NUMERI E OPERAZIONI

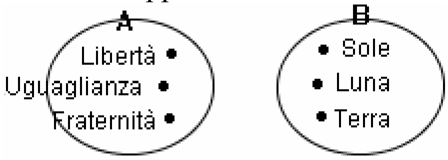
MA CHE COS'E' UN "NUMERO"?

Rispondere in modo esauriente a questa domanda sarebbe davvero impegnativo: richiederebbe una trattazione ad alto livello, e un gran bel malloppo di pagine! Accontentiamoci di dare solo qualche idea, senza pretendere di entrare nei particolari.

Ci occuperemo prima di tutto degli interi.

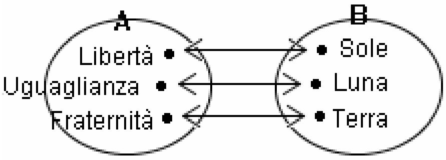
1. NUMERI INTERI

Consideriamo la coppia di insiemi sotto raffigurata:

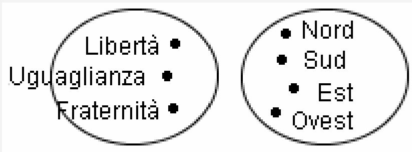


L'insieme A e l'insieme B **sono molto diversi** l'uno dall'altro **in quanto alla natura dei loro elementi**; tuttavia, a ben guardare, **"qualcosa" in comune ce l'hanno**:
possono infatti **essere posti in "CORRISPONDENZA BIUNIVOCA"**,
come l'insieme delle ASOLE e l'insieme dei BOTTONI di una stessa camicia: ossia,
ad OGNI elemento di A si può far corrispondere UNO E UN SOLO elemento di B, E VICEVERSA.

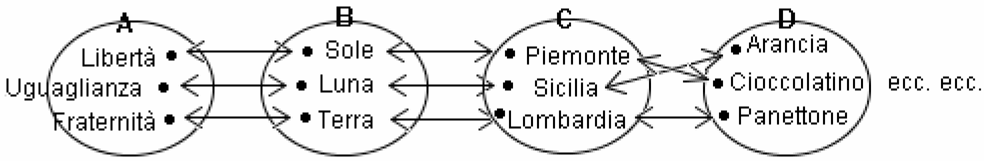
Ad esempio, possiamo associare le "asole" ai "bottoni" secondo lo schema seguente:



CONTROESEMPIO
Invece NESSUNA corrispondenza biunivoca sarebbe possibile fra QUESTI due insiemi ! →



E' evidente che **ci sono infiniti altri insiemi che hanno la proprietà di poter essere posti in corrispondenza biunivoca con A o con B:**



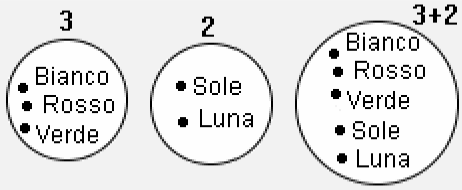
Bene!

♥ **Si dice "numero intero" quell'entità astratta, quel "quid", che è comune a tutti gli insiemi, che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un insieme dato** (**purché questo non sia infinito**: vedi l'interessante approfondimento a pagina 90).

Nel caso degli insiemi A, B, C, D, ecc., sopra considerati, l' "entità astratta" che li accomuna è chiamata "il numero 3".

♥ Cosa si intende, ora, per "**somma**" di numeri interi?
"Somma" deve sempre richiamarci l'idea di "totale".
Sia dunque **X un insieme con un certo numero n di elementi; Y un altro insieme, con m elementi.**
Supponiamo che X, Y siano "disgiunti"
(= non ci sia nessun elemento che appartenga contemporaneamente ad entrambi).
Creiamo ora un nuovo insieme Z nel quale mettiamo sia gli elementi di X, sia anche gli elementi di Y.
Si dice che l'insieme Z è l' "unione" degli insiemi X, Y, e si scrive $Z = X \cup Y$ (leggi: "X unione Y").

Si definisce "somma" degli interi n ed m, e si indica con n+m, l'intero che è associato all'insieme unione $X \cup Y$.
Ad esempio, la "somma" $3+2$ è pensata come quel numero → che è individuato dall'unione di una coppia di insiemi *disgiunti*, il primo dei quali "rappresenti" il numero 3 e l'altro il numero 2.



♥ L'operazione di **moltiplicazione** fra interi è concepita come una "**somma ripetuta**":
$\mathbf{4 \cdot 3 = 4+4+4}$ **(3 addendi, ciascuno uguale a 4)**

♥ **Sottrazione** e **divisione** vengono poi definite come le **inverse dell'addizione e della moltiplicazione**:
$\mathbf{a-b=c}$ **se accade che** $\mathbf{c+b=a}$; $\mathbf{a:b=c}$ **se accade che** $\mathbf{c \cdot b = a}$

2. MULTIPLI E DIVISORI; DIVISIBILITA'; NUMERI PRIMI

- **Cosa sono i "multipli" di un intero x? Sono i numeri: $x,\ 2x\ (=2\cdot x),\ 3x,\ 4x,\ ...$**
  Ad esempio, i multipli di 5 sono: 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...
- **Cosa sono i "divisori" di un intero x?**
  Sono quegli interi che sono contenuti un numero intero di volte in x;
  in altre parole, **sono quegli interi y per i quali la divisione $x : y$ ha resto 0** (NOTA)
  Ad esempio, i divisori di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6 e 12 .
- **Cosa significa affermare che un intero x è "divisibile" per un altro intero y?**
  Significa dire che la divisione $x : y$ (NOTA) **dà come resto 0**; insomma,
  che **y è contenuto un numero intero di volte in x, ossia** che **x è multiplo di y.**
- Sono quindi **del tutto EQUIVALENTI le espressioni verbali**:
  "x è divisibile per y" ; "y è divisore di x" ; "x è multiplo di y".
  "ESSERE MULTIPLO DI" o "ESSERE DIVISIBILE PER", è la stessa cosa!

NOTA
Questo discorso si riferisce, come è ovvio, alla "divisione intera" (pagg. 14 e 114), quella in cui dividendo e divisore sono interi, e si ottengono un quoziente intero e un resto, eventualmente nullo.

Valgono i seguenti **Criteri di Divisibilità**:

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 2
Un intero è divisibile per 2 se e solo se termina con cifra pari. I numeri pari sono 0, 2, 4, 6, eccetera (anche lo 0 è considerato pari: vedi la riflessione all'inizio della pag. seguente); i dispari sono 1, 3, 5, 7, ecc.

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 3
Un intero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 3

Vedi gli esempi qui a destra.

$\boxed{520458}$
$5+2+0+4+5+8=\boxed{24}$
24 è divisibile per 3; quindi 520458 è divisibile per 3

$\boxed{1357}$
$1+3+5+7=\boxed{16}$
16 NON è divisibile per 3; quindi 1357 NON è divisibile per 3

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 4
Un intero è divisibile per 4 se e solo se il gruppo formato dalle ultime due cifre è 00, oppure è divisibile per 4

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 5
Un intero è divisibile per 5 se e solo se termina con 0 o con 5

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 6
Un intero è divisibile per 6 se e solo se è divisibile sia per 2 che per 3

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 9
Un intero è divisibile per 9 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 9

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 10
Un intero è divisibile per 10 se e solo se termina con 0

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 25
Un intero è divisibile per 25 se e solo se termina con: 00, 25, 50 o 75

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 11
Un intero è divisibile per 11 se e solo se, sommandone le cifre di posto dispari (la prima, la terza, ...) poi sommandone le cifre di posto pari (la seconda, la quarta, ...) e infine sottraendo i due numeri così ottenuti, si ottiene 0 o un multiplo di 11

Esempi:

$\boxed{48257}$
$4+2+7=13$
$8+5=13$
$13-13=\boxed{0}$
quindi 48257 è divisibile per 11

$\boxed{9091929}$
$9+9+9+9=36$
$0+1+2=3$
$36-3=\boxed{33}$
33 è multiplo di 11, quindi 9091929 è divisibile per 11

$\boxed{1234}$
$1+3=4$
$2+4=6$
$6-4=\boxed{2}$
2 NON è multiplo di 11, quindi 1234 NON è divisibile per 11

CRITERIO DI DIVISIBILITA' PER 7
Per stabilire se un intero è divisibile per 7, se ne sopprime l'ultima cifra in coda, la si raddoppia e si sottrae il risultato dal numero privato della "coda". Il numero dato è divisibile per 7 se e solo se il numero ottenuto dal procedimento (che è eventualmente "iterabile", cioè ripetibile) è 0 o un multiplo di 7.

Esempi:

$\boxed{294}$
$$\begin{array}{r} 29\cancel{4}\ - \\ 8\ = \\ \hline \boxed{21} \end{array}$$
che è multiplo di 7; quindi 294 è divisibile per 7

$\boxed{2598}$
$$\begin{array}{r} 259\cancel{8}\ - \\ 16\ = \\ \hline 24\cancel{3} \\ 6 \\ \hline \boxed{18} \end{array}$$
No, 2598 NON è divisibile per 7

♥ **La comunità matematica è concorde nel considerare anche lo "zero" (0) come un numero PARI.**
Questa scelta è opportuna per tutta una serie di motivi.
Fra i tanti, ne citiamo qui uno solo, di carattere "pratico".
In certi giorni, in determinate città, per limitare l'inquinamento atmosferico viene consentito di circolare solo alle vetture con "targhe dispari", in altri solo alle vetture con "targhe pari".
La finalità è di far sì che in quei giorni venga utilizzata soltanto la metà (circa) dei veicoli abitualmente in uso.
E' chiaro che considerare lo 0 "pari" è pienamente conforme alla logica e all'obiettivo, in questo contesto.

♥ **Si dice "numero primo" un intero, maggiore di 1, divisibile solo per sé stesso e per l'unità.**

L'elenco dei numeri primi inizia con: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...

Osserviamo che **il 2 è l'unico numero primo pari**: gli altri numeri primi, dopo il 2, sono ovviamente tutti dispari (ogni numero pari è divisibile per 2, quindi, se non si tratta proprio del 2, non può essere primo).

❑ **Perché mai il numero 1 non viene fatto rientrare fra i numeri primi?**

Non è conveniente accettare il numero 1 nell'insieme dei numeri primi, sebbene 1 sia un numero intero divisibile solo per sé stesso e per l'unità.

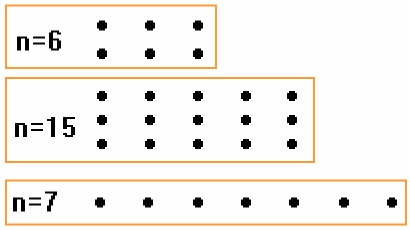
Una delle ragioni è che se noi considerassimo 1 come un numero primo, allora la scomposizione in fattori primi di qualsiasi intero conterrebbe sempre il banale fattore 1 … che barba!

Ma più che altro, si osserva che, escludendo 1 dall'insieme dei primi,
la scomposizione di un qualsiasi numero intero non nullo in fattori primi è sempre unica
(come si potrebbe dimostrare: **"Teorema Fondamentale dell'Aritmetica"**),
mentre se anche 1 venisse considerato primo, tale unicità cadrebbe, in quanto, ad esempio,
avremmo $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, ma anche $50 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, ma anche $50 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, ecc. ecc.

❑ **Rappresentiamo un intero n con n puntini**:

se n NON è primo (la negazione di "primo" è "**composto**"), il gruppo di puntini che rappresenta n può assumere una conformazione "**rettangolare**", con base e altezza contenenti più di un puntino;

se n è primo, tale forma rettangolare non è realizzabile a meno di ridurre l'altezza, o la base, a un puntino solo.



❑ **Ma … la sequenza dei numeri primi va avanti all'infinito, oppure prima o poi si arresta?**

Il grande Euclide di Alessandria, intorno all'anno 300 a.C., lasciò nel libro XI della sua famosissima opera, chiamata "Elementi", la prima dimostrazione scritta del fatto che **i numeri primi sono infiniti**.
Ecco qui di seguito una rielaborazione - sostanzialmente fedele all'originale, ma rivista con mentalità e simbologia "moderne" - di questa dimostrazione.

Se, ragionando per assurdo, si avesse soltanto un numero finito di numeri primi, cosa accadrebbe?
Accadrebbe che ce ne sarebbe uno più grande di tutti gli altri.
Indichiamo allora con P questo numero, l'ultimo numero primo della sequenza, il maggiore fra tutti.

Consideriamo ora il numero (un numerone gigantesco, che chiameremo N) ottenibile moltiplicando fra loro tutti i numeri primi, dal più piccolo (il 2) fino al più grande (P):
$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot P$.

Osserviamo che questo numeraccio N sarà quindi divisibile sia per 2, che per 3, che per 5, … , che per P.

Se aumentiamo N di una unità, otterremo il numero N+1, che ci riserverà però una grandissima sorpresa.
Infatti N+1:

- non può avere 2 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 2;
- non può avere 3 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 3;
- non può avere 5 come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per 5;
- …
- non può avere P come divisore perché è maggiore di 1 unità rispetto a N, che è divisibile per P.

Quindi N+1 non è divisibile per nessuno dei numeri primi da 2 fino a P e pertanto due sono i casi:

♪ o N+1 è un numero primo … ma allora non era vero che P fosse il più grande fra i numeri primi;

♫ oppure N+1 non è primo, ma allora ammette come divisore qualche numero primo *maggiore* di P e, di nuovo, non era vero che P fosse il più grande fra i numeri primi.

Dunque la supposizione che esista un numero primo maggiore di tutti gli altri …
non sta in piedi, ci porta a una *contraddizione*.
Non può pertanto esistere un numero primo che sia maggiore di tutti gli altri:
la sequenza dei numeri primi non può avere termine, i numeri primi sono infiniti.

3. MASSIMO COMUN DIVISORE (M.C.D.)

Il "massimo comun divisore" fra due (o più) interi, è il più grande fra i loro divisori comuni.

Es. Cerchiamo il massimo comun divisore fra 96 e 60.
Scriviamo i divisori di 96 e quelli di 60, evidenziando i divisori comuni:

Divisori di 96: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ 8 $\boxed{12}$ 16 24 32 48 96

Divisori di 60: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 10 $\boxed{12}$ 15 20 30 60

I divisori comuni a 96 e 60 sono dunque: 1, 2, 3, 4, 6 e 12;
ma fra questi, il più grande è 12, quindi $\text{M.C.D.}(96, 60) = 12$

Nella pratica, per cercare il M.C.D. il metodo più svelto - nei casi semplici - è di elencare mentalmente, a ritroso, i divisori di uno dei numeri dati (conviene scegliere il più piccolo) per arrestarsi non appena si incontra un numero che sia divisore anche dell'altro (o degli altri).

Ad esempio:

- per determinare il M.C.D. fra 24 e 40, elenchiamo a ritroso i divisori di 24:
  $24,\ \underbrace{12}_{\substack{\text{la}\\ \text{metà}}},\ \underbrace{8}_{\substack{\text{la}\\ \text{terza}\\ \text{parte}}}$ *STOP! 8 è anche divisore di 40; quindi* $\text{M.C.D.}(24, 40) = 8$
- per determinare il M.C.D. fra 12, 30 e 64, elenchiamo a ritroso i divisori di 12:
  12, 6, 4, 3, 2 *STOP! 2 è anche divisore di 30 e 64; quindi* $\text{M.C.D.}(12, 30, 64) = 2$

C'è anche una regola meccanica
per cercare il M.C.D.:
basta scomporre i numeri dati in fattori primi, poi prendere soltanto i fattori comuni, ciascuno una sola volta e con l'esponente più basso.
La regola è valida anche se i numeri sono più di due.
Esempi:

$\text{M.C.D.}(60, 96) = ?$

$60 = \boxed{2^2} \cdot \boxed{3} \cdot 5$

$96 = 3 \cdot 2^5$

$\text{M.C.D.}(60, 96) =$
$= \boxed{2^2 \cdot 3} = 12$

$\text{M.C.D.}(32, 36, 40) = ?$

$32 = 2^5$

$36 = \boxed{2^2} \cdot 3^2$

$40 = 5 \cdot 2^3$

$\text{M.C.D.}(32, 36, 40) =$
$= \boxed{2^2} = 4$

Illustriamo con un esempio
lo **schema per la scomposizione di un intero in fattori primi**

42900	2
21450	2
10725	3
3575	5
715	5
143	11
13	13
1	

$\mathbf{42900 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13}$

Il procedimento consiste nel domandarsi se il numero dato è divisibile per 2; in caso affermativo si scrive 2 sulla colonna di destra, mentre sulla colonna di sinistra si riporta il quoziente. Sul quoziente ottenuto si itera (= ripete) il procedimento. Se non c'è divisibilità per 2, si prova per 3, per 5, per 7, … Ci si arresta quando, a forza di divisioni successive, sulla colonna di sinistra si ottiene 1.

Poiché qualsiasi intero è divisibile per 1, fra i divisori comuni a due o più interi, 1 compare senz'altro; se poi 1 è l'*unico* divisore comune fra gli interi considerati, quindi è anche il loro M.C.D., si dirà che gli interi in questione sono "*primi fra loro*".

Definizione - ♥ **Due interi sono detti "primi fra loro" se non ammettono divisori comuni, a parte il divisore "banale" 1; in altre parole, se il loro M.C.D. è 1.** Ad esempio, 15 e 32 sono primi fra loro.
Osserva che due numeri "primi fra loro" non devono per forza essere "primi"! Non c'entra!

ESERCIZI Calcola, col metodo che ti sembra più opportuno, il M.C.D. delle seguenti famiglie di interi.

1) (12, 16) **2)** (75, 50)
3) (31, 62) **4)** (28, 45)
5) (96, 64) **6)** (216, 360)
7) (8, 10, 12, 15) **8)** (8, 16, 24, 32)
9) (75, 90) **10)** (18, 30, 54)
11) (144, 120) **12)** (6, 9, 12)
13) (225, 3750) **14)** (539, 308)
15) (1296, 1458) **16)** (572, 364)
17) (675, 8704) **18)** (961, 279)
19) (864, 1620, 2400) **20)** (247, 299, 437)

21) I due numeri 637 e 1573 sono primi fra loro?

22) Trova il più piccolo numero non primo, che sia primo con 6.

