}{1/60\ h} = 12\ km/h$$
- **E che cos'è quel λ (lambda)?**
  E' un moltiplicatore fisso detto **"coefficiente di dilatazione lineare"**,
  il cui valore dipende dalle proprietà fisiche della sostanza di cui è fatta la barra.
  λ esprime la variazione di lunghezza "unitaria",
  ossia relativa ad una barra di 1 metro sottoposta a un incremento di temperatura di 1 grado centigrado.

Ora la nostra relazione $\boldsymbol{\ell - \ell_0 = \lambda\ell_0 t}$ può essere riscritta come

$$\boldsymbol{\ell = \ell_0 + \lambda\ell_0 t}$$

e infine, raccogliendo a fattor comune, cioè applicando la proprietà distributiva al contrario,

$$\boldsymbol{\ell = \ell_0(1 + \lambda t)}$$

Bene … λ in generale è davvero molto piccolo!
Per l'acciaio, ad esempio, vale circa $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ (la "dimensione fisica" di questa quantità è $°C^{-1}$), per il cemento circa $1{,}2 \cdot 10^{-5}$, per il vetro circa $9 \cdot 10^{-6}$.
Il fatto che λ sia *piccolo piccolo* entrerà in modo decisivo in quanto stiamo per dire ora.
Occupiamoci adesso di dilatazione "superficiale":
il nostro corpo ha due dimensioni nettissimamente prevalenti sulla terza, ad esempio è una lamina sottile dotata di una certa lunghezza e larghezza, rispetto alle quali lo spessore è trascurabile.
Siano dunque a_0 e b_0 le dimensioni della nostra lamina rettangolare, alla temperatura di 0 °C.
Se la sua temperatura aumenta fino a portarsi al valore t tali dimensioni diverranno rispettivamente:

$$a = a_0(1 + \lambda t); \quad b = b_0(1 + \lambda t)$$

Quanto varrà la superficie finale? Varrà

$$\boldsymbol{S = ab = a_0 b_0 (1 + \lambda t)^2 = S_0(1 + 2\lambda t + \lambda^2 t^2)}.$$

Occhio adesso, perché è precisamente *qui* che si tiene conto del fatto che λ è piccolissimo:
nell'espressione $\mathbf{1+2\lambda t+\lambda^2 t^2}$**, essendo $\lambda << 1$ il termine che contiene λ^2 potrà essere trascurato !!!**

- ❑ **$\lambda << 1$ significa: λ MOLTO MINORE di 1, molto piccolo rispetto a 1.**
  Ma se λ è un numero con questa caratteristica, quindi molto vicino a zero, λ^2 sarà molto ma molto minore di λ quindi il termine $\lambda^2 t^2$ sarà pochissimo rilevante nella somma.
  Pensa, ad esempio: se fosse $\lambda = 0{,}0001$, allora λ^2 varrebbe $0{,}00000001$.

Potendosi in pratica evitare di portarsi dietro la quantità $\lambda^2 t^2$, la relazione si potrà riscrivere come

$$\boldsymbol{S = S_0(1+2\lambda t)}$$

senza apprezzabile perdita di precisione.

Pertanto il coeff. di dilatazione superficiale è circa uguale al doppio del coeff. di dilatazione lineare!

Nel caso della dilatazione *cubica* avviene qualcosa di analogo.
Consideriamo un parallelepipedo del nostro materiale, che alla temperatura di 0 °C abbia dimensioni a_0, b_0, c_0 e quindi volume $a_0 \cdot b_0 \cdot c_0 = V_0$. Alla temperatura di t °C, le lunghezze degli spigoli diventeranno $a = a_0(1+\lambda t)$; $b = b_0(1+\lambda t)$; $c = c_0(1+\lambda t)$ per cui il nuovo volume sarà:

$$\boldsymbol{V = abc = a_0 b_0 c_0 (1+\lambda t)^3 = V_0(1+3\lambda t+3\lambda^2 t^2+\lambda^3 t^3)}$$

Considerazioni analoghe a quelle fatte per la dilatazione superficiale ci portano a trascurare i termini contenenti λ^2 e λ^3, da cui la relazione approssimata:

$$\boldsymbol{V = V_0(1+3\lambda t)}$$

Pertanto il coefficiente di dilatazione cubica è circa uguale al triplo del coeff. di dilatazione lineare.