RISULTATI

1) 4	2) 25	3) 31	4) 1
5) 32	6) 72	7) 1	8) 8
9) 15	10) 6	11) 24	12) 3
13) 75	14) 77	15) 162	16) 52
17) 1	18) 31	19) 12	20) 1
21) No (sono entrambi divisibili per 13)			22) 25

4. MINIMO COMUNE MULTIPLO (m.c.m.)

Il “minimo comune multiplo” fra due (o più) interi, è il più piccolo fra i loro multipli comuni.

Es.

Cerchiamo il minimo comune multiplo fra 15 e 18.
Scriviamo i multipli di 15 e quelli di 18, evidenziando i multipli comuni:

$\textit{Multipli di } 15:\ 15\quad 30\quad 45\quad 60\quad 75\quad \boxed{90}\quad 105\quad 120\quad 135\quad 150\quad 165\quad \boxed{180}\quad 195\quad 210\quad \ldots$

$\textit{Multipli di } 18:\ 18\quad 36\quad 54\quad 72\quad \boxed{90}\quad 108\quad 126\quad 144\quad 162\quad \boxed{180}\quad 198\quad 216\quad 234\quad 252\quad \ldots$

I multipli comuni a 15 e 18 sono: 90, 180, 270, 360, …
E fra questi, il più piccolo è 90, quindi $\text{m.c.m.}(15, 18) = 90$

Nella pratica, per cercare il m.c.m. - nei casi semplici - si elencano, mentalmente, i successivi multipli di uno dei numeri dati (conviene scegliere il più grande!) e ci si arresta non appena si incontra un numero che sia multiplo anche dell’altro (o degli altri).

Ad esempio:

- per determinare il m.c.m. fra 6 e 8, immaginiamo la sequenza dei multipli di 8:
  8, 16, 24 *STOP!* 24 *è anche multiplo di* 6*; quindi* $\text{m.c.m.}(6, 8) = 24$
- per determinare il m.c.m. fra 10, 12 e 15, immaginiamo la sequenza dei multipli di 15:
  15, 30, 45, 60 *STOP!* 60 *è anche multiplo di* 10 *e di* 12*; quindi* $\text{m.c.m.}(10, 12, 15) = 60$

C’è anche una regola meccanica per determinare il m.c.m.:
basta scomporre i numeri dati in fattori primi, poi prendere tutti i fattori trovati, comuni e non comuni, ciascuno una sola volta e con l’esponente più alto.
La regola è valida anche se i numeri sono più di due. Ecco un paio di esempi:

$$\text{m.c.m.}(15,18) = ?$$
$$15 = 3\cdot\boxed{5}$$
$$18 = \boxed{2}\cdot\boxed{3^2}$$
$$\text{m.c.m.}(15,18) = \boxed{2\cdot 3^2\cdot 5} = 90$$

$$\text{m.c.m.}(32, 36, 40) = ?$$
$$32 = \boxed{2^5}$$
$$36 = 2^2\cdot\boxed{3^2}$$
$$40 = \boxed{5}\cdot 2^3$$
$$\text{m.c.m.}(32, 36, 40) = \boxed{2^5\cdot 3^2\cdot 5} = 1440$$

Se due interi sono “primi fra loro” (= non hanno divisori comuni, a parte il divisore “banale” 1) allora il loro m.c.m. è il prodotto dei numeri stessi. Ad esempio, $\text{m.c.m.}(15, 32) = 15\cdot 32 = 480$

Una relazione notevole lega il M.C.D. e il m.c.m. di una coppia di interi a, b qualsiasi: se li si moltiplica fra loro, il risultato di questa operazione è uguale al prodotto di a per b!

$$\mathbf{M.C.D.(a, b)\cdot m.c.m.(a, b) = ab}$$

♥ NOTA: nella scrittura ab, fra la lettera a e la lettera b è sottinteso il puntino di moltiplicazione: $ab = a\cdot b$.
In effetti, tale puntino solitamente si tralascia nei casi in cui il numero che starebbe *a destra* del puntino è simboleggiato da una *lettera*: $2\cdot x = 2x$, $x\cdot y = xy$; invece in $x\cdot 2$ o $2\cdot 3$ NON sarebbe corretto ometterlo.

Ad esempio, puoi verificare, per esercizio, che $\text{M.C.D.}(4, 6)\cdot\text{m.c.m.}(4, 6) = 4\cdot 6$

Di conseguenza, $\mathbf{M.C.D.(a, b) = \dfrac{ab}{m.c.m.(a, b)}}$ e $\mathbf{m.c.m.(a, b) = \dfrac{ab}{M.C.D.(a, b)}}$

ESERCIZI Calcola, col metodo che ti sembra più opportuno, il m.c.m. delle seguenti famiglie di interi.

1) (6, 9) **2)** (11, 33)
3) (12, 16) **4)** (75, 50)
5) (25, 20) **6)** (72, 108)
7) (6, 8, 45) **8)** (16, 24, 100)
9) (8, 10, 12, 15) **10)** (8, 16, 24, 32)
11) (96, 64) **12)** (216, 320)
13) (225, 3750) **14)** (16, 20, 24)
15) (48, 120) **16)** (375, 1250)

17) Se due numeri hanno per prodotto 2160 e per M.C.D. 12, qual è il loro m.c.m.?

18) Se Anna va a fare footing ogni 3 giorni e Bruno ogni 7, e quest’oggi si sono allenati entrambi, fra quanti giorni accadrà di nuovo che facciano allenamento tutti e due?

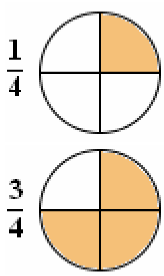
RISULTATI

1) 18 2) 33 3) 48 4) 150 5) 100 6) 216 7) 360 8) 1200
9) 120 10) 96 11) 192 12) 8640 13) 11250 14) 240 15) 240
16) 3750 17) 180 18) 21

5. FRAZIONI

Per rappresentare quei casi, molto frequenti, in cui una data unità va suddivisa in più parti uguali, si utilizzano dei numeri di nuovo tipo: le frazioni.
Facciamo, senza pretese di completezza, alcune riflessioni su di esse.

Ad esempio, la frazione $\frac{1}{4}$ descrive la fetta di torta che abbiamo ombreggiato qui a destra:



$\mathbf{\frac{1}{4}}$ **esprime ciò che si ottiene suddividendo l'unità in 4 parti uguali, e prendendone una**.

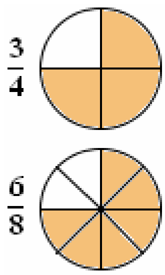
Col simbolo $\mathbf{\frac{3}{4}}$ **indichiamo un nuovo numero, che descrive le situazioni in cui una unità è stata suddivisa in 4 parti uguali, e si sono poi prese 3 di queste parti uguali**.

In generale, in una frazione $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ (per esigenze di spazio, scriveremo a volte $\mathbf{a}/\mathbf{b}$)

- il numero **b** è il "**denominatore**" e dice **in quante parti uguali l'unità è stata suddivisa**,
- il numero **a** è il "**numeratore**" e dice **quante di queste parti sono state prese**.

Data una frazione, se si moltiplicano per uno stesso intero sia il numeratore che il denominatore, si otterrà sempre una frazione uguale a quella di partenza (proprietà invariantiva).

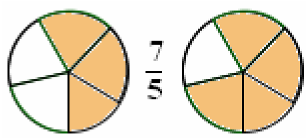
Ad esempio, se prendo la frazione 3/4 e moltiplico per 2 sia "sopra" che "sotto", ottengo quella frazione, 6/8, che descrive il fatto di dividere l'unità in 8 parti (anziché 4), prendendo poi 6 di quelle parti (anziché 3); ogni parte è ora la metà rispetto alla suddivisione precedente, ma in compenso, di queste "mezze fette", ne prendo il doppio, quindi finisco per prendere la stessa porzione dell'unità che avevo preso prima.



Ma allora, **procedendo a ritroso, se una frazione è tale che si possano dividere per uno stesso intero sia il numeratore che il denominatore, tale "semplificazione" si potrà effettuare, perché la frazione così ottenuta sarà uguale a quella da cui si era partiti.**

Ad esempio, $\frac{6}{8}=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}}, \quad \frac{20}{30}=\frac{\cancel{20}^{2}}{\cancel{30}_{3}}$

Ha senso anche considerare frazioni col numeratore più grande del denominatore: se compro una torta e ne lascio i 3/5 per la mamma, e mia sorella compra un'altra torta uguale alla mia lasciandone i 4/5 alla mamma, allora la mamma si troverà ad avere 7 fette, ciascuna uguale alla quinta parte di una torta, ossia: si troverà ad avere 7/5 di torta.



Un intero n equivale alla frazione $\mathbf{n/1}$. Divido l'unità in una sola parte (quindi la lascio inalterata); poi prendo n oggetti uguali a quello ottenuto. Ho preso così n unità! $\mathbf{n/1=n}$.

Quanto alla "**somma**" tra frazioni, essa dovrà, come coi numeri interi, avere il significato di "fare il totale".

Dunque, ad esempio, è ovvio che dovrà essere $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$

(divido l'unità in 7 parti uguali e ne prendo 2; poi divido un'altra unità in 7 parti uguali e ne prendo 4 – oppure, prendo altre 4 parti sempre dalla solita unità suddivisa in sette – ; in totale, le parti che ho preso, a quale porzione di unità corrisponderanno? Ovviamente, corrispondono a 6 "fette" ciascuna uguale alla settima parte dell'unità: $6/7$).

Quindi, **quando le due frazioni hanno lo stesso denominatore, per sommarle è sufficiente conservare lo stesso denominatore, e prendere come numeratore la somma dei numeratori.**

Se le frazioni da sommare *non* hanno lo stesso denominatore, c'è qualche difficoltà in più, facilmente superabile. Per meglio fissare le idee, ragioniamo su di un esempio.

Supponiamo di dover effettuare la somma $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}$. Purtroppo le due frazioni non hanno lo stesso denominatore.

Se però riuscissimo a riscrivere ciascuna frazione, tramite la proprietà invariantiva, in modo da ottenere due nuove frazioni, rispettivamente equivalenti come valore alle due precedenti, ma aventi denominatori identici, allora potremmo effettuare la somma fra queste ultime, e sarebbe esattamente come sommare quelle di partenza.

Vogliamo, in definitiva, arrivare alla situazione $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{...}{\Delta}+\frac{...}{\Delta}$ dove “triangolino” dovrà essere un numero ricavato applicando a ciascuna frazione l’invariantiva, quindi moltiplicando il 4 per un certo intero, ma anche moltiplicando il 6 per un certo altro intero; perciò dovrà essere un multiplo comune del 4 e del 6.

Per comodità possiamo prendere $\Delta = 12 = \text{m.c.m.}(4,\ 6)$. E fare dunque così: $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{...}{12}+\frac{...}{12}$

Ora, quali due numeri dovremo mettere al posto dei puntini?

Ragioniamo. Se vogliamo trasformare la frazione $\frac{7}{4}$ in $\frac{...}{12}$,
utilizzando la proprietà invariantiva in modo che il valore della frazione non cambi,
dovremo sostituire ai puntini quel numero che è ottenibile a partire dal 7 moltiplicandolo
per lo stesso fattore che a partire dal 4 ci porta a ottenere il 12, ossia il 3
(osserviamo che 3 è il numero di volte in cui il 4 è contenuto nel 12, ossia è il risultato della divisione 12:4).

E allo stesso modo, se vogliamo trasformare la frazione $\frac{5}{6}$ in $\frac{...}{12}$,
al posto dei puntini dovremo metterci quel numero che è ottenibile a partire dal 5 moltiplicandolo
per lo stesso fattore che a partire dal 6 ci porta a ottenere il 12, ossia il 2
(osserviamo che 2 è il numero di volte in cui il 6 è contenuto nel 12, ossia è il risultato della divisione 12:6).
Ricapitoliamo. Al posto dei puntini ci devono andare, rispettivamente, i risultati di $(12:4)\cdot 7$ e di $(12:6)\cdot 5$

e si giunge alla situazione $\boxed{\frac{7}{4}+\frac{5}{6}} = \cancel{\frac{21}{12}+\frac{10}{12}} = \boxed{\frac{\overset{(12:4)\cdot 7}{\overset{\uparrow}{21}} + \overset{(12:6)\cdot 5}{\overset{\uparrow}{10}}}{12}} = \frac{31}{12}$

Il secondo passaggio è stato cancellato perché nella pratica può essere saltato per brevità: quindi in definitiva

per sommare due, o più, frazioni (o sottrarre due frazioni) si scrive una sola frazione, avente a denominatore il cosiddetto “minimo comun denominatore” (m. c. d.) ossia il m. c. m. dei denominatori iniziali e a numeratore la somma (la differenza) fra i numeri determinati “dividendo il denominatore comune per ogni denominatore, e moltiplicando il numero così ottenuto per «ciò che sta sopra»”

La **moltiplicazione di una frazione per un intero** avrà ancora il significato di “somma ripetuta”: $\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ $\left(\text{dunque è } \frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 1}\right)$

mentre per quanto riguarda la **moltiplicazione di una frazione per un’altra frazione**, osserviamo che ad es. $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}$

è come dire che prendo una porzione da $\frac{1}{4}$, la divido in 5 parti uguali (ottenendo $\frac{1}{20}$), poi ne prendo 3 (ecco $\frac{3}{20}$).

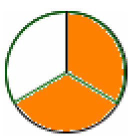
In generale, si vede che è “logico” fissare la **regola** $\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\cdot\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}}$.

La divisione fra due frazioni (in particolare: fra un intero e una frazione, o viceversa), **si effettua moltiplicando la 1^{a} frazione per “la 2^{a} capovolta”**: es. $\frac{2}{5}:\frac{6}{7}=\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{6}_3}=\frac{7}{15}$. In situazioni semplici come $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{3}:\frac{2}{1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$,
il perché si capisce senza fatica: è ovvio che dividere per 2 una “fetta” da 1/3 significa ottenere una “fetta” da 1/6, dunque è corretto affermare che la divisione per $2 = 2/1$ equivalga alla moltiplicazione per 1/2.
Puoi ora cercare di riflettere per conto tuo sulle motivazioni della regola in altri casi meno elementari; vedi anche ⇨;
noi comunque ci ritorneremo sopra più avanti, quando parleremo di “**reciproco**” in un contesto di “numeri relativi”.

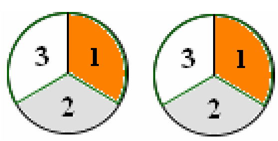
- **Un’ultima osservazione: una frazione $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ equivale sostanzialmente alla divisione $\mathbf{a}:\mathbf{b}$.**

  Prendiamo infatti, ad esempio, la frazione $\frac{2}{3}$; essa equivale alla divisione $2:3$, perché

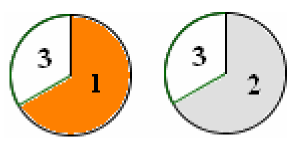
A) $\frac{2}{3}$ significa:
spezzo un’unità in 3 parti uguali,
poi prendo 2 di queste parti …



B) … ma la quantità così ottenuta è uguale a ciascuna di quelle
che si avrebbero “dividendo 2 unità in 3 parti” (2:3), ossia
prendendo 2 unità e ripartendo questo complesso in 3 parti uguali,
con la finalità di “ripartire equamente la coppia di torte fra 3 persone”.



oppure



6. NUMERI CON LA VIRGOLA

Tanto per fare un esempio, cosa significa $3,625$? Semplice: $\boxed{3,625 = 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}}$.

Insomma, **un numero con la virgola (si può usare la virgola, oppure, all'anglosassone, il "punto decimale") equivale ad una somma**: la somma fra un intero e una o più frazioni aventi a denominatore 10, 100, 1000, ecc.

Ma allora … **che dire di quei numeri che presentano, dopo la virgola, infinite cifre?** Ad esempio si ha

$$1,\overline{3} = 1,333333... = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{3}{1000000} + ...$$

leggi: "1 virgola 3 col 3 periodico"

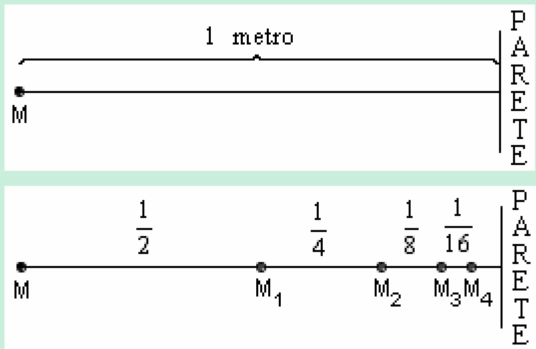
dove i puntini di sospensione indicano che la sequenza non termina, ma al contrario è illimitata; e la situazione non è affatto banale, perché a questo punto **è spontaneo domandarsi:**
ma avrà un senso una somma con infiniti addendi?
… e non dovrebbe, semmai, una tale somma, dare un risultato "infinito"?

A riflettere su queste tematiche, ci aiuterà una marionetta programmata per muoversi in un modo molto speciale.

Una diabolica marionetta puntiforme M si trova inizialmente alla distanza di 1 metro da una parete.

Improvvisamente, comincia a muoversi a scatti, facendo **uno scatto al secondo,** e **ad ogni scatto percorrendo, in direzione della parete, uno spazio uguale alla META' della distanza che ancora la separa dalla parete.**

Primo scatto: 1/2 metro. Resta ancora 1/2 metro dalla parete.
Secondo scatto: metà del 1/2 metro restante, cioè 1/4 di metro. Resta ancora 1/4 di metro dalla parete.
Terzo scatto: metà di 1/4 di metro, cioè 1/8 di metro. E così via ...



Dopo 10 "scatti", la marionetta ha percorso un tragitto uguale a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$ di metro; quasi 1 metro, dunque (… e, in effetti, si trova ad appena 1/1024 di metro dalla parete).

Dopo 1000 scatti troveremo la marionetta straordinariamente vicina alla parete, parete che tuttavia non sarà ancora stata raggiunta, proprio perché ad ogni scatto la marionetta percorre **solo la metà** dello spazio che la separava dalla parete prima dell'istante dello scatto. In effetti dopo 1000 scatti la distanza percorsa dalla marionetta è uguale a metri

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^{1000}} = 1 - \frac{1}{2^{1000}} = 1 - \textit{una quantità davvero microscopica !!!}$$

Il movimento non ha una fine.
Però, **per esprimere il fatto che, fotografando la marionetta dopo un numero molto alto di "scatti", la si trova ad una distanza, dal punto di partenza, ESTREMAMENTE vicina a 1 metro (inferiore a 1 metro soltanto di "un soffio"), è del tutto ragionevole scrivere**

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 1}$$

La marionetta ci ha insegnato che UNA SOMMA DI INFINITI ADDENDI PUO' AVERE UN SENSO, E NON E' DETTA CHE ABBIA RISULTATO INFINITO!!!

Ritornando ai nostri numeri con la virgola, **si può dimostrare che una somma come**

$$\mathbf{1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{3}{1000000} + ... = 1,333333...}$$

si comporta come la "somma della marionetta", cioè è "convergente"
(**= tende ad un valore finito**, precisamente: ad un valore finito compreso fra 1 e 2)
e non "divergente", come sarebbe invece ad esempio la somma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

♥ **Queste riflessioni ci hanno fatto dunque comprendere il senso di una scrittura come 1,333333… , anche se tale scrittura sottintende una somma di infiniti addendi.**

I numeri con la virgola, detti anche "decimali", si dividono in FINITI e ILLIMITATI;
fra questi ultimi distinguiamo i PERIODICI (semplici o misti) e gli ILLIMITATI NON PERIODICI.

❑ Decimali FINITI

$$\boxed{3,625=}\ 3+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}=\frac{3000+600+20+5}{1000}=\boxed{\frac{3625}{1000}}=\frac{\cancel{3625}^{29}}{\cancel{1000}_{8}}=\frac{29}{8}$$

Un decimale finito è trasformabile, molto facilmente, in frazione:

basta scrivere
- **a numeratore, il numero senza la virgola**
- **a denominatore, 1 seguito da tanti 0 quante sono le cifre dopo la virgola**

❑ Decimali PERIODICI

Se un decimale ha, dopo la virgola, un gruppo di cifre che si ripete sempre uguale, illimitatamente, si dice che si tratta di un numero "periodico"
e *la cifra, o il gruppo di cifre, che si ripete*, prende il nome di "PERIODO".
Il periodo è indicato con una soprallineatura, o delimitato da parentesi: $1,\overline{3}$ oppure $1,(3)$.

- **Se il periodo inizia subito dopo la virgola, si parla di periodico "SEMPLICE";**
- **se invece, dopo la virgola e prima del periodo, c'è un gruppo di cifre che *non* si ripete, si parla di periodico "MISTO" e *la cifra, o gruppo di cifre, che sta dopo la virgola e prima del periodo* prende il nome di "ANTIPERIODO".**

Esempi:

$1,\overline{3}=1,333333...$ è un periodico SEMPLICE. Il periodo è 3.
$29,\overline{41}=29,414141...$ è un periodico SEMPLICE. Il periodo è 41.
$29,4\overline{1}=29,411111...$ è un periodico MISTO. Il periodo è 1 e l'antiperiodo è 4.
$1,23\overline{456}=1,23456456456...$ è un periodico MISTO. Il periodo è 456 e l'antiperiodo è 23.

Un decimale periodico SEMPLICE è facilmente trasformabile in frazione.
Nell'esempio qui a fianco, abbiamo preso il numero $1,\overline{3}$, che abbiamo chiamato x.
Dunque $x=1,333333...=1,\overline{3}$.
Ora, se moltiplichiamo questo numero x per 10, otteniamo un nuovo numero, $10x$, che avrà la virgola spostata di un posto verso destra; tale nuovo numero sarà ancora periodico, con lo stesso periodo del numero iniziale!
$10x=13,33333...=13,\overline{3}$
Se a questo punto sottraiamo membro a membro le due uguaglianze precedenti (la 2^a meno la 1^a: se a = b e c = d, evidentemente sarà anche c – a = d – b), visto che i due numeri in gioco hanno le stesse cifre dopo la virgola, per sottrazione le parti decimali si compenseranno e rimarrà soltanto la differenza fra le parti intere:
$10x-x=13,33333...-1,333333...$
$9x=13-1$ (*10 volte un numero meno lo stesso numero dà 9 volte quel numero*)
$9x=12$

Quest'ultima è una semplice equazione ⇨; dividendo ambo i membri per 9 otteniamo
$\frac{\cancel{9}x}{\cancel{9}}=\frac{12}{9}$ cioè, semplificando, $x=\frac{4}{3}$.

Per controllare la correttezza del risultato ottenuto basta eseguire (vedi qui a destra →) la divisione $4:3$ verificando che il suo risultato è proprio $1,333333...$

$$x=1,\overline{3}$$
$$10x=13,\overline{3}$$
$$10x-x=13,\overline{3}-1,\overline{3}$$
$$9x=13-1$$
$$9x=12$$
$$x=\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}}$$

$$\begin{array}{l|l} 4 & 3 \\ \hline 3 & 1,333... \\ 10 & \\ 9 & \\ 10 & \\ 9 & \\ 10 & \\ 9 & \\ 1... & \end{array}$$

E S E R C I Z I O

Prova a trasformare in frazione il periodico semplice $2,\overline{405}$ col metodo dell'equazione sopra illustrato.
Per quale potenza di 10 occorre moltiplicare, prima di sottrarre membro a membro?
Ragiona: noi vogliamo che dopo la moltiplicazione, quando si sottrarrà membro a membro, LA SOTTRAZIONE AVVENGA FRA DUE NUMERI CON LA STESSA PARTE DECIMALE, in modo che le due parti decimali uguali si elidano e rimanga una differenza fra interi.
Quindi la potenza di 10 per cui moltiplicare sarà in questo caso … (puoi cliccare qui ⇨ per la correzione)
Alla fine, effettua la verifica, ritornando, tramite divisione, dalla frazione ottenuta al numero decimale.

Con un decimale periodico MISTO si può fare pressappoco la stessa cosa; il procedimento però è più laborioso perché

a) occorre dapprima **moltiplicare per un'opportuna potenza di 10 allo scopo di ricondursi ad un periodico semplice** (nell'esempio qui a destra, moltiplichiamo per 100 perché desideriamo spostare la virgola a destra di 2 posti);

b) dopodiché si effettuerà **una seconda opportuna moltiplicazione in modo che il nuovo numero così ottenuto sia ancora periodico semplice, con lo stesso periodo del precedente** (nell'esempio, moltiplichiamo per 1000 perché desideriamo spostare la virgola a destra di altri 3 posti).

c) Soltanto a questo punto, avendo a disposizione **due numeri con la STESSA parte decimale,** si farà la **sottrazione membro a membro**.

$$x = 1,23\overline{456}$$

$$\text{a)}\ 100x = 123,\overline{456}$$

$$\text{b)}\ 100.000x = 123456,\overline{456}$$

$$\text{c)}\ 100.000x - 100x = 123456,\overline{456} - 123,\overline{456}$$

$$99900x = 123456 - 123$$

$$x = \frac{123456 - 123}{99900}$$

ESERCIZIO (correzione ⇨) Prova a trasformare in frazione il periodico misto $1,2\overline{47}$ col metodo dell'equazione. Anche qui, alla fine, effettua la verifica, ritornando, tramite divisione, dalla frazione al decimale.

REGOLA DI TRASFORMAZIONE

Dal "metodo dell'equazione" è possibile ricavare una comoda regola pratica per la trasformazione in frazione dei numeri periodici, semplici o misti. La regola è la seguente:

la "frazione generatrice" di un numero decimale periodico si può costruire scrivendo

- **a numeratore, la differenza fra il numero scritto senza la virgola e senza il simbolo di periodo e il numero costituito da "tutte le cifre che stanno prima del periodo";**
- **a denominatore, tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti (se il periodico è misto) da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.**

Esempi: $3,\overline{21} = \frac{321-3}{99}$ $\quad 2,46\overline{8} = \frac{2468-246}{900}$ $\quad 7,2\overline{05} = \frac{7205-72}{990}$ $\quad 10,\overline{180} = \frac{10180-10}{999}$

ESERCIZI SUI NUMERI CON LA VIRGOLA

Determina la frazione generatrice dei seguenti decimali.
E' richiesto, nel caso dei periodici,
di procedere col metodo dell'equazione
(ovvio, puoi poi servirti anche della regola per controllare).

Alla fine, un po' di pratica di calcolo! Esegui la divisione
numeratore:denominatore
per ritornare dalla frazione al decimale.

NOTA
I **numeri con la virgola** sono anche detti "**decimali**".
NEI PAESI ANGLOSASSONI SI USA IL PUNTO AL POSTO DELLA VIRGOLA.

1) $1,25$ 2) $1,\overline{25}$ 3) $1,2\overline{5}$ 4) $0,00\overline{1}$ 5) $0,0\overline{01}$ 6) $0,\overline{001}$ 7) $0,\overline{076923}$

8) $0,\overline{3}$ 9) $0,\overline{03}$ 10) $3,\overline{45}$ 11) $0,34\overline{5}$ 12) $1,\overline{142857}$ 13) $0,875$ 14) $0,01\overline{24}$

RISULTATI 1) $5/4$ 2) $124/99$ 3) $113/90$ 4) $1/900$ 5) $1/990$ 6) $1/999$ 7) $1/13$ 8) $1/3$ 9) $1/33$ 10) $38/11$ 11) $311/900$ 12) $8/7$ 13) $7/8$ 14) $41/3300$

FRAZIONI E NUMERI CON LA VIRGOLA

Quando si trasforma una frazione, ridotta ai minimi termini (cioè: semplificata il più possibile), in numero con la virgola, si può dimostrare che il numero decimale ottenuto sarà:

I) finito, se nella scomposizione in fattori primi del denominatore non compaiono fattori diversi da 2 e da 5;
II) periodico semplice, se in tale scomposizione i fattori sono tutti diversi da 2 e da 5;
III) periodico misto nel caso restante, cioè qualora il denominatore abbia fra i suoi fattori primi almeno un fattore uguale a 2 o a 5, e almeno un fattore diverso sia da 2 che da 5.

a) Trasforma le seguenti frazioni in numero con la virgola, dopo aver previsto di che tipo sarà quest'ultimo:

$$\frac{7}{40};\ \frac{1}{24};\ \frac{13}{7};\ \frac{2}{9};\ \frac{14}{125};\ \frac{3}{150};\ \frac{65}{33};\ \frac{1}{14};\ \frac{1}{13};\ \frac{1}{26};\ \frac{1}{8}.$$

b) E viceversa, porta i numeri seguenti sotto forma di frazione, *riduci questa ai minimi termini*, dopodiché constata la validità dei tre punti I), II), III): $8,1\overline{4}$; $8,14$; $8,\overline{14}$; $0,012$; $19,\overline{8}$; $1,2\overline{463}$; $10,35$; $7,\overline{7}$; $2,\overline{09}$; $5,55$

❑ Decimali ILLIMITATI NON PERIODICI

Quando io prendo una frazione
con l'intenzione di eseguire la divisione per trasformarla in decimale,
so già che ciascun "RESTO PARZIALE"
che otterrò nel corso del procedimento
sarà sempre MINORE DEL DIVISORE.

Ad esempio, se mi propongo di trasformare in decimale la frazione 34/13,
so già in partenza che i resti parziali che si presenteranno potranno valere:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, oppure 12.

Per i resti parziali via via generati nell'algoritmo di divisione
(*algoritmo* = procedimento per risolvere un problema tramite un numero finito di passi:
clicca sulla freccia ⇨ per approfondimenti)
c'è quindi solo UN NUMERO LIMITATO DI POSSIBILITA'.
E di conseguenza
i resti parziali che si presenteranno non potranno essere tutti diversi fra loro:

- o accadrà di trovare come resto 0 (e allora la divisione avrà termine),
- oppure, qualora ciò non avvenga,
  prima o poi sarà OBBLIGATO a ripetersi
  un resto che era già uscito in precedenza.

```
34   |13
26    2,6153...
[8]0
 78
 [2]0
  13
  [7]0
   65
   [5]0
    39
    [11]0
    ......
```

Fino a questo punto
i "resti parziali"
sono stati:
8, 2, 7, 5, 11
Vuoi andare avanti tu?
Prima o poi
PER FORZA dovrà
ripresentarsi un resto
già visto prima …!!!
(oppure,
comparire il resto 0).

Si verificherà, insomma, **sicuramente o l'una o l'altra fra due eventualità:**

I) esce come resto 0; allora il procedimento si arresta,
la divisione è terminata, ecco un bel decimale FINITO;

II) si ripresenta un resto che si era già presentato prima;
e allora nel quoziente torneranno a ripetersi le stesse cifre
che erano uscite a partire dalla comparsa precedente di quel resto.
Il decimale ottenuto è PERIODICO.

Ricapitolando: una FRAZIONE genera sempre un numero DECIMALE che è

- **FINITO,**
- **oppure è PERIODICO;**

… una frazione non potrà MAI essere equivalente ad un decimale ILLIMITATO NON PERIODICO.

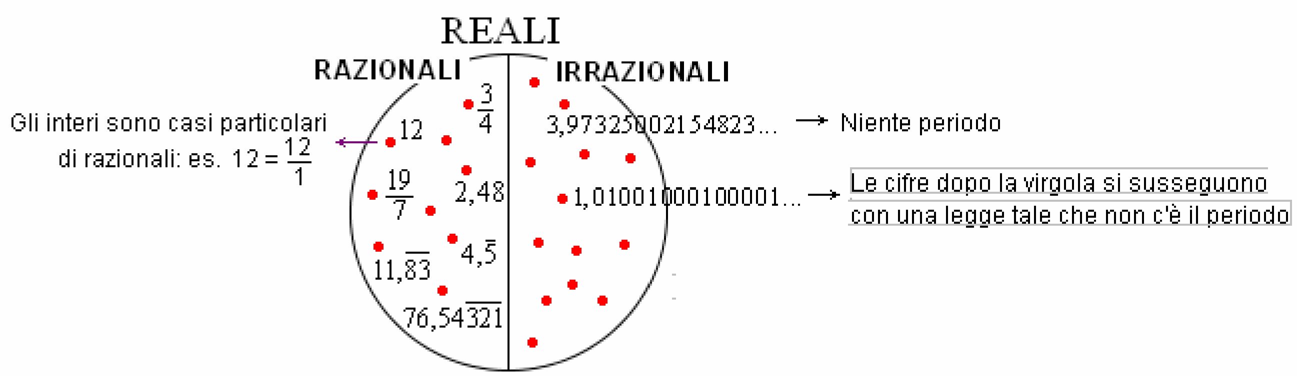
Ne consegue un fatto rilevante:
♥ **I DECIMALI ILLIMITATI NON PERIODICI NON SONO TRASFORMABILI IN FRAZIONE !!!**

♥ **ESISTONO perciò NUMERI CHE NON E' POSSIBILE ESPRIMERE**
SOTTO FORMA DI FRAZIONE (= RAPPORTO, QUOZIENTE FRA DUE INTERI).
ESSI VENGONO CHIAMATI NUMERI "IRRAZIONALI", mentre
QUELLI frazionari o comunque TRASFORMABILI IN FRAZIONE SONO DETTI "RAZIONALI".
L'aggettivo "razionale" deriva dal latino "*ratio*" = (in senso matematico) "rapporto", "quoziente".

DEFINIZIONE - Un numero è detto

- **"RAZIONALE" se è esprimibile come frazione, ossia come "ratio", "rapporto", fra due interi;**
- **"IRRAZIONALE" in caso contrario.**

♥ **L'insieme di TUTTI i numeri, RAZIONALI E IRRAZIONALI, è detto "insieme dei numeri REALI"** ⇨



ESERCIZIO - Prova a trasformare in frazione, con l'apposita regola oppure col metodo dell'equazione,
il numero periodico $0,\overline{9} = 0,99999\ldots$. Che numero ottieni? Sorpresa!!! Come spieghi il risultato? ⇨

7. OPERAZIONI E LORO PROPRIETA' (proprietà che sono valide per tutti i numeri reali!)

♥ PSST … MI RACCOMANDO … QUESTO PARAGRAFO E' DI IMPORTANZA **CAPITALE**!!!

❑ ADDIZIONE O SOMMA $\underbrace{8+5}_{\text{addendi}} = \underbrace{13}_{\text{somma}}$

a) **Proprietà commutativa dell'addizione**:
in una somma, è possibile mutare a piacimento l'ordine degli addendi, e il risultato non cambierà.
$8+5=5+8 \qquad 5+4+3+2+10=10+2+4+5+3$

b) **Proprietà associativa dell'addizione**:
data una somma di più addendi, è possibile, tramite coppie di parentesi,
associare liberamente gli addendi a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.
$11+25+4=11+(25+4)=11+29=40$

c) **Proprietà dissociativa dell'addizione**:
data una somma di più addendi, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi,
si possono sciogliere le parentesi, e il risultato non cambierà.
$5+(4+3)+(2+10)=5+4+3+2+10=24$

❑ MOLTIPLICAZIONE O PRODOTTO $\underbrace{8\cdot 5}_{\text{fattori}} = \underbrace{40}_{\text{prodotto}}$

d) **Proprietà commutativa della moltiplicazione**:
in un prodotto, è possibile mutare a piacimento l'ordine dei fattori, e il risultato non cambierà.
$8\cdot 5=5\cdot 8 \qquad 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 10=10\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 3$

e) **Proprietà associativa della moltiplicazione**:
dato un prodotto di più fattori, è possibile, tramite coppie di parentesi,
associare liberamente i fattori a gruppi, perché così facendo il risultato non cambierà.
$11\cdot 25\cdot 4=11\cdot(25\cdot 4)=11\cdot 100=1100$

f) **Proprietà dissociativa della moltiplicazione**:
dato un prodotto di più fattori, alcuni dei quali raggruppati fra parentesi,
si possono sciogliere liberamente le parentesi, e il risultato non cambierà.
$5\cdot(4\cdot 3)\cdot(2\cdot 10)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 10=1200$

g) **Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:**
quando si deve moltiplicare
una somma per un numero (*vedi esempio qui a fianco*),
è possibile, volendo, moltiplicare per quel numero
ogni singolo addendo della somma,
poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$(5+4+3)\cdot 2=5\cdot 2+4\cdot 2+3\cdot 2=10+8+6=24$

$10\cdot(15+11)=10\cdot 15+10\cdot 11=150+110=260$

$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1\right)\cdot 24=\frac{1}{4}\cdot 24+\frac{1}{3}\cdot 24+1\cdot 24=6+8+24=38$

$a\cdot(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae$ (NOTA)

NOTA - A 2° membro abbiamo tralasciato il puntino di moltiplicazione; clicca sulla freccia ⇨ per sapere *quando* si suole sottintenderlo, e comunque basati sugli esempi riportati nel riquadro a destra. Anche nei casi in cui di solito il puntino viene omesso, è però lecito scriverlo ugualmente specie se si desidera *dare risalto* all'idea di moltiplicazione.