ESERCIZI

1) Calcola il valore della quantità $(1+\alpha)^2 - 1$, per $\alpha = 0{,}002$
   a) in modo preciso b) trascurando, nello sviluppo del prodotto notevole, il termine di 2° grado.
   Di che percentuale differisce il valore trovato col calcolo semplificato b), rispetto a quello esatto?

2) Calcola il valore della quantità $(1+\alpha)^3 - 1$, per $\alpha = 0{,}01$
   a) in modo preciso b) trascurando, nello sviluppo del prodotto notevole, i termini di 2° e di 3° grado.
   Di che percentuale differisce il valore trovato col calcolo semplificato b), rispetto a quello esatto?

3) Le maggiori montagne dei 7 continenti hanno rispettivamente le seguenti altezze h.
   Africa: 5.895 m; Nordamerica: 6.194 m; Sudamerica: 6.962 m; Asia: 8.844 m; Antartide: 4.892 m;
   Oceania continentale: 2.228 m; Europa (escluso il Caucaso): 4.810 m. Calcola il massimo valore del Δh.

Matematica e Problemi della Realtà

I PRODOTTI NOTEVOLI E IL DOPPIO LANCIO DEL TAPPO DI PLASTICA

ESERCIZIO 4)

Se si lancia un tappino di plastica, la probabilità che cada fermandosi con la parte cava verso l'alto è diversa dalla probabilità che la parte cava risulti invece rivolta verso il basso (tali probabilità possono essere valutate annotando le "frequenze relative" su un numero elevato di lanci: se, ad esempio, lanciando il tappo 1000 volte vediamo che si ferma con la parte cava verso l'alto 612 volte, la probabilità che, lanciandolo ancora, si fermi con la parte cava verso l'alto, potrà essere valutata in circa 612/1000 ossia intorno al 61%).

Ma dette p e q queste due probabilità, qualunque esse siano, **si può dimostrare che, lanciandolo per due volte di seguito, è più facile che escano risultati fra loro uguali piuttosto che risultati differenti**!

Il fatto è che, come insegna il Calcolo delle Probabilità:

- ❑ se la probabilità di "parte cava verso l'alto" è p, allora la probabilità che "lanciando 2 volte il tappo, per 2 volte si ottenga parte cava verso l'alto" sarà p^2
- ❑ e analogamente, se la probabilità di "parte cava verso il basso" è q, allora la probabilità che "lanciando 2 volte il tappo, per 2 volte si ottenga parte cava verso il basso" sarà q^2;
- ❑ **la probabilità** quindi **dell'evento "lanciando per 2 volte un tappo, esce o per 2 volte la parte cava verso l'alto oppure per 2 volte la parte cava verso il basso" è p^2+q^2**
- ❑ mentre **la probab. che, lanciando il tappo 2 volte, si abbiano esiti diversi, è data da $pq+qp = 2pq$.**

Ora, **è possibile dimostrare che, quando è $p \neq q$, risulta sempre $p^2+q^2 > 2pq$. COME SI FA?**

RISPOSTE: 1) a) 0,004004 b) 0,004; di meno dello 0,1% 2) a) 0,030301 b) 0,03; di meno dell'1%
3) 6616 m 4) La differenza p^2+q^2-2pq equivale a … che è sempre > 0 perché …

19. LA CONGETTURA DI GOLDBACH; LA FORMULA DI GAUSS; QUADRATI MAGICI

LA CONGETTURA DI GOLDBACH

Per "**congettura**" si intende, in Matematica, un'**affermazione della cui verità si è fortemente convinti, e che tuttavia non si è riusciti a dimostrare**.
La "**CONGETTURA DI GOLDBACH**" fa la sua comparsa in uno scambio di lettere, datato 1742, fra il prussiano Christian Goldbach e il grande matematico svizzero Eulero (1707-1783). Essa afferma che

QUALSIASI NUMERO PARI MAGGIORE DI 2 PUÒ SEMPRE ESSERE SCRITTO COME SOMMA DI DUE NUMERI PRIMI (eventualmente fra loro uguali).