Se ho 2 astucci, in ciascuno dei quali ci sono 5 penne, 4 matite e 3 gomme, per contare il numero totale degli oggetti posso procedere in due modi:

a) contare gli oggetti di ciascun astuccio
$5+4+3=12$
poi moltiplicare per 2 il risultato
$\underbrace{(5+4+3)}_{12}\cdot 2$

b) contare prima tutte le penne $5\cdot 2=10$
poi tutte le matite $4\cdot 2=8$
poi tutte le gomme $3\cdot 2=6$
e infine sommare i numeri così ottenuti:
$\underbrace{5\cdot 2}_{10}+\underbrace{4\cdot 2}_{8}+\underbrace{3\cdot 2}_{6}$

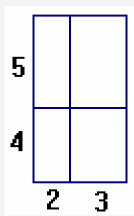
Puntino … sì o no ??? Esempi:
$7\cdot 8,\ 3a,\ a\cdot 3,\ xy,\ 5(x+2),\ (x+2)\cdot 5$

h) **Proprietà distributiva generalizzata:**
quando si deve moltiplicare
una somma per un'altra somma (*vedi esempio a fianco*),
è possibile, volendo, moltiplicare
ciascun addendo della prima somma
per ciascun addendo della seconda,
poi addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

$(2+3)\cdot(4+5)=2\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 4+3\cdot 5=...=45$

$(a+b)\cdot(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be$

Per calcolare l'area di questo rettangolo posso procedere in due modi:



a) calcolare subito l'area totale
$\underbrace{(2+3)}_{\textit{base}}\cdot\underbrace{(\ 4+5\ )}_{\textit{altezza}}$

b) oppure calcolare le quattro aree parziali e poi sommare:
$2\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 4+3\cdot 5$

❑ SOTTRAZIONE $\underset{\text{minuendo}}{\underset{\uparrow}{8}} - \underset{\text{sottraendo}}{\underset{\uparrow}{5}} = \underset{\text{differenza}}{3}$

La sottrazione è definita come l'operazione inversa dell'addizione.
E' quell'operazione mediante la quale, dati due numeri,
se ne trova un terzo che addizionato al secondo dà come risultato il primo:

$$\mathbf{a-b=c \quad \text{se } c \text{ è tale che } \ c+b=a}$$

La sottrazione NON gode

- né della proprietà commutativa $8-5\neq 5-8$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(10-7)-1}_{3-1=2}\neq \underbrace{10-(7-1)}_{10-6=4}$

Gode invece della seguente

i) **Proprietà invariantiva della sottrazione:**
in una sottrazione, è possibile, volendo, addizionare o sottrarre uno stesso numero ad entrambi i termini (minuendo e sottraendo), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{43-27}_{16}=\left\langle \begin{array}{l}(43+3)-(27+3)=46-30=16\\(43-3)-(27-3)=40-24=16\end{array}\right.$$

❑ DIVISIONE $\underset{\text{dividendo}}{\underset{\uparrow}{24}} : \underset{\text{divisore}}{\underset{\uparrow}{4}} = \underset{\text{quoziente}}{6}$

E' definita come l'operazione inversa della moltiplicazione.
Tramite la divisione, dati due numeri, se ne trova un terzo che moltiplicato per il secondo dà come risultato il primo:

$$\mathbf{a:b=c \quad \text{se } c \text{ è tale che } \ c\cdot b=a}$$

La divisione NON gode

- né della proprietà commutativa $24:4\neq 4:24$
- né della associativa/dissociativa $\underbrace{(48:8):2}_{6:2=3}\neq \underbrace{48:(8:2)}_{48:4=12}$

Gode invece delle seguenti

NOTA - Abbiamo visto che una divisione fra due interi e una frazione sostanzialmente si equivalgono.
Ciò in matematica porta a usare la linea di frazione per indicare divisione, anche con termini non interi.
La parola "frazione" è quindi usata a volte in senso "stretto" (=termini interi, paragrafo 5), a volte in senso"lato" (frazione=divisione, termini qualsiasi).

j) **Proprietà invariantiva della divisione (o delle frazioni in senso "lato", vedi NOTA qui sopra):**
in una divisione (o in una frazione), è possibile, volendo, moltiplicare o dividere per uno stesso numero (purché diverso da 0! La divisione per 0 è una operazione "non eseguibile", vedi pagina successiva) entrambi i termini (dividendo e divisore; numeratore e denominatore), e il risultato non cambierà.

$$\underbrace{30:6}_{5}=\left\langle \begin{array}{l}(30\cdot 2):(6\cdot 2)=60:12=5\\(30:2):(6:2)=15:3=5\end{array}\right. \qquad 3{,}2:0{,}8=(3{,}2\cdot 10):(0{,}8\cdot 10)=32:8=4 \qquad \frac{21}{28}=\frac{\cancel{21}^{\,3}}{\cancel{28}_{\,4}}\left[\frac{21:7}{28:7}\right]$$

k) **Proprietà distributiva del quoziente rispetto alla somma:**
quando si deve dividere una somma per un numero,
è possibile, volendo, dividere per quel numero ciascun addendo della somma,
poi addizionare i quozienti parziali così ottenuti.

$$(15+21+36):3=15:3+21:3+36:3=5+7+12=24 \qquad \frac{40+12}{16}=\frac{40}{16}+\frac{12}{16}$$

$(a+b):c=a:c+b:c$ *o anche* $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$ **OCCHIO!!! Invece** $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a+b}} \underset{\text{DA}}{\overset{\text{DIVERSO}}{\neq}} \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}+\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$ **!!!!**

l) **"Per moltiplicare, o dividere, un prodotto per un numero …"**
… basta moltiplicare, o dividere, per quel numero, UNO SOLO A SCELTA fra i fattori del prodotto.
In particolare,
quando si deve dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimere quel fattore.

$$(7\cdot 5\cdot 4)\cdot 2=\left\langle \begin{array}{l}14\cdot 5\cdot 4\\7\cdot 10\cdot 4\\7\cdot 5\cdot 8\end{array}\right. \qquad (10\cdot 12):2=\left\langle \begin{array}{l}5\cdot 12\\10\cdot 6\end{array}\right. \qquad (7\cdot 5\cdot 3):5=7\cdot 1\cdot 3=7\cdot 3$$

❑ LA "DIVISIONE INTERA"

Così viene chiamata la divisione fra due interi, quando non si accetta un risultato frazionario, ma si vuole invece un "quoziente intero" e un resto (vedi pagina 114 per approfondimenti).

Se a, b sono due interi (con $b \neq 0$), e si intende che il simbolo "**:**" indichi DIVISIONE INTERA, allora

♥ $\underbrace{\mathbf{a:b}}_{\text{divisione intera}} \mathbf{= c}$ quando è $\mathbf{c \cdot b + r = a}$, **con** $\mathbf{r < b}$ **(a, b, c, r interi,** $\mathbf{b \neq 0}$**)**

Notare l'**IMPORTANTISSIMA** condizione $\mathbf{r<b}$: **il resto dev'essere sempre minore del divisore**.
Ad esempio, è giusto scrivere che $23:5=4$ (col resto di 3) perché $4 \cdot 5+3=23$, ed è $3<5$.

❑ LA "LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO"

Prende il nome di "legge di annullamento del prodotto" la proposizione (= affermazione) seguente:

♥ **"Se almeno uno dei fattori di un prodotto è 0, allora il prodotto vale 0;
e viceversa, se un prodotto è uguale a 0, allora sarà uguale a 0 almeno uno dei fattori".**

❑ GLI "ELEMENTI NEUTRI" DELLA SOMMA E DEL PRODOTTO

Si dice che **lo zero (0) è "l'elemento neutro** (= ininfluente) **della somma"**
per indicare che, sommato a qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x,\ x+0=x$ ($\forall$ significa "per ogni").

Si dice che il numero **1 è "l'elemento neutro del prodotto"**
per indicare che, moltiplicato per qualsiasi numero, lo lascia invariato: $\forall x,\ x \cdot 1 = x$.

In relazione al prodotto, 0 si comporta invece da "elemento assorbente", perché $\forall x,\ x \cdot 0 = 0$.
Osserviamo a proposito che **l'operazione di addizione non possiede alcun "elemento assorbente"**.

❑ IL PROBLEMA DELLA DIVISIONE PER ZERO

La **divisione** (stiamo ora parlando della divisione "ordinaria", NON della "divisione intera") è definita come **l'operazione inversa della moltiplicazione**, ossia come l'operazione per cui, dati due numeri a, b, si trova quel terzo numero c il quale, se moltiplicato per b, restituisce come risultato a.

$\mathbf{a:b=c}$ se c è quel numero tale che $\mathbf{c \cdot b = a}$

♥ Consideriamo ora, ad esempio, la divisione $1:0$.
Essa "ci chiede" di determinare un numero tale che, moltiplicato per 0, dia come risultato 1; ma un numero siffatto NON ESISTE, in quanto ogni numero, quando viene moltiplicato per 0, dà sempre risultato 0 e quindi non potrà mai dare 1.
Perciò l'operazione $1:0$ è IMPOSSIBILE, ossia PRIVA DI RISULTATO.
E' ovvio che alla stessa conclusione saremmo giunti considerando le operazioni 5:0; 7:0; 4,21:0; …

♥ Se invece consideriamo l'operazione $0:0$, questa "ci chiede" di determinare un numero tale che, moltiplicato per 0, dia come risultato 0; ma QUALSIASI numero gode di questa proprietà!
Perciò l'operazione $0:0$ è INDETERMINATA, nel senso che non ha un risultato ben determinato, ma potrebbe avere **infiniti** risultati, perché qualunque numero potrebbe "pretendere" di esserne il risultato.

♥ Infine, 0:1=0 (operazione "normale"; esiste uno e un sol numero che moltiplicato per 1 dia 0, ed è lo 0)

RIASSUNTO

Indicato con a un qualsiasi numero non nullo,

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a:0=\dfrac{a}{0}=\text{IMPOSSIBILE}}\\ \mathbf{0:0=\dfrac{0}{0}=\text{INDETERMINATA}}\end{array}\right]\ \text{operazioni "non eseguibili", in inglese "ILLEGAL" (= illecite)}$$

$$\mathbf{0:a=\frac{0}{a}=0}$$

❑ 1/0 UGUALE "INFINITO" ???

Forse da qualche parte ti sarà capitato di leggere che $\frac{1}{0}=\infty$ (il simbolo ∞ sta per "infinito").

La scrittura $1/0=\infty$ *va correttamente interpretata.*
Essa compare nello studio dei "limiti" (a livello pre-universitario), e comunque, semplificando un poco, si può dire che è sostanzialmente un modo conciso per esprimere il concetto seguente:

Se prendiamo una frazione che abbia 1 a numeratore, e facciamo "tendere a zero il denominatore", ossia facciamo assumere al denominatore valori piccolissimi, vicinissimi a zero, allora il risultato assumerà valori grandissimi, "tendenti a infinito".

$$\frac{1}{0,1}=\frac{1}{\frac{1}{10}}=1 \cdot 10=10 \qquad \frac{1}{0,01}=100 \qquad \frac{1}{0,001}=1000 \qquad \frac{1}{0,000001}=1000000 \qquad \text{ecc. ecc.}$$

8. LE POTENZE

A) DEFINIZIONE DI "POTENZA"

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{5 \to \textit{esponente}}_{\searrow \textit{base}}$ (leggi: "7 alla quinta", "7 elevato alla quinta")

Altri esempi:

$11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^3$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

DEFINIZIONE

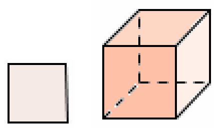
♥ **Si dice "POTENZA" un particolare prodotto, nel quale i fattori sono tutti uguali fra loro:**
precisamente,
si hanno tanti fattori tutti uguali alla "BASE"
(= il numero che viene moltiplicato per sé stesso più volte)
quante sono le unità dell' "ESPONENTE"
(= il numero che indica quanti sono i fattori in gioco).

Quando l'esponente è 2, anziché dire "alla seconda" si può anche dire "al quadrato";
e quando l'esponente è 3, anziché dire "alla terza" si può anche dire "al cubo".

$7^2 = \begin{cases} 7 \text{ "alla seconda"} \\ 7 \text{ "al quadrato"} \end{cases}$

$7^3 = \begin{cases} 7 \text{ "alla terza"} \\ 7 \text{ "al cubo"} \end{cases}$

La ragione di tale terminologia sta nel fatto che
- *l'area di un quadrato*
  si ottiene elevando alla seconda la misura del lato,
- *il volume di un cubo*
  si ottiene elevando alla terza la misura del lato.



$A = \ell^2$ $V = \ell^3$

QUESITI: APPLICAZIONI DELLE POTENZE (risposte a pag. 17)

a) Se volessi essere sicuro di indovinare tutte le partite sulla schedina del Totocalcio dovrei giocare tutte le "colonne" che teoricamente possono "uscire". Quante sono?

Una schedina del Totocalcio riporta 13 partite (versione "classica") o 14 partite (Totocalcio "moderno"), per ciascuna delle quali lo scommettitore può scegliere fra 3 pronostici, indicati con
- *"1" (vittoria della squadra che gioca "in casa")*
- *"X" (pareggio)*
- *"2" (vittoria della squadra che gioca "fuori casa").*

1	Cagliari-Milan	**2**
2	Juventus-Napoli	**X**
3	Inter-Lazio	**X**
4	Roma-Sampdoria	**1**
…	…	**…**

Evidentemente, il quesito avrà due risposte diverse a seconda che si pensi
I) al Totocalcio "classico" a 13 partite
II) oppure alla versione più recente con 14 partite

b) In quanti modi diversi è possibile scrivere un BYTE (= sequenza di 8 BIT)?

*Un "qualcosa" che possa trovarsi in due, e solo due, condizioni distinte, prende il nome di BIT (**BIT = Binary digIT = cifra binaria**).*
Le due condizioni, i due "stati" in questione vengono di solito indicati come "stato 0" e "stato 1". Possiamo allora dire che un "bit" è una cifra che può assumere soltanto due valori: il valore 0, oppure il valore 1.

Il termine "byte" (leggi: bàit) indica, come dicevamo, una sequenza di 8 bit.
Quindi, ad esempio, la sequenza 10010101 è un byte.
Ancora: 00110001 è un byte; 11111111 è un byte.

Questo

0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

è un esempio di byte

Clicca sulla freccia ⇨
*se desideri approfondire il ruolo del bit e del byte nel mondo dei **computer**.*

c) La distanza della Terra dalla galassia di Andromeda ⇨ è di km 21000000000000000000 circa. E' possibile scrivere questo numero in forma più "compatta"?

B) PROPRIETA' DELLE POTENZE (♥ paragrafo **FONDAMENTALE!!!**)

1) $5^4 \cdot 5^3 = (5\cdot5\cdot5\cdot5)\cdot(5\cdot5\cdot5) \overset{\text{proprietà dissociativa}}{=} 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^7$ Quindi $\boxed{5^4 \cdot 5^3} = 5^7 = \boxed{5^{4+3}}$

Proprietà ADDITIVA DEGLI ESPONENTI $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza
che ha per base la stessa base, e per esponente la somma degli esponenti.

Dimostrazione (NOTA):

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot ....\cdot a}_{n\ fattori}) \overset{\text{dissociativa}}{=} \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot ....\cdot a}_{n\ fattori}}_{m+n\ fattori} = a^{m+n}$$

La proprietà continua a valere anche con più di due fattori. Es. $7^5 \cdot 7^2 \cdot 7^3 = 7^{10}$

NOTA
La catena riportata all'inizio non è una vera "dimostrazione" perché si riferisce a un caso specifico: una "dimostrazione" deve invece avere carattere generale.

2) $7^6 : 7^2 = \dfrac{7^6}{7^2} = \dfrac{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{7\cdot7} \overset{\text{proprietà invariantiva}}{=} \dfrac{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{\cancel{7}\cdot\cancel{7}} = 7\cdot7\cdot7\cdot7 = 7^4$ Quindi $\boxed{7^6 : 7^2} = 7^4 = \boxed{7^{6-2}}$

Proprietà SOTTRATTIVA DEGLI ESPONENTI $\boxed{a^m : a^n = a^{m-n} \text{ opp. } \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n)}$

Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è una potenza
che ha per base la stessa base, e per esponente la differenza degli esponenti.

Dimostrazione: $$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot ......\cdot a}^{m\ fattori}}{\underbrace{a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n\ fattori}} \overset{\text{proprietà invariantiva}}{=} \frac{\overbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot ....\cdot\cancel{a}}^{\substack{n\ fattori \\ se\ ne\ vanno...}}\ \overbrace{\cdot a\cdot ....\cdot a}^{\substack{sopravvivono \\ m-n\ fattori}}}{\underbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot ....\cdot\cancel{a}}_{n\ fattori}} = a^{m-n}$$

3) $\left(5^4\right)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 \overset{\text{additiva degli esponenti}}{=} 5^{4+4+4} = 5^{12}$

oppure:

$$\left(5^4\right)^3 = (5\cdot5\cdot5\cdot5)^3 = (5\cdot5\cdot5\cdot5)\cdot(5\cdot5\cdot5\cdot5)\cdot(5\cdot5\cdot5\cdot5) \overset{\text{dissociativa}}{=} 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 5^{12}$$

Quindi: $\boxed{\left(5^4\right)^3} = 5^{12} = \boxed{5^{4\cdot3}}$

Proprietà MOLTIPLICATIVA DEGLI ESPONENTI $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}$

La potenza di una potenza è una potenza
che ha per base la stessa base, e per esponente il prodotto degli esponenti.

Dimostrazione 1

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot ...\cdot a^m}_{n\ fattori} \overset{\text{additiva degli esponenti}}{=} a^{\overbrace{m+m+...+m}^{n\ addendi}} = a^{m\cdot n}$$

La proprietà si può "iterare" (=applicare ripetutamente).

Es. $\left[\left(5^2\right)^3\right]^2 = 5^{12}$

Dimostrazione 2

$$\left(a^m\right)^n = (\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori})^n =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori})\cdot ...\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori})}_{n\ gruppi} \overset{\text{diss.}}{=}$$

$$= \underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori}\cdot ...\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot .....\cdot a}_{m\ fattori}}_{n\ gruppi\ di\ m\ fattori\ ciascuno\ =\ m\cdot n\ fattori} = a^{m\cdot n}$$

4) $(7\cdot5)^3=(7\cdot5)\cdot(7\cdot5)\cdot(7\cdot5)\overset{\text{dissociativa}}{=}7\cdot5\cdot7\cdot5\cdot7\cdot5\overset{\text{commutativa}}{=}7\cdot7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot5\overset{\text{associativa}}{=}(7\cdot7\cdot7)\cdot(5\cdot5\cdot5)=7^3\cdot5^3$

Quindi $\boxed{(7\cdot5)^3=7^3\cdot5^3}$

Proprietà relativa alla POTENZA DI UN PRODOTTO $\boxed{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^{\mathbf{n}}=\mathbf{a}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{n}}}$

La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

Dimostrazione:

$$(a\cdot b)^n=\underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\ \text{fattori}\ (a\cdot b)}\overset{\text{dissociativa}}{=}\underbrace{a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot\ldots\cdot a\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ a,\ n\ \text{fattori}\ b}=$$

$$\overset{\text{commutativa}}{=}\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{fattori}\ a}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ b}\overset{\text{associativa}}{=}(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{fattori}\ a})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ b})=a^n\cdot b^n$$

I fattori possono essere anche più di due. Es. $(3\cdot5\cdot7)^2=3^2\cdot5^2\cdot7^2$

5) $(7:5)^3=\left(\frac{7}{5}\right)^3=\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7\cdot7\cdot7}{5\cdot5\cdot5}=\frac{7^3}{5^3}=7^3:5^3$ Quindi: $\boxed{(7:5)^3=7^3:5^3}$

Proprietà relativa alla POTENZA DI UN QUOZIENTE $\boxed{(\mathbf{a}:\mathbf{b})^{\mathbf{n}}=\mathbf{a}^{\mathbf{n}}:\mathbf{b}^{\mathbf{n}}\ \text{ opp. }\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{n}}}}$

La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore.

Dimostrazione: $$(a:b)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ \text{fattori}\ a/b}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\ \text{fattori}\ a}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \text{fattori}\ b}}=\frac{a^n}{b^n}=a^n:b^n$$

6) La proprietà 6) è l'inversa della 4): $\boxed{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{n}}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^{\mathbf{n}}}$

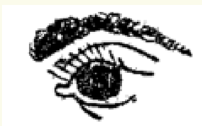
Non c'è quindi bisogno di dimostrazione, perché è già stata dimostrata la 4), che è poi la stessa uguaglianza, seppure scritta al rovescio

IL PRODOTTO DI DUE (o più) POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE
è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il prodotto delle basi.

7) La proprietà 7) è l'inversa della 5): $\boxed{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}:\mathbf{b}^{\mathbf{n}}=(\mathbf{a}:\mathbf{b})^{\mathbf{n}},\quad\frac{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{n}}}=\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}}$

IL QUOZIENTE DI DUE POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE
è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il quoziente delle basi.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE
Non c'è nessuna proprietà delle potenze che si possa applicare
nel caso di una SOMMA
o di una DIFFERENZA
di potenze !!!



OCCHIO, quindi, a non applicare … proprietà inesistenti !!!

$2^3+2^4=8+16=24$

$2^3+10^3=8+1000=1008$

Sarebbe GRAVE ERRORE
svolgere il calcolo diversamente da così !

RISPOSTE AI QUESITI DI PAG. 15 Clicca sulla freccia per la **motivazione delle risposte** ⇨

a) $3^{13}=1594323$ se le partite sono 13, $3^{14}=4782969$ se le partite sono 14.

b) $2^8=256$ c) $21000000000000000000\ \text{km}=21\cdot10^{18}\ \text{km}=2{,}1\cdot10^{19}\ \text{km}$

C) L'ESPONENTE 1, L'ESPONENTE 0

❑ L'ESPONENTE 1 $\boxed{5^1 = ?}$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^2 = 5 \cdot 5$
$5^1 = \mathbf{5}$ (*abbiamo diviso ancora una volta per* 5)

♥ **Definizione: un numero elevato all'esponente 1 è uguale a sé stesso, cioè resta invariato**

$\boxed{\mathbf{a^1 = a \quad \forall a}}$ (leggi: a elevato all'esponente 1 è uguale ad a, qualunque sia a)

La definizione data, oltre che apparire la più "logica", è anche l'unica che permetta di conservare pure per il "nuovo" esponente 1, la validità delle sette proprietà che sussistono per gli esponenti maggiori di 1. Infatti, se voglio formulare la definizione di a^1 in modo che continuino a valere le "vecchie" proprietà, allora, in particolare, avrò bisogno che sia corretto scrivere:

$$a^1 = a^{4-3} = \frac{a^4}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a$$

Insomma, la definizione $a^1 = a$ è l'unica che sia compatibile con la proprietà sottrattiva degli esponenti: se si scegliesse un'altra definizione, la sottrattiva degli esponenti cesserebbe di valere per l'esponente 1.

Si può poi dimostrare che la definizione posta è compatibile
non solo con la "sottrattiva degli esponenti", ma anche con TUTTE le altre proprietà.

❑ L'ESPONENTE 0 $\boxed{5^0 = ?}$

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
$5^2 = 5 \cdot 5$
$5^1 = 5$
$5^0 = \mathbf{1}$ (*abbiamo diviso ancora una volta per* 5)

♥ **Definizione:**
un numero (che non sia lo 0; vedremo dopo il perché di questa eccezione)
elevato all'esponente 0 è uguale a 1

$\boxed{\mathbf{a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0}}$ (leggi: a elevato all'esponente 0 è uguale a 1, per ogni a diverso da 0)

Tale definizione è l'unica che permetta di estendere anche all'esponente 0,
le proprietà già dimostrate valide per gli esponenti 1, 2, 3, 4, …
Infatti, se voglio formulare la definizione di a^0 in modo che continuino a valere le "vecchie" proprietà, allora, in particolare, dovrò poter scrivere:

$$a^0 = a^{4-4} = \frac{a^4}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1$$

Si può poi dimostrare che la definizione posta è compatibile
non solo con la "sottrattiva degli esponenti", ma anche con TUTTE le altre proprietà.

Abbiamo anticipato che la definizione ha un'eccezione: infatti

♥ **l'operazione 0^0 è considerata "INDETERMINATA"**

Per comprendere il motivo di questa scelta da parte dei matematici, consideriamo le due sequenze:

$4^0 = 1 \quad 3^0 = 1 \quad 2^0 = 1 \quad 1^0 = 1 \ \rightarrow \ 0^0 = \mathbf{1???}$
$0^4 = 0 \quad 0^3 = 0 \quad 0^2 = 0 \quad 0^1 = 0 \ \rightarrow \ 0^0 = \mathbf{0???}$
… come si vede, c'è ambiguità!

Osserviamo che in questo caso particolarissimo NON è possibile sciogliere l'indecisione attraverso la richiesta che continui a valere la sottrattiva degli esponenti,
in quanto una catena che iniziasse, ad esempio, con $0^4/0^4$ non potrebbe essere scritta,
perché conterrebbe uno 0 $(0^4 = 0)$ a denominatore (*illegal* operation).

9. LE PRIORITA' NELLO SVOLGIMENTO DELLE OPERAZIONI E L'USO DELLE PARENTESI NELLE ESPRESSIONI

Se siamo in presenza di una serie indicata di operazioni da svolgere, ossia di una "**espressione**", dobbiamo rispettare alcune **regole di priorità** sulle quali la comunità dei matematici ha stabilito un accordo.

♥ **Quando non compare alcuna parentesi, si intende che vadano svolte:**
- **a) innanzitutto le potenze;**
- **b) poi le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui si presentano;**
- **c) e infine le addizioni e le sottrazioni, nell'ordine in cui si presentano.**

❑ Facciamo un esempio. Se mi viene data l'espressione $4+18:2\cdot 3^2$
- io innanzitutto svolgo la potenza: $4+18:2\cdot 9$
- poi la divisione, che precede la moltiplicazione: $4+9\cdot 9$
- poi la moltiplicazione: $4+81$
- e infine la somma: 85

❑ Ecco un altro esempio, svolto "in catena":

$$40-7+2^3\cdot 3-3 \underset{\substack{\text{prima}\\ \text{la}\\ \text{potenza}}}{=} 40-7+8\cdot 3-3 \underset{\substack{\text{poi}\\ \text{la}\\ \text{moltiplicazione}}}{=} 40-7+24-3 \underset{\substack{\text{poi le addizioni}\\ \text{e sottrazioni}\\ \text{nell'ordine}}}{=} 33+24-3=57-3=54$$

♥ **Quando compaiono delle parentesi, si svolgeranno:**
- **a) prima i calcoli entro le parentesi tonde, fino ad ottenere un numero solo;**
- **b) poi i calcoli entro le parentesi quadre, fino ad ottenere un numero solo;**
- **c) infine i calcoli entro le parentesi graffe, fino ad ottenere un numero solo.**

Naturalmente, all'interno di una parentesi valgono fra le operazioni le stesse regole di priorità che abbiamo elencato all'inizio.

Se si opera esclusivamente coi numeri assoluti (= senza segno), non appena all'interno di una parentesi si sarà ottenuto un numero solo, la parentesi si potrà eliminare (con l'unica eccezione del caso in cui il numero sia frazionario e la parentesi elevata a potenza).

❑ Esempio: $8+100:[4+3\cdot(5+2)]=8+100:[4+3\cdot 7]=8+100:[4+21]=8+100:25=8+4=12$.

Una volta eliminate le tonde interne a una quadra, la quadra stessa si potrebbe, volendo, trasformare in tonda (e un'eventuale graffa contenente soltanto tonde in quadra) … quindi, tornando all'es. precedente, avremmo anche potuto scrivere $8+100:[4+3\cdot(5+2)]=8+100:(4+3\cdot 7)=ecc.$

♥ Va detto che quello che abbiamo qui sopra brevemente descritto NON è l'unico modo di mandar via le parentesi in una espressione. Infatti, è piuttosto frequente che una parentesi venga eliminata per effetto dell'applicazione di una proprietà delle operazioni.
Ad esempio, la proprietà distributiva permette di scrivere $3\cdot(100+8)=3\cdot 100+3\cdot 8=300+24=324$;
e ancora: una proprietà delle potenze autorizza a scrivere $(5\cdot 3)^2=5^2\cdot 3^2=25\cdot 9=225$.

♥ Inoltre, ovviamente, le proprietà commutative dell'addizione e della moltiplicazione permettono, di fronte ad addizioni ripetute, o a moltiplicazioni ripetute, di non seguire l' "ordine in cui si presentano" i termini ma di andare invece, in questi casi, nell'ordine che più si desidera.

ESERCIZI Puoi andare agli **svolgimenti** cliccando sulla freccia ⇨

1) $2+3+4\cdot 5$ **2)** $(2+3+4)\cdot 5$ **3)** $24+12:6:2$ **4)** $24+12:(6:2)$ **5)** $(24+12):6:2$

6) $8:2^2+30:3\cdot 2$ **7)** $(8:2)^2+30:(3\cdot 2)$ **8)** $18-10-3\cdot 2$ **9)** $18-(10-3)\cdot 2$

10) $45-[(3+4)\cdot 5]$ **11)** $[45-(3+4)]\cdot 5$ **12)** $100-\{20-[3^2-2\cdot(3+1)]+7\}:2+3$

13) $\dfrac{3}{50}+\left[2-\left(\dfrac{1}{2}+1\right):\dfrac{5}{4}\right]^2$ **14)** $\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}\right)\cdot\dfrac{2}{3}$ **15)** $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{3}$ **16)** $6-2\cdot 3+\{16:[1+(3+2):5]\}^2$

17) $2+3\cdot 4+5\cdot 6$ **18)** $(2+3)\cdot(4+5)\cdot 6$ **19)** $(2+3)\cdot(4+5\cdot 6)$

20) $(15-10)-4$ **21)** $15-(10-4)$ **22)** $15+10+4$ **23)** $15+(10+4)$

24) $16:8:2$ **25)** $16:(8:2)$ **26)** $16\cdot 8\cdot 2$ **27)** $16\cdot(8\cdot 2)$

RISULTATI

1) 25 **2)** 45 **3)** 25 **4)** 28 **5)** 3 **6)** 22 **7)** 21 **8)** 2 **9)** 4
10) 10 **11)** 190 **12)** 90 **13)** 7/10 **14)** 11/45 **15)** 3/10 **16)** 64 **17)** 44 **18)** 270
19) 170 **20)** 1 **21)** 9 **22)** 29 **23)** 29 **24)** 1 **25)** 4 **26)** 256 **27)** 256

10. ESERCIZI

A) ESERCIZI SU DIVISIBILITA', MULTIPLI, DIVISORI, NUMERI PRIMI ECC. (risposte a pag. 23)

1) VERO O FALSO?

a) $3:0=0$	V	F	d) Il numero 0 è pari	V	F	g) Il numero 1 è primo	V	F
b) $0:3=0$	V	F	e) Il numero 1 è dispari	V	F	h) 0 divide ogni numero	V	F
c) $0:0=1$	V	F	f) Il numero 0 è primo	V	F	i) 1 divide ogni numero	V	F

2) VERO O FALSO?

Se $m \cdot n = p$ (essendo m, n, p tre interi non nulli), allora

a) n è multiplo di p	V	F	c) n è divisore di p	V	F	e) p è divisibile per n	V	F
b) p è multiplo di n	V	F	d) n è divisibile per p	V	F	f) $p:m=n$	V	F

g) Se a è divisibile per b, allora è divisibile anche per tutti i divisori di b	V	F
h) Se un intero è divisibile sia per 6 che per 8, allora è certamente divisibile per 48	V	F
i) Due numeri entrambi primi sono sempre anche primi fra loro	V	F
l) Se a è primo con b e b è primo con c, allora a sarà certamente primo con c	V	F

VERIFICARE SE UN INTERO E' PRIMO, SENZA SPRECARE CALCOLI

Supponiamo di prendere un intero n con l'intenzione di verificare se è primo o se non lo è.
E supponiamo di aver constatato che:
2 non è divisore di n; 3 non è divisore di n; 5 non lo è; … nessun numero primo $\le \sqrt{n}$ è divisore di n.
Allora ti dico che sarebbe inutile continuare:

***n*, se non ha divisori primi $\le$ della sua radice quadrata, è CERTAMENTE un numero primo!**

Infatti: se un intero n ha un divisore proprio (NOTA) d *maggiore* della sua radice quadrata, allora ammette di certo anche un altro divisore proprio, ossia $n:d$, che è *minore* di $\sqrt{n}$; quindi, se non si è trovato nessun divisore proprio di n che sia $\le \sqrt{n}$, si può essere certi che n non ha alcun divisore proprio: se infatti, per assurdo, ne avesse uno $> \sqrt{n}$, se ne sarebbe già dovuto trovare un altro $< \sqrt{n}$.

NOTA: i divisori "propri" di un intero sono quelli "non banali", ossia diversi da 1 e dal numero stesso.

La ricerca dei divisori propri di n si può poi limitare ai soli divisori primi, perché se un intero ha un divisore proprio k non primo, certamente ha anche uno o più divisori primi inferiori a k.

♥ Ad esempio, per concludere che 97 è un numero primo basta aver verificato che non è divisibile per nessuno dei numeri 2, 3, 5, 7. Infatti, il tentativo successivo sarebbe per 11, ma 11 supera già $\sqrt{97} = 9,...$

3) Per verificare se sia primo il 1231, la ricerca di eventuali divisori potrà limitarsi ai numeri primi non superiori a …..

IL "CRIVELLO DI ERATOSTENE"

Un modo semplice per ricavare l'elenco dei numeri primi non superiori ad un dato intero n è il seguente.
Si scrivono gli interi da 2 a n, poi dallo schema

- si cancellano tutti i multipli di 2 (escluso il 2);
- si cerca il primo numero successivo al 2 non ancora cancellato, ossia il 3, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il 3);
- si cerca il il primo numero successivo al 3 non ancora cancellato, ossia il 5, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il 5);
- si cerca il primo numero successivo al 5 non ancora cancellato, e se ne cancellano tutti i multipli (escluso il numero stesso);
- …

Ciò che resta al termine del procedimento è l'elenco dei numeri primi cercato.

4) Serviti di questo metodo e dello schema che segue, per determinare i numeri primi non superiori a 125:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125

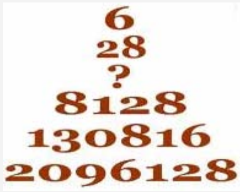
5) Per ciascuno degli interi che seguono, stabilisci se è divisibile per:
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
a) 378 b) 825 c) 420 d) 988 e) 14641 f) 84 g) 5929 h) 437 i) 318 l) 1000001

NUMERI "PERFETTI"

Si dice "perfetto" un intero, che sia uguale alla somma dei suoi divisori, inclusa l'unità ma escluso il numero stesso.

Ad esempio, sono numeri perfetti $6 = 1+2+3$ e $28 = 1+2+4+7+14$.

6) Il numero perfetto successivo a 28 è compreso fra 495 e 500. Quanto vale? .....