Qualche esempio: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$; $14 = 3 + 11 = 7 + 7$; …

♥ D'altra parte, **un'affermazione che chiama in causa infiniti casi non si può ritenere dimostrata neppure se si è constatato che è vera per un numero enorme di questi casi; essa, invece, richiede**
- ♪ **o un procedimento dimostrativo di carattere generale che ne provi la verità (trasformando, quindi, la "congettura" in un "teorema")**
- ♫ **oppure la scoperta di un controesempio che la faccia crollare, facendo vedere che è falsa.**

❑ Lo stesso Eulero riteneva plausibile che se una somma di n quarte potenze di interi dava ancora la quarta potenza di un intero, allora n dovesse essere per forza ≥ 4.
Ma nel 1988 l'americano Elkies scoprì che invece
$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4,$$
con ciò provando la *falsità* della congettura.

❑ Ancora: Pierre de Fermat (1601-1665) aveva fiducia nel fatto che i numeri della forma $2^{2^n}+1$ fossero tutti primi. Ai suoi tempi non esistevano né i computer né le macchine calcolatrici, per cui egli si limitò a considerare i casi
$$n=1:\ 2^{2^1}+1=5,\quad n=2:\ 2^{2^2}+1=17,\quad n=3:\ 2^{2^3}+1=257,\quad n=4:\ 2^{2^4}+1=65537;$$
… e tuttavia, se si va a fare il calcolo col valore successivo $n=5$, si ottiene $2^{2^5}+1=4294967297$ che *non è* un numero primo (già Eulero riconobbe che è divisibile per 641).

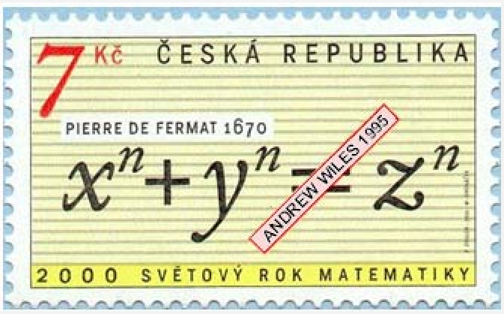
In quanto alla congettura di Goldbach, nell'anno 2000 accadde persino che una casa editrice, per scopi pubblicitari, mettesse in palio una ricompensa di un milione di dollari per chi fosse riuscito, entro il mese di aprile del 2002, a dimostrarla. Il ghiotto premio restò non aggiudicato, e ad oggi questa questione di teoria dei numeri è rimasta irrisolta, anche se sono stati provati parecchi interessanti teoremi ad essa correlati.

Qualche altro esempio di **congetture di teoria dei numeri semplici da enunciare, e che tuttavia non sono ancora state né provate né smentite**? Eccone qui di seguito quattro.
- Esiste un numero perfetto dispari? (Si dice "perfetto" un intero che sia uguale alla somma dei suoi divisori, inclusa l'unità ed escluso il numero stesso; ad esempio $6=1+2+3$ e $28=1+2+4+7+14$)
- I numeri primi della forma n^2+1 (ossia, superiori di un'unità a un quadrato perfetto) sono infiniti?
- Esistono infinite coppie di numeri primi "gemelli" (= che differiscono di due unità, come 5 e 7 o 59 e 61)?
- Esiste sempre un numero primo compreso tra due quadrati perfetti consecutivi?

Invece **è stato dimostrato vero, dall'inglese Andrew Wiles in modo definitivo nel 1995, che**

♥ **SE $n>2$, NON ESISTE ALCUNA TERNA DI INTERI a, b, c TUTTI $\neq 0$ PER CUI $a^n+b^n=c^n$**
Questa congettura era nota come "ULTIMO TEOREMA DI FERMAT" perché Pierre de Fermat, uno studioso del XVII secolo, aveva lasciato scritto, su di una copia del trattato *Arithmetica* di Diofanto:
"*Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina*".
Pressoché tutti i matematici tuttavia ritengono, data l'estrema complessità della questione, confermata dalla raffinatezza degli strumenti moderni di cui si servì Wiles nel suo lavoro, **che Fermat in realtà si sbagliasse quando sosteneva di saper giustificare l'enunciato in modo corretto.**

ESERCIZI



1) Il 40 si può esprimere come somma di due primi in 3 modi (40 = 3+37, 40 = 11+29, 40 = 17+23). Il 100 in 6 modi: quali?