DIVISIONE INTERA, CON RESTO

♥ In Informatica, ma anche in Matematica, si utilizzano due "operatori" specifici, DIV e MOD, per indicare rispettivamente il **quoziente intero** (**DIV**) e il **resto** (**MOD**) della **divisione intera**.
E' fondamentale tener presente che **il resto è sempre minore del divisore!**
Esempi: $13\ \text{DIV}\ 5 = 2$; $13\ \text{MOD}\ 5 = 3$; $12\ \text{DIV}\ 3 = 4$; $12\ \text{MOD}\ 3 = 0$; $7\ \text{DIV}\ 8 = 0$; $7\ \text{MOD}\ 8 = 7$

7) a) $7\ \text{DIV}\ 3 = \ldots$ $7\ \text{MOD}\ 3 = \ldots$ b) $18\ \text{DIV}\ 3 = \ldots$ $18\ \text{MOD}\ 3 = \ldots$ c) $2\ \text{DIV}\ 4 = \ldots$ $2\ \text{MOD}\ 4 = \ldots$
d) $89\ \text{DIV}\ 7 = \ldots$ $89\ \text{MOD}\ 7 = \ldots$ e) $5\ \text{DIV}\ 1 = \ldots$ $5\ \text{MOD}\ 1 = \ldots$ f) $5\ \text{DIV}\ 0 = \ldots$ $5\ \text{MOD}\ 0 = \ldots$
g) Se si sa che $a\ \text{MOD}\ b = 0$, si può dire che b è .... di a
h) $x\ \text{DIV}\ 29 = 7$, $x\ \text{MOD}\ 29 = 15$. $x = ?$ i) $73\ \text{DIV}\ y = 6$, $73\ \text{MOD}\ y = 1$. $y = ?$
l) The Centre for Education in Math. and Computing, www.cemc.uwaterloo.ca, Pascal Contest 2011
When the integer N is divided by 60, the remainder (*resto*) is 49.
When N is divided by 15, the remainder is: 0? 3? 4? 5? 8?

8) Nella dispensa di un asilo sono rimasti 60 cioccolatini, 72 biscotti e 24 piccole crostate.
Si decide di "far fuori" questo materiale, prossimo alla scadenza, distribuendo ai bambini più meritevoli un "kit" formato da x crostatine + y cioccolatini + z biscotti (tutti i "kit" dovranno essere fra loro identici), e ci si chiede:
quale sarà il massimo numero di kit realizzabili in tale modo?

9) Una cometa periodica si presenta a distanza di esattamente 56 anni, e un'altra a distanza di 48.
Se quest'anno le due comete si sono mostrate simultaneamente, fra quanti anni l'evento si ripresenterà?

10) Se ci sono tre funi di lunghezza 126, 168 e 140 cm, e si desidera tagliarle in modo da ottenere il numero più piccolo possibile di pezzi di ugual lunghezza (senza buttar via alcun pezzo di corda), quale sarà questo numero minimo?

11) Anna e Bruno sono due pazientissimi operatori in un call center.
Hanno a disposizione lo stesso interminabile elenco di numeri telefonici fra cui scegliere quelli da comporre, e Anna ha deciso di selezionare una persona ogni 12, mentre Bruno intende prendere un nominativo ogni 20. Se in questo modo la persona al posto x dell'elenco viene interpellata sia da Anna che da Bruno, anche la persona al posto $x+y$ sarà contattata 2 volte …
Quanto vale, al minimo, y?

12) Se si sa che il mcm e il MCD di due numeri valgono, rispettivamente, 72 e 6, ma i due numeri in gioco NON sono 72 e 6, di che numeri si tratta?

13) Rebecca has 20 table tennis balls and 16 table tennis paddles.
She wants to sell packages of balls and paddles bundled together.
What is the greatest number of packages she can sell with no leftover balls or paddles?
(dal sito http://tulyn.com)

14) Ho guarnito il mio albero di Natale con 4 festoni luminosi.
Nei festoni, le lampadine mandano un lampo di luce a intervalli di: 5, 6, 8 e 10 secondi rispettivamente.
Se alle ore 23 in punto hanno emesso la loro luce simultaneamente, quante altre volte accadrà la stessa cosa entro le 24?

15) Si vuole lastricare un rettangolo di cortile di metri 3,90 X 2,34, utilizzando piastre di porfido quadrate, il cui lato sia di lunghezza (in cm) intera, e il più lungo possibile.
Quanti cm^2 misurerebbe la superficie occupata da ciascuna piastra?

16) Una bicicletta per bambini ha la ruota anteriore di raggio 20 cm, e quella posteriore di raggio 12 cm.
Se ad un certo istante la valvola per gonfiare le ruote si trova, in entrambe, nella stessa posizione (ad es., in alto), dopo quanti giri della ruota più grande si verificherà nuovamente la stessa situazione?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA (risposte a pag. 23)

Riconosci l'affermazione esatta, che è una e una sola, fra quelle proposte.

1) Posso dire con sicurezza che un numero è divisibile per 6:
   a) se so che la somma delle sue cifre è divisibile per 6
   b) se so che è pari, e la somma delle sue cifre è un multiplo di 9
   c) se so che le ultime sue due cifre formano un numero divisibile per 6
   d) in nessuno dei casi precedenti

2) Quale fra i seguenti numeri NON è multiplo sia di 4, che di 5, che di 6?
   a) 1234560 b) 7654320 c) 4321000 d) 1425360

3) Se due interi a, b sono primi fra loro,
   allora una sola delle seguenti affermazioni è FALSA. Quale?
   a) il loro M.C.D. è 1
   b) il loro m.c.m. è uguale al loro prodotto
   c) la frazione a/b non è semplificabile
   d) almeno uno di essi deve essere un numero primo

4) Riconosci l'unica affermazione FALSA.
   Se p è un numero primo, allora:
   a) il successivo di p non è mai un numero primo
   b) il quadrato di p ha sempre 3 divisori
   c) p ha tanti divisori quanti ne ha un altro qualsiasi numero primo

5) In quanti modi il numero 10230 è esprimibile come prodotto di 4 interi, tutti diversi da 1?
   a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

6) Il M.C.D. di tre numeri, tutti diversi fra loro, è 3. Allora certamente:
   a) nessuno dei tre numeri è primo
   b) almeno uno ha un divisore primo diverso da 3
   c) i tre numeri sono tutti dispari
   d) i tre numeri non sono tutti pari

7) Il m.c.m. di due interi è 216. Allora una delle seguenti affermazioni è FALSA. Quale?
   a) I due numeri non possono essere entrambi dispari
   b) I due numeri possono non essere entrambi pari
   c) Uno dei due numeri deve essere multiplo di 4
   d) Uno dei due numeri deve essere multiplo di 6

8) Una sola fra le seguenti terne di numeri ha per m.c.m. 72 e per M.C.D. 1. Quale?
   a) 8, 9, 36 b) 3, 18, 72 c) 8, 18, 72 d) 4, 9, 18

9) Si sa che Andrea ha 5 volte gli anni di Bruno, e 3 volte gli anni di Carlo.
   Se Carlo ha meno di 15 anni, quanti anni può avere, al massimo, Bruno?
   a) 4 b) 5 c) 6 d) nessuna delle risposte precedenti è corretta

10) Per quale intero, al minimo, devo moltiplicare il numero 91,
   se voglio che il risultato della moltiplicazione sia un multiplo di 98?
   a) 7 b) 14 c) 28 d) 49

11) Un intero a, quando viene diviso per 24, dà come resto 5.
   Se b è il più piccolo multiplo di 12 maggiore di a, allora la differenza $b-a$ vale:
   a) 5 b) 7 c) 19 d) Non si può determinare con sicurezza

12) Nel numero 99986x4, determina la cifra mancante sapendo che il numero stesso è divisibile per 12.
   a) x = 0 b) x = 4 c) Il problema è impossibile
   d) Non si può determinare con certezza, c'è più di un valore possibile per x

13) Nel seguente numero: 52x34866, il simbolo x indica la terza cifra da sinistra.
   Determina x in modo che il numero sia divisibile per 33.
   a) x = 3 b) x = 4 c) Il problema è impossibile
   d) Non si può determinare con certezza, c'è più di un valore possibile per x

14) Fra i numeri n di quattro cifre tali che n^2+7 è divisibile per 7, qual è il più piccolo?
   a) 1001 b) 1007 c) 1008 d) 1010

RISPOSTE, RISULTATI DEGLI ESERCIZI SULLA DIVISIBILITA' E SUI NUMERI PRIMI

1) a) F La divisione, in matematica, è intesa come l'operazione inversa della moltiplicazione.
Il motivo per cui, ad esempio, si ha $28:4=7$,
è che il 7, se venisse moltiplicato per 4, restituirebbe il 28!
$28:4=7$ per il fatto che $7\cdot 4=28$.
Insomma, $a:b=c$ se, e soltanto se, risulta $c\cdot b=a$.
Consideriamo ora l'operazione $3:0$.
$3:0=?$
Dovremmo trovare un numero che moltiplicato per 0 dia 3 … ma non lo troveremo mai!
Un numero siffatto non esiste, perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà sempre e soltanto 0.
Allora l'operazione $3:0$ è IMPOSSIBILE, è priva di risultato!
Non c'è nessun numero che possa, diciamo così, "pretendere di esserne il risultato".
b) V
c) F L'operazione $0:0$ è considerata "non eseguibile", perché sarebbe "indeterminata",
in quanto qualunque numero potrebbe "pretendere di esserne il risultato".
Infatti $a:b=c$ quando $c\cdot b=a$,
ma nel caso della $0:0$ *qualunque* numero, moltiplicato per 0 (divisore), darebbe 0 (dividendo)!
d) V, il numero 0 è considerato "pari" e) V f) F g) F, un numero primo deve essere maggiore di 1
h) F "Divide" significa "è divisore di": ma la divisione per 0 è operazione "non eseguibile" i) V

2) a) F b) V c) V d) F e) V f) V
g) V h) F. Controesempi: 24, 72, ... i) V l) F. Controesempio: $a=15, b=16, c=35$

3) Non superiori a 35

4) L'elenco dei numeri primi non superiori a 125 è il seguente: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113

5) Dopo aver risposto utilizzando i Criteri di divisibilità, o, nel caso del divisore 13, effettuando direttamente la divisione, un modo per controllare la correttezza delle risposte date è di prendere una calcolatrice per constatare se, dividendo, si ottiene un intero oppure un numero con la virgola.

6) $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$

7) a) $7 \text{ DIV } 3=2$ $7 \text{ MOD } 3=1$ b) $18 \text{ DIV } 3=6$ $18 \text{ MOD } 3=0$
c) $2 \text{ DIV } 4=0$ $2 \text{ MOD } 4=2$ d) $89 \text{ DIV } 7=12$ $89 \text{ MOD } 7=5$
e) $5 \text{ DIV } 1=5$ $5 \text{ MOD } 1=0$ f) $5 \text{ DIV } 0$, $5 \text{ MOD } 0$ non sono eseguibili
g) Se $a \text{ MOD } b=0$, si può dire che b è divisore di a
h) $x=7\cdot 29+15=218$ i) $6\cdot y+1=73 \rightarrow y=12$ l) 4

8) 12 kit al massimo, ciascuno con 5 cioccolatini, 6 biscotti, 2 crostatine

9) Fra 336 anni

10) $9+12+10=31$ pezzi da 14 cm ciascuno

11) y vale al minimo 60

12) 18 e 24

13) 4

14) $3600:120=30$ volte

15) 6084 cm^2

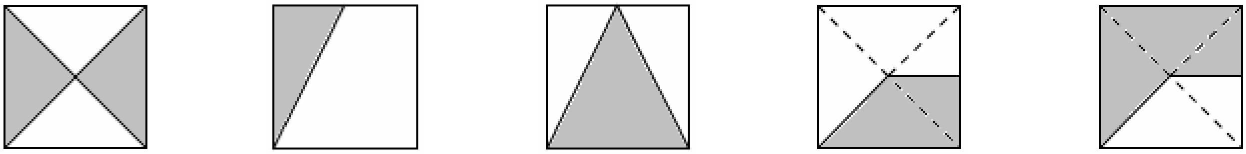
16) Dopo 3 giri della ruota più grande

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA di pagina 22

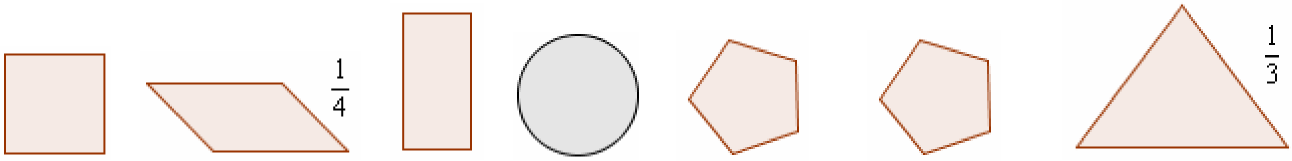
1) b) (essere multiplo di 9 implica essere multiplo di 3 …)
2) c) (4321000 non è divisibile per 3, quindi neppure per 6)
3) d) 4) a) il successivo di 2 (che è un numero primo) è 3, altro numero primo 5) d) 6) d) 7) d) 8) a)
9) c) Se il triplo dell'età di Carlo è uguale a 5 volte l'età di Bruno, allora il triplo dell'età di Carlo dovrà essere un numero divisibile per 5, quindi l'età di Carlo stessa dovrà essere divisibile per 5.
Il più grande numero <15 divisibile per 5 è 10;
Carlo potrà dunque, al massimo, avere 10 anni, Andrea 30 anni, Bruno 6 anni.
10) b) 11) b) 12) d) (x potrebbe valere 0 oppure 6) 13) c)
14) a) n^2+7 è divisibile per 7 se e solo se n^2 è divisibile per 7. Ed n^2 è divisibile per 7 se e solo se lo è n.
Allora si tratta di cercare il più piccolo numero di 4 cifre divisibile per 7, che risulta essere 1001.

B) ESERCIZI SULLE FRAZIONI (risposte a pag. 27)

1) Scrivi a quale frazione del quadrato corrisponde la parte ombreggiata:

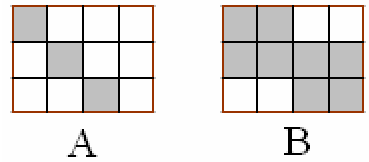


2) Considera le figure seguenti, e con la matita ombreggia, per ciascuna figura, la frazione di essa scritta accanto:

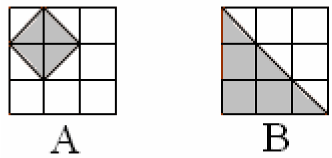


$\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{4}$ (come fare per un risultato perfetto?) — $\frac{2}{5}$ — $\frac{5}{8}$ — $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{10}$ — $\frac{1}{3}$ (c'è il modo di procedere con buona precisione: come?)

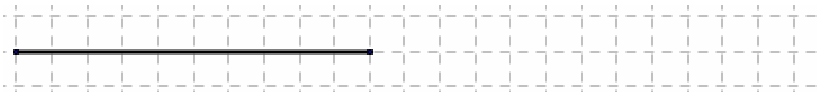
3) Con riferimento alla figura qui a fianco:
   a) la parte ombreggiata del rettangolo A, che frazione di A rappresenta?
   b) la parte ombreggiata del rettangolo A,
      che frazione della parte chiara di A rappresenta?
   c) la parte ombreggiata del rettangolo B, che frazione di B rappresenta?
   d) le due parti ombreggiate, che frazione rappresentano l'una dell'altra?



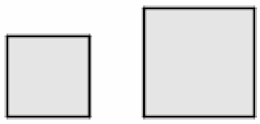
4) Con riferimento alla figura qui a fianco:
   a) la parte ombreggiata del rettangolo A, che frazione di A rappresenta?
   b) la parte ombreggiata del rettangolo A,
      che frazione della parte chiara di A rappresenta?
   c) la parte ombreggiata del rettangolo B, che frazione di B rappresenta?
   d) le due parti ombreggiate, che frazione rappresentano l'una dell'altra?



5) Sapendo che il segmento in figura
   è i 5/8 di un altro segmento s,
   determina graficamente s.



6) Se un segmento è i ¾ di un altro, il quadrato costruito sul primo
   che frazione rappresenta del quadrato costruito sul secondo?
   Perché?



7) Semplifica il più possibile, ossia "riduci ai minimi termini":

$\frac{48}{32}=\frac{...}{...};\ \frac{18}{60}=\frac{...}{...};\ \frac{6}{72}=\frac{...}{...};\ \frac{56}{98}=\frac{...}{...};\ \frac{264}{110}=\frac{...}{...};\ \frac{87}{29}=\frac{...}{...}=...;\ \frac{96}{128}=\frac{...}{...};\ \frac{169}{65}=\frac{...}{...};\ \frac{22}{121}=\frac{...}{...};\ \frac{56}{64}=\frac{...}{...}$

8) Riempi i puntini: $\frac{3}{4}=\frac{...}{20};\ \frac{1}{7}=\frac{3}{...};\ \frac{2}{5}=\frac{...}{20};\ \frac{3}{11}=\frac{15}{...};\ \frac{7}{6}=\frac{...}{12};\ 2=\frac{...}{30};\ \frac{2}{3}=\frac{...}{57};\ \frac{18}{45}=\frac{...}{30};\ \frac{...}{24}=\frac{5}{6};\ \frac{28}{12}=\frac{...}{15}$

Confronto di due frazioni

Per confrontare due frazioni, le si può trasformare entrambe in numeri con la virgola, eseguendo la divisione; oppure, le si porta allo stesso denominatore
(il minimo comune denominatore, o comunque un multiplo comune ai due denominatori;
dopodiché, la frazione col numeratore più piccolo sarà la minore fra le due).

Ad es., per confrontare le due frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, si considera che $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ e $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ e se ne conclude che $\frac{2}{5}>\frac{1}{3}$.

E' chiaro che a volte basta una semplice osservazione: dovendo confrontare $\frac{37}{36}$ e 1, capiamo subito che $\frac{37}{36}>1$ se osserviamo, banalmente, che una frazione il cui numeratore supera il denominatore è più grande dell'unità.

Ancora:

$\frac{6}{7}<\frac{7}{8}$, perché $\frac{6}{7}=1-\frac{1}{7}$ e $\frac{7}{8}=1-\frac{1}{8}$, ma $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$ quindi togliendo $\frac{1}{7}$ dall'unità resterà meno che togliendole $\frac{1}{8}$.

9) Ciò premesso, metti in ordine crescente i numeri seguenti: a) $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ c) $2, \frac{7}{4}, \frac{11}{6}$

- ESEMPI GUIDATI su **somme e differenze di frazioni**:

a) $\dfrac{11}{12}-\dfrac{5}{8}=\underbrace{\dfrac{\overset{24:12\cdot 11}{22}\;-\;\overset{24:8\cdot 5}{15}}{24}}_{\text{m.c.m.}(12,\,8)}=\dfrac{7}{24}$

b) $\underset{\frac{3}{1}}{\overset{\downarrow}{3}}-\dfrac{7}{10}+\dfrac{1}{5}=\underbrace{\dfrac{\overset{10:1\cdot 3}{30}\;-\;\overset{10:10\cdot 7}{7}\;+\;\overset{10:5\cdot 1}{2}}{10}}_{\text{m.c.m.}(1,\,10,\,5)}=\dfrac{\cancel{25}^{\,5}}{\cancel{10}_{\,2}}=\dfrac{5}{2}$

la frazione va semplificata, se possibile!

c) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{12}=\underbrace{\dfrac{\overset{12:3\cdot 1}{4}\;+\;\overset{12:6\cdot 5}{10}\;+\;\overset{12:12\cdot 1}{1}}{12}}_{\text{m.c.m.}(3,\,6,\,12)}=\dfrac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{12}_{\,4}}=\dfrac{5}{4}$

la frazione va semplificata, se possibile!

10) ESERCIZI GUIDATI su somme e differenze di frazioni:

a) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}=\dfrac{...+...}{24}=\dfrac{41}{24}$ b) $\dfrac{1}{15}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{...+...}{30}=...=\dfrac{9}{10}$ c) $\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{...-...}{8}=\dfrac{13}{8}$ d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{...+...-...}{12}=\dfrac{5}{12}$

e) $3-\dfrac{2}{7}=\dfrac{...-...}{7}=\dfrac{19}{7}$ f) $\dfrac{1}{3}+1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{...+...-...}{12}=\dfrac{13}{12}$ g) $\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{6+...}{...}=\dfrac{11}{20}$ h) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{...+...+1}{...}=...=1$

11) ESERCIZI (somme e differenze di frazioni):

a) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}$ b) $\dfrac{7}{5}-\dfrac{5}{6}$ c) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{6}$ d) $\dfrac{7}{22}-\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{24}$ f) $4+\dfrac{3}{10}$ g) $\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}$ h) $2-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{4}{15}$

i) $1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}$ l) $\dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{12}$ m) $0,\overline{5}+0,\overline{05}$ n) $0,04+\dfrac{4}{25}$ o) $\dfrac{1}{30}+0,1\overline{2}$ p) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}$

- ESEMPI (**prodotti e quozienti di frazioni**):

a) $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{8}=\dfrac{35}{48}$ b) $\dfrac{{}^{3}\cancel{12}}{{}_{5}\cancel{55}}\cdot\dfrac{\cancel{33}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,2}}=\dfrac{9}{10}$ c) $\dfrac{1}{\cancel{15}_{\,3}}\cdot\dfrac{\cancel{5}^{\,1}}{6}=\dfrac{1}{18}$ d) ${}^{2}\cancel{4}\cdot\dfrac{5}{\cancel{6}_{\,3}}=\dfrac{10}{3}$ e) $\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{8}_{\,4}}\cdot\dfrac{\cancel{4}}{5}=\dfrac{1}{5}$

f) $\dfrac{3}{25}:\dfrac{21}{10}=\dfrac{\cancel{3}}{{}_{5}\cancel{25}}\cdot\dfrac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{21}_{\,7}}=\dfrac{2}{35}$ g) $12:\dfrac{14}{5}={}^{6}\cancel{12}\cdot\dfrac{5}{\cancel{14}_{\,7}}=\dfrac{30}{7}$ h) $\dfrac{\cancel{30}^{\,15}}{\cancel{16}_{\,8}}:12=\dfrac{{}^{5}\cancel{15}}{8}\cdot\dfrac{1}{\cancel{12}_{\,4}}=\dfrac{5}{32}$

12) ESERCIZI (prodotti e quozienti di frazioni):

a) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}$ b) $\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{5}{6}$ c) $\dfrac{19}{9}\cdot\dfrac{2}{7}$ d) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{7}{6}$ e) $26\cdot\dfrac{2}{13}$ f) $\dfrac{1}{8}\cdot 24\cdot\dfrac{11}{6}$ g) $\dfrac{15}{10}\cdot\dfrac{1}{2}$ h) $\dfrac{41}{200}\cdot 40$ i) $\dfrac{3}{5}:\dfrac{4}{15}$

l) $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}$ m) $\dfrac{23}{6}:\dfrac{46}{9}$ n) $7:\dfrac{42}{11}$ o) $\dfrac{42}{11}:7$ p) $\dfrac{12}{30}:\dfrac{9}{25}$ q) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{8}$ r) $\dfrac{18}{5}:\dfrac{2}{15}:\dfrac{6}{7}$ s) $\dfrac{18}{5}:\dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{6}{7}$

PROBLEMI CON LE FRAZIONI

13) Un commerciante disponeva di 45 scatole di marmellata.
Ma ne ha vendute 1/5 la settimana scorsa, e questa settimana ha venduto ancora 1/3 delle rimanenti.
Quante gliene restano?
NOTA: molto sovente, in Matematica, la particella “di” significa “moltiplicato per”:
ad esempio, 1/3 “di” un numero equivale a dire 1/3 “moltiplicato per” quel numero.

14) Scolo ¼ di una bottiglia di vino, poi ancora i 2/5 della parte restante.
Quale frazione di bottiglia rimane per le successive bevute?
a) i 9/20? b) i 13/20? c) i 7/20? d) i 3/10?

15) Gianni compra per una festa 48 paste di cui 1/3 sono ciambelle, mentre i ¾ delle paste rimanenti son bignole.
Poiché le paste che restano sono delle sfoglie, e una ciambella costa euro 0,40, una bignola 0,35 e una sfoglia 0,30, quanto spende Gianni in totale?

16) Ho piantato nel mio giardino rose, viole e tulipani. Se le rose sono 1/3 delle viole e le viole a loro volta 1/3 dei tulipani, dimmi quanti sono questi ultimi, sapendo che i fiori sono in totale 65.

17) Se i 3/4 di una distanza A equivalgono a 2/3 di una distanza B, quale frazione della distanza B si può dire che A rappresenti?

18) Pierino ha già speso i 5/6 della sua paghetta, e gli rimangono 5 euro. A quanto ammontava la paghetta?

DALLA PARTE FRAZIONARIA ALL'INTERO

Supponiamo che i 3/5 di un sacco di cemento pesino kg 21. Quanto peserà il sacco intero?

Peserà **kg** $\mathbf{\dfrac{21}{\frac{3}{5}} = 21 \cdot \frac{5}{3} = 35}$.

Infatti, se i $\dfrac{3}{5}$ del sacco pesano 21 kg, $\dfrac{1}{5}$ del sacco peserà $21:3=7$ kg

per cui il sacco intero avrà per peso kg $5\cdot(21:3)=\dfrac{5\cdot 21}{3}=\dfrac{21}{\frac{3}{5}}$.

Si sarebbe potuto procedere anche con una semplicissima "equazione": $\underbrace{\dfrac{3}{5}x=21}_{0,6\cdot x=21} \rightarrow x=\dfrac{21}{\frac{3}{5}}$

ESEMPIO

Sono un idraulico, e ho richiesto a un mio cliente un anticipo del $30\%=\dfrac{30}{100}=\dfrac{3}{10}$
sull'ammontare complessivo del mio lavoro. Il cliente mi ha quindi versato 840 euro.
Quanto dovrà ancora darmi, come saldo, a lavoro ultimato?

$\text{In tutto}=\dfrac{840}{\frac{3}{10}}=840\cdot\dfrac{10}{3}=2800\ \text{euro};\quad \text{ancora da versare}=2800-840=1960\ \text{euro}$.

Oppure:

$\text{frazione del prezzo ancora da versare}=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$; ed essendo $\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{3}$, $\text{ancora da versare}=840\cdot\dfrac{7}{3}=1960$

19) In un piccolo cinema di periferia entrano 48 persone, e restano così ancora liberi i 3/5 dei posti.
Quanti sono questi in totale?

20) Ho dato $\dfrac{1}{5}$ di una tavoletta di cioccolato a una collega, poi ho mangiato i $\dfrac{2}{3}$ di ciò che rimaneva,
e ne è rimasto un pezzo lungo 4 cm. Quanto era lunga in origine la tavoletta?

21) Ho delle caramelle, delle quali i 5/12 sono alla frutta, i 2/5 alla menta, le 22 restanti al latte-e-miele.
Quante sono in totale le caramelle?

22) In una scuola superiore, alla fine dell'anno scolastico, i promossi sono i 3/5 del totale, e gli alunni che devono colmare un debito formativo sono 1/3 del totale. Si domanda che frazione del totale rappresentano i respinti, e, sapendo che questi ultimi sono in numero di 18, quanti sono gli studenti promossi senza debito.

23) Una compagnia di bambini organizza una lotteria nella quale il 1° premio equivale a 1/4 della somma raccolta attraverso la vendita dei biglietti, il 2° premio a 1/8 di tale somma, mentre il rimanente viene suddiviso in 10 premi di consolazione da 30 centesimi l'uno. Determinare l'ammontare del 1° premio.

Anselmo, presidente di un club di tifosi, compera, per conto degli iscritti al club, 24 biglietti per una partita di calcio. Successivamente però altre 4 persone si dichiarano interessate alla partita e quindi Anselmo va alla ricerca di altri biglietti, rivolgendosi ai bagarini, i quali nel frattempo hanno praticato un rincaro di 1/3 per via delle tante richieste.
Se in totale spende 1320 euro, determina il costo del biglietto prima e dopo il rincaro.

Problemi come questo si risolvono molto agevolmente se si conoscono i rudimenti del calcolo letterale e se si sa impostare e risolvere una *equazione*.
Ma anche senza equazioni, ce la possiamo cavare, ad esempio, così:
se il biglietto senza rincaro fosse costato 1 euro, la spesa totale sarebbe stata di euro

$$24+4\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=24+4\cdot\frac{4}{3}=24+\frac{16}{3}=\frac{72+16}{3}=\frac{88}{3}\ (=29{,}333...)\ ;$$

… ma poiché si sono spesi invece 1320 euro, il biglietto non costava (prima del rincaro) 1 euro,
ne costava invece $\dfrac{1320}{\frac{88}{3}}=1320\cdot\dfrac{3}{88}=45$.

Il costo iniziale del biglietto era dunque di 45 euro, dopo il rincaro di $45\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=60$ euro.

24) Se l'età di Andrea è attualmente 1/3 di quella di sua madre Barbara, e la somma di queste due età è 48 anni, fra 6 anni quale frazione dell'età di Barbara rappresenterà l'età di Andrea?
a) sempre 1/3 b) 1/2 c) 3/7 d) 11/21

25) Un club conta 280 iscritti, ma le femmine sono solo i 3/4 dei maschi.
Quante donne e quanti uomini ci sono nel club?

26) Fra i partecipanti a una selezione, i 2/3 sono stati respinti e solo 1/18 promossi "con lode".
Se il numero dei respinti supera di 286 unità quello dei promossi con lode,
quanti sono stati i promossi "senza lode"?

27) Se un rubinetto è in grado di riempire una vasca in 2 ore, e un altro in 4 ore,
tenendoli aperti entrambi in quanto tempo si riempirà la vasca?
(Indicazione: il 1° rubinetto, in 1 ora, che frazione dell'intera vasca riempie? E il 2°? Quindi …)

28) Se un rubinetto è in grado di riempire una vasca in 1/2 ora, e un altro in 1/4 d'ora,
tenendoli aperti entrambi in quanto tempo si riempirà la vasca?

29) Se un rubinetto è in grado di riempire una vasca in *a* ore, e un altro in *b* ore,
tenendoli aperti entrambi in quanto tempo si riempirà la vasca?

30) Una squadra di 5 braccianti è in grado di portare a termine una vendemmia in 3 giorni.
Se al posto dei 5 braccianti lavorassero i loro 13 bambini, ultimerebbero la vendemmia in 2 giorni.
La giornata lavorativa è di 10 ore.
E se adulti e piccoli vendemmiassero assieme, in quante ore si finirebbe il lavoro?

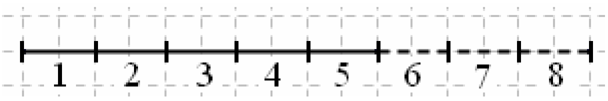
RISPOSTE AGLI ESERCIZI SULLE FRAZIONI

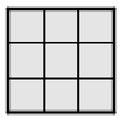
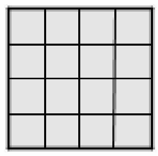
1) 1/2, 1/4, 1/2, 3/8, 5/8

2) Nel parallelogrammo, tracciare le due diagonali; i 4 triangoli ottenuti hanno tutti la stessa estensione, perché han tutti ugual base e uguale altezza, per cui ciascuno di essi è 1/4 del parallelogrammo.
Nel triangolo, dividere un lato in 3 parti uguali e congiungere i due punti di suddivisione col vertice opposto; i 3 triangoli ottenuti hanno tutti la stessa estensione, in quanto hanno ugual base e la medesima altezza; per cui ciascuno di essi sarà la terza parte del triangolo dato.

3) a) 3/12=1/4 b) 3/9=1/3 c) 8/12=2/3 d) la prima i 3/8 della seconda, la seconda gli 8/3 della prima

4) a) 4/18=2/9 b) 4/14=2/7 c) 1/2 d) la prima, i 4/9 della seconda; la seconda, i 9/4 della prima

5) 

6) I $\frac{9}{16}$:  

7) $\frac{48}{32}=\frac{3}{2}$; $\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$; $\frac{6}{72}=\frac{1}{12}$; $\frac{56}{98}=\frac{4}{7}$; $\frac{264}{110}=\frac{12}{5}$; $\frac{87}{29}=\frac{3}{1}=3$; $\frac{96}{128}=\frac{3}{4}$; $\frac{169}{65}=\frac{13}{5}$; $\frac{22}{121}=\frac{2}{11}$; $\frac{56}{64}=\frac{7}{8}$

8) $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $\frac{1}{7}=\frac{3}{21}$; $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$; $\frac{3}{11}=\frac{15}{55}$; $\frac{7}{6}=\frac{14}{12}$; $2=\frac{60}{30}$; $\frac{2}{3}=\frac{38}{57}$; $\frac{18}{45}=\frac{12}{30}$; $\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$; $\frac{28}{12}=\frac{35}{15}$

9) a) $\frac{5}{7}<\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$ c) $\frac{7}{4}<\frac{11}{6}<2$

10) a) $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{20+21}{24}=\frac{41}{24}$ b) $\frac{1}{15}+\frac{5}{6}=\frac{2+25}{30}=\frac{\cancel{27}^{9}}{\cancel{30}_{10}}=\frac{9}{10}$ c) $\frac{7}{4}-\frac{1}{8}=\frac{14-1}{8}=\frac{13}{8}$ d) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{6+8-9}{12}=\frac{5}{12}$

e) $3-\frac{2}{7}=\frac{21-2}{7}=\frac{19}{7}$ f) $\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}=\frac{4+12-3}{12}=\frac{13}{12}$ g) $\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{6+5}{20}=\frac{11}{20}$ h) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}=1$

11) a) $\frac{19}{12}$ b) $\frac{17}{30}$ c) 3 d) $\frac{3}{44}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{43}{10}$ g) $\frac{1}{12}$ h) $\frac{31}{30}$ i) 0 l) $\frac{1}{6}$ m) $\frac{20}{33}$ n) $\frac{1}{5}$ o) $\frac{7}{45}$ p) $\frac{127}{64}$

12) a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{38}{63}$ d) $\frac{7}{9}$ e) 4 f) $\frac{11}{2}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{41}{5}$ i) $\frac{9}{4}$ l) $\frac{3}{2}$ m) $\frac{3}{4}$ n) $\frac{11}{6}$ o) $\frac{6}{11}$ p) $\frac{10}{9}$ q) 1 r) $\frac{63}{2}$ s) $\frac{162}{7}$

13) 24 14) a) 15) 17 euro e 20 centesimi 16) 45 tulipani 17) A rappresenta gli 8/9 di B

18) 30 euro 19) 120 20) 15 cm 21) 120 22) 1/15; 162 23) 1 euro e 20 centesimi 24) c)

25) 120 donne e 160 uomini 26) 130 27) 4/3 di ora = 1 ora e 20' 28) 1/6 di ora = 10'

29) In un numero di ore dato da $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}$ 30) In 12 ore (1 giornata lavorativa + 2 ore)

C) ESERCIZI SULLE PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI E DELLE POTENZE

Puoi cliccare sulla freccia per la correzione di A) … Z) ⇨

I) Per ciascuna espressioncina, a ogni passaggio, riconosci se è stata applicata qualche proprietà delle quattro operazioni o delle potenze; in caso affermativo, devi saperne dire il nome e descriverla.

A) $43\cdot 21=43\cdot(20+1)=860+43=903$

B) $105\cdot 107=(100+5)(100+7)=$
$=10000+700+500+35=$
$=10000+1200+35=11235$

C) $900:15=(30\cdot 30):15=2\cdot 30=60$

D) $215:5=(200+15):5=40+3=43$

E) $215:5=\dfrac{215}{5}=\dfrac{215\cdot 2}{5\cdot 2}=\dfrac{430}{10}=43$

F) $32\cdot 25=32\cdot\left(\dfrac{1}{4}\cdot 100\right)=\left(32\cdot\dfrac{1}{4}\right)\cdot 100=8\cdot 100=800$

G) $1200:25=4800:100=48$

H) $997-239=1000-242=758$

I) $25\cdot 28=25\cdot(4\cdot 7)=25\cdot 4\cdot 7=100\cdot 7=700$

J) $9{,}06:0{,}003=9060:3=(9000+60):3=$
$=3000+20=3020$

K) $2^5\cdot 2^3:2^7=2^8:2^7=2^1=2$

L) $\left(2^4\right)^3:\left(2^3\right)^2=2^{12}:2^6=2^6=64$

M) $30^5=(3\cdot 10)^5=3^5\cdot 10^5=$
$=243\cdot 100000=24300000$

N) $15^2\cdot 4^2=(15\cdot 4)^2=60^2=(6\cdot 10)^2=36\cdot 100=3600$

O) $8^4:2^8=\left(2^3\right)^4:2^8=2^{12}:2^8=2^4=16$

P) $20^3:4^3=5^3=125$ Q) $\left(\dfrac{4}{11}\right)^7\cdot\left(\dfrac{11}{4}\right)^7=1^7=1$

R) $4^7\cdot 8^2=\left(2^2\right)^7\cdot\left(2^3\right)^2=2^{14}\cdot 2^6=2^{20}=1048576$

S) $\left(7^6+7^5\right):7^4=7^6:7^4+7^5:7^4=7^2+7=49+7=56$

T) $\dfrac{7^6\cdot 7^5}{7^4}=7^6\cdot 7=7^7$ U) $2^4\left(2^6+2^8\right)=2^{10}+2^{12}$

V) $25^4\cdot 4^3=25\cdot 25^3\cdot 4^3=25\cdot 100^3=25000000$

E), F), G) si riferiscono ad accorgimenti
MOLTO UTILI PER IL **CALCOLO MENTALE**:
- ♫ dividere per 5 è come moltiplicare per 2 e poi dividere per 10 (o viceversa);
- ♫ moltiplicare per 5 è come dividere per 2 e poi moltiplicare per 10 (o viceversa);
- ♫ moltiplicare per 25 è come dividere per 4 e poi moltiplicare per 100 (o viceversa);
- ♫ dividere per 25 è come moltiplicare per 4 e poi dividere per 100 (o viceversa).