2) Tra le seguenti catene, quale dimostra che la somma fra un multiplo di 12 e un multiplo di 30 è sempre un multiplo di 6?
   a) $12n+30=6(2n+5)$
   b) $n\cdot 12+n\cdot 30=2\cdot 6n+5\cdot 6n=7\cdot 6n=7n\cdot 6$
   c) $12n+30m=6(2n+5m)$

LA FORMULA DI GAUSS PER LA SOMMA DEGLI INTERI DA 1 FINO A n

Dovendo eseguire una somma di tanti interi consecutivi a partire da 1, quale ad esempio $1+2+3+...+27$, possiamo pensare di procedere così:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S &=& 1 &+& 2 &+& 3 &+& .... &+& 25 &+& 26 &+& 27 \\ S &=& 27 &+& 26 &+& 25 &+& .... &+& 3 &+& 2 &+& 1 \\ \hline 2S &=& 28 &+& 28 &+& 28 &+& .... &+& 28 &+& 28 &+& 28 \end{array}$$

[27 addendi, tutti uguali a 28]

quindi $2S = 27 \cdot 28$ da cui $\boxed{S = \frac{27 \cdot 28}{2} = 378}$

Passando ora più in generale alla somma $1+2+3+...+n$ dei primi *n* interi positivi, avremo:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S &=& 1 &+& 2 &+& 3 &+& .... &+& (n-2) &+& (n-1) &+& n \\ S &=& n &+& (n-1) &+& (n-2) &+& .... &+& 3 &+& 2 &+& 1 \\ \hline 2S &=& (n+1) &+& (n+1) &+& (n+1) &+& .... &+& (n+1) &+& (n+1) &+& (n+1) \end{array}$$

[n addendi, tutti uguali a $(n+1)$]

$2S = n \cdot (n+1)$ da cui $S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

♥ Ecco dunque la bella formula $\boxed{1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ **FORMULA DI GAUSS**

detta “di Gauss” in onore del grande matematico tedesco (1777-1855)
che fu capace di costruirsela in modo autonomo quando era solo un bambino.

Ad esempio, $1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$; $1+2+3+...+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$; $1+2+3+...+90 = \frac{90 \cdot 91}{2} = 4095$.

ESERCIZI

3) Quanto vale la somma degli interi positivi da 1 fino a 40? E da 1 fino a 1000?
4) Come calcoleresti la somma degli interi positivi da 100 compreso fino a 200?
5) Quanto vale la somma $2+4+6+...+1000$?
6) Quanto vale la somma $1+3+5+...+999$?

QUADRATI MAGICI

Si dice “quadrato magico” una tabella di 2×2, oppure di 3×3, o di 4×4, … , numeri,
con la proprietà che la somma dei numeri su ogni riga, o colonna, o diagonale, sia sempre la stessa.
Questa somma costante è chiamata la *costante di magia* o *costante magica* o *somma magica* del quadrato.
Se un quadrato magico $n \times n$ ha come termini gli interi da 1 fino a n^2, allora è detto *perfetto* o *normale*;
e nel caso dei quadrati magici perfetti, si può dimostrare che la costante magica è sempre data da $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Ad esempio, qui a fianco è rappresentato un quadrato magico perfetto 3×3 (cioè: “di ordine 3”).
La costante magica è $\frac{3 \cdot (3^2+1)}{2} = 15$.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ESERCIZI

7) Completa il quadrato perfetto di ordine 4 nella figura riportata qui a destra.

1			
		7	
	10	11	
13			16

8) Il fatto che nei quadrati magici perfetti di ordine *n*, la costante magica sia $\frac{n(n^2+1)}{2}$,
si può dimostrare con facilità a partire dalla formula di Gauss $1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$. In che modo?

RISPOSTE 1) $3+97,\ 11+89,\ 17+83,\ 29+71,\ 41+59,\ 47+53$ 2) c 3) 820; 500500
4) Sottraendo dalla somma fino a 200 quella fino a 99. Si ottiene 15150
5) $2(1+2+3+...+500) = 250500$ 6) $(1+2+3+...+1000)-(2+4+6+...+1000) = 500500-250500 = 250000$
8) Un quadrato magico perfetto di ordine *n* contiene tutti gli interi successivi da 1 fino a n^2, distribuiti in *n* righe e in *n* colonne. Quanto vale la somma degli interi da 1 a n^2? Dividendo il risultato per il numero *n* delle righe o colonne (= moltiplicandolo per 1/*n*), e semplificando, si ha il valore della costante magica.