II) Le espressioni W, X, Y, Z sono SBAGLIATE. Perché?

W) $640:20:2=640:10=64$

X) $3+17\cdot 21=20\cdot 21=420$

Y) $(12\cdot 15):3=(12:3)\cdot(15:3)=4\cdot 5=20$

Z) $(4+6)(5+8)=20+48=68$

III) ESPRESSIONI CON POTENZE (risultati a fondo pagina; **clicca sulla freccia per la correzione** ⇨)

1) $5^2\cdot 5^4:5^3$ 2) $5^2+5^4:5^3$ 3) $\left(5^2+5^4\right):5^3$ 4) $\left(7^4\right)^3:\left(7^5\right)^2$

5) $2^{16}:2^8:2^4$ 6) $2^{16}:\left(2^8:2^4\right)$ 7) $\dfrac{2^3\cdot 2^5\cdot 2^7}{2^2\cdot 2^4\cdot 2^6}$ 8) $\dfrac{2^3+2^5+2^7}{2^2+2^4+2^6}$

9) $\dfrac{2^8\cdot 2^4\cdot 2^2\cdot 2}{\left\{\left[\left(2^2\right)^2\right]^2\right\}^2}$ 10) $\dfrac{2^8\cdot 2^4:2^2\cdot 2}{2^8:2^4\cdot 2^2:2}$ 11) $\dfrac{2^8\cdot 2^4:\left(2^2\cdot 2\right)}{2^8:\left(2^4\cdot 2^2\right):2}$ 12) $\dfrac{2^8+2^4:2^2+2}{2^8:2^4+2^2:2}$

13) $\dfrac{1^2+2^2+3^2}{6^2}$ 14) $\dfrac{1^3+2^3+3^3}{6^3}$ 15) $\dfrac{1^4+2^4+3^4}{6^4}$ 16) $\dfrac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{6^2}$ 17) $\dfrac{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3}{6^3}$ 18) $\dfrac{1^4\cdot 2^4\cdot 3^4}{6^4}$

IV) Le espressioni seguenti (19, 20, 21, 22) possono essere svolte con grande comodità se le si imposta in modo opportuno, tenendo presenti le proprietà delle potenze. Come? **Correzione** ⇨

19) $81^8:9^{15}$ 20) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}\cdot\left(\dfrac{12}{5}\right)^{10}$ 21) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^7\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^9\cdot 3^3$ 22) $\dfrac{44^4}{22^3}$

RISULTATI

1) 125 2) 30 3) $26/5=5{,}2$ 4) 49 5) $2^4=16$ 6) $2^{12}=4096$ 7) 8 8) 2 9) $1/2$
10) $2^6=64$ 11) $2^8=256$ 12) $131/9$ 13) $7/18$ 14) $1/6$ 15) $49/648$ 16) 1 17) 1 18) 1
19) 9 20) 1024 21) 75 22) $2^5\cdot 11=32\cdot 11=352$

D) ESERCIZI SULLE OPERAZIONI, COMPRESE LE POTENZE, E LE LORO PROPRIETA', NONCHE' SULL'USO DELLE PARENTESI (risposte a pag. 30)

1) Riempi i puntini, e dì quale proprietà è stata applicata:

a) $7\cdot(10+2)=70+\ldots$ b) $(4+6)\cdot 5=\ldots+30$ c) $(24+6):6=4+\ldots$
d) $364:26=182:\ldots$ e) $423-36=400-\ldots$ f) $(10+1)(3+1)=30+\ldots+\ldots+\ldots$

2) Scrivi il 2° membro, quando possibile.
Riconoscerai che ci sono invece tre casi nei quali si resta "bloccati" al 1° membro senza poter proseguire:

a) $a\cdot(b+c+d)=$ b) $(a+b+c)\cdot d=$ c) $\dfrac{a+b+c}{d}=$ d) $\dfrac{a}{b+c+d}=$

e) $(a+b+c)\cdot(d+e)=$ f) $\dfrac{a+b+c}{d+e}=$ g) $\dfrac{1}{a+b}=$

3) Il prodotto è distributivo rispetto alla somma quando la somma è a destra oppure anche a sinistra, mentre il quoziente è distributivo rispetto alla somma soltanto quando la somma è a ……………

4)

I) Se scrivo $24:(2+4)=12+6$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

II) Se scrivo $(60+45):3=20+45$
a) sbaglio
b) applico una proprietà associativa
c) applico una proprietà distributiva

III) Se scrivo $5600:800=56:8$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

IV) Se scrivo $3701-347=3700-346$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

V) Se scrivo $(8+16):(4+2)=8:4+8:2+16:4+16:2$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

VI) Se scrivo $(8+16)\cdot(4+2)=8\cdot 4+8\cdot 2+16\cdot 4+16\cdot 2$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

VII) Se scrivo $a:b=(a+c):(b+c)$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

VIII) Se scrivo $a:b=(a\cdot c):(b\cdot c)$
a) sbaglio
b) applico una proprietà invariantiva
c) applico una proprietà distributiva

5) Riempi i puntini, e dì quale proprietà è stata applicata.
Nel caso non sia possibile applicare nessuna proprietà, esegui il calcolo.

a) $3^4\cdot 3^2=\ldots^{\cdots}$ b) $(3^4)^2=\ldots^{\cdots}$ c) $3^4\cdot 3=\ldots^{\cdots}$ d) $3^4:3=\ldots^{\cdots}$ e) $3^4\cdot 2^4=\ldots^{\cdots}$
f) $10^4:2^4=\ldots^{\cdots}$ g) $3^4+3=\ldots$ h) $3^4+2^4=\ldots$ i) $10^4-2^4=\ldots$ l) $5^3\cdot\ldots^{\cdots}=5^{12}$
m) $(4\cdot 10)^3=4^{\cdots}\cdot 10^{\cdots}$ n) $(8:2)^4=8^{\cdots}:2^{\cdots}$ o) $10^6:10^{\cdots}=10^3$ p) $5^2\cdot 5\cdot 5^2=5^{\cdots}$ q) $\left[(2^2)^3\right]^4=2^{\cdots}$
r) $5^3:\ldots^{\cdots}=5$ s) $7^4:\ldots=7^3$ t) $(5^3)^{\cdots}=5^{12}$ u) $5^3\cdot\ldots^{\cdots}=20^3$ v) $10^3:\ldots^{\cdots}=5^3$

6) Si dice "**quadrato perfetto**" un intero, che sia uguale al quadrato di un altro intero.
Ad esempio, 144 è un "quadrato perfetto", perché $144=12^2$.
I primi quadrati perfetti sono:

$\mathbf{0}=0^2$, $\mathbf{1}=1^2$, $\mathbf{4}=2^2$, $\mathbf{9}=3^2$, $\mathbf{16}=4^2$, $\mathbf{25}=5^2$, $\mathbf{36}=6^2$, $\mathbf{49}=7^2$, $\mathbf{64}=8^2$, $\mathbf{81}=9^2$, $\mathbf{100}=10^2$.

Analogo è il significato della locuzione "**cubo perfetto**".

Per stabilire se un intero dato è un quadrato perfetto,
basta prendere la macchinetta calcolatrice ed estrarne la radice quadrata
(la radice quadrata di un numero è quel numero che elevato al quadrato dà come risultato il numero iniziale);
se in questo modo si ottiene un intero, la risposta è affermativa.

Fra i seguenti numeri, stabilisci quali sono quadrati o cubi perfetti, *senza però toccare la calcolatrice*.
Puoi procedere per tentativi, oppure ricorrere alla scomposizione in fattori primi: si avrà un quadrato perfetto quando nella scomposizione in fattori primi ciascun fattore compare con esponente pari, un cubo perfetto se …

a) 64 b) 216 c) 729 d) 4096 e) 324 f) 250 g) 2500 h) 1000000 i) 7529536 l) 85184

7) VERO O FALSO?

a) $3^0 = 0$	V	F	f) $0^0 = 1$	V	F	m) $3^3 : 3^3 = 3$	V	F	r) $25^{25} : 5^5 = 5^5$	V	F
b) $1^0 = 1$	V	F	g) $3^0 = 1$	V	F	n) $(3^3)^3 = 3^{27}$	V	F	s) $16^8 : 2^{32} = 1$	V	F
c) $1^3 = 3$	V	F	h) $3^3 \cdot 3^3 = 3^9$	V	F	o) $3^3 + 3^3 = 3^6$	V	F	t) $\forall n,\ 2 \cdot 2^n = 4^n$	V	F
d) $3^1 = 1$	V	F	i) $5^3 - 5^2 = 5$	V	F	p) $3^{333} - 3^{333} = 0$	V	F	u) $\forall n,\ 2^n : 2^n = 2$	V	F
e) $0^0 = 0$	V	F	l) $3^3 : 3^3 = 0$	V	F	q) $(3333^3)^0 = 1$	V	F	v) $\forall n,\ (2^n)^n = 2^{2n}$	V	F

8) Introduci le parentesi, nel primo membro, affinché l'uguaglianza sia corretta.
Determina inoltre il valore esatto dell'espressione a primo membro, in assenza di parentesi.

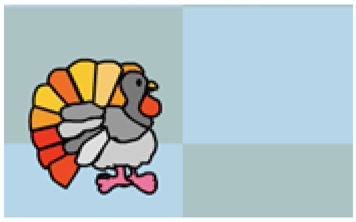
a) $2+3\cdot 4+5\cdot 6+7=5\cdot 4+5\cdot 13$
b) $2+3\cdot 4+5\cdot 6+7=2+17\cdot 6+7$
c) $2+3\cdot 4+5\cdot 6+7=2+3\cdot 9\cdot 6+7$
d) $2+3\cdot 4+5\cdot 6+7=19\cdot 6+7$
e) $64:16:2+2=64:8+2$
f) $64:16:2+2=64:16:4$
g) $6+2^2:2=8^2:2$
h) $6+2^2:2=10:2$
i) $2\cdot 2^2+2^3=2^3+2^4$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA (riconosci l'unica risposta esatta)

1) Se la divisione intera di n per 29 dà come quoziente 11 e come resto 7, allora n è uguale a
a) 200 b) 214 c) 312 d) 326

2) Quali delle seguenti uguaglianze equivale ad affermare che "dividendo x per 2, si ottiene quoziente y e resto 1"?
a) $x:2=y+1$ b) $x:2+1=y$ c) $2x+1=y$ d) $2y+1=x$

¡ Atrapa al correcto !



Per il fratellino/sorellina:
www.vedoque.com

3) Il cubo della metà del quadrato di 6 è:
a) <1000 b) compreso fra 1000 e 5000 c) compreso fra 5000 e 10000 d) >10000

4) Uno dei seguenti numeri è un cubo perfetto. Quale? a) 536 b) 8192 c) 16384 d) 32768

5) Cosa fa $\dfrac{10^{(4^3)}:(10^4)^3}{10^{43}}$? a) 100 milioni b) 1 miliardo c) 10 miliardi d) 100 miliardi

6) Con quanti zeri finali si scrive il numero "1 milione elevato a 1 milione"?
a) 12 b) 36 c) 46656 d) 6 milioni e) 6 mila miliardi f) 36 mila miliardi

7) Il termine "google" ha, in matematica, il significato di "1 seguito da cento zeri".
Con quanti zeri finali si scriverà la radice quadrata di 1 google, ossia il numero il cui quadrato è 1 google?
a) 10 b) 50 c) non termina, questo numero, con cifre 0

8) Il rapporto fra il cubo del triplo di un numero e il triplo del cubo dello stesso numero (non nullo) è:
a) 1 b) 3 c) 9 d) 27 e) dipende da quanto vale quel numero

9) $\dfrac{2^{1000}\cdot 4^{500}}{16^{100}}=$ a) 2^{1600} b) 32 c) 4^{1400} d) 8^{1300} e) nessuno dei valori precedenti

10) Quanti interi di 4 cifre sono cubi perfetti? a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

RISPOSTE AGLI ESERCIZI SU OPERAZIONI E PARENTESI

1) a) $70+14$ b) $20+30$ c) $4+1$ d) $182:13$ e) $400-13$ f) $30+10+3+1$

2) a) $ab+ac+ad$ b) $ad+bd+cd$ c) $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$ d) STOP e) $ad+ae+bd+be+cd+ce$ f) STOP g) STOP

3) soltanto quando la somma è a sinistra 4) I: a) II: a) III: b) IV: b) V: a) VI: c) VII: a) VIII: b)

5) a) 3^6 b) 3^8 c) 3^5 d) 3^3 e) 6^4 f) 5^4 g) 84 h) 97 i) 9984 l) $5^3\cdot 5^9$ m) $4^3\cdot 10^3$
n) $8^4:2^4$ o) $10^6:10^3$ p) 5^5 q) 2^{24} r) $5^3:5^2$ s) $7^4:7$ t) $(5^3)^4$ u) $5^3\cdot 4^3$ v) $10^3:2^3$

6) a) Q e C: $64=8^2=4^3$ b) C c) Q, C d) Q, C e) Q f) né Q né C g) Q h) Q, C i) Q, C l) C

7) a) F b) V c) F d) F e) F (operazione non eseguibile, perché "indeterminata") f) F: vedi quesito e) g) V h) F
i) F l) F m) F n) F o) F p) V q) V r) F s) V t) F : $2\cdot 2^n=2^{n+1}$ u) F: $2^n:2^n=1$ v) F: $(2^n)^n=2^{(n^2)}=2^{n^2}$

8) a) $(2+3)\cdot 4+5\cdot(6+7)=5\cdot 4+5\cdot 13$; *senza parentesi*: 51 b) $2+(3\cdot 4+5)\cdot 6+7=2+17\cdot 6+7$ *s.p.*: 51
c) $2+3\cdot(4+5)\cdot 6+7=2+3\cdot 9\cdot 6+7$ *s.p.*: 51 d) $(2+3\cdot 4+5)\cdot 6+7=19\cdot 6+7$; *s.p.*: 51
e) $64:(16:2)+2=64:8+2$ *s.p.*: 4 f) $64:16:(2+2)=64:16:4$ *s.p.*: 4
g) $(6+2)^2:2=8^2:2$ *s.p.*: 8 h) $(6+2^2):2=10:2$ *s.p.*: 8 i) $2\cdot(2^2+2^3)=2^3+2^4$ *s.p.*: 16

Quesiti a Risposta Multipla: 1) d 2) d 3) c 4) d 5) b 6) d 7) b 8) c 9) a 10) b

E) RIFLESSIONI SULLE OPERAZIONI, E SUGLI ERRORI PIU' FREQUENTI

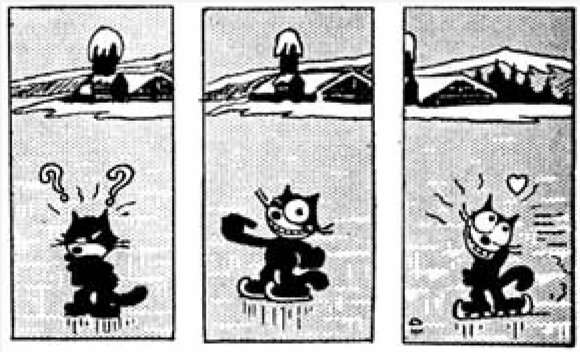
(le risposte sono alla pagina seguente)

- SCEGLI IL RISULTATO ESATTO:

I) $4\cdot\frac{3}{5}=?$ $\quad a)\ \frac{12}{20}\quad b)\ \frac{12}{5}\quad c)\ \frac{3}{20}$

II) $\frac{7}{11}:2=?$ $\quad a)\ \frac{14}{11}\quad b)\ \frac{7}{22}$

III) $\frac{3^2}{7}=?$ $\quad a)\ \frac{9}{7}\quad b)\ \frac{9}{49}$



- GIUSTO O SBAGLIATO?

Metti una crocetta sulla risposta esatta:

IV) $\frac{{}^5\cancel{25}\cdot\cancel{14}^2}{11\cancel{55}\cdot\cancel{21}_3}$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

V) $\frac{{}^5\cancel{25}+\cancel{14}^2}{11\cancel{55}+\cancel{21}_3}$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

VI) $\frac{{}^4\cancel{24}+5}{\cancel{18}_3}$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

VII) $\frac{\frac{\cancel{33}^3}{5}}{\frac{\cancel{22}^2}{7}}$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

VIII) $\frac{\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{15}_3}}{\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{35}_7}}$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

IX) $\frac{\frac15+\frac16}{15}=\left(\frac15+\frac16\right)\cdot15$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

X) $\frac{\frac17}{\frac34+\frac56}=\frac17\cdot\left(\frac43+\frac65\right)$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

XI) $\frac{4}{3+5}=\frac43+\frac45$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

XII) $\frac{8}{4+2}=8\cdot\left(\frac14+\frac12\right)$ $\boxed{G}$ $\boxed{S}$

- TROVA L'ERRORE, SE C'E'

XIII) $12\cdot\left[\left(\frac13+\frac14+\frac17\right)\cdot7-5\right]=12\cdot\left[\frac{28+21+12}{\cancel{84}12}\cdot\cancel{7}-5\right]=$

$=12\cdot\left[\frac{61}{12}-5\right]=\cancel{12}\cdot\frac{61-60}{\cancel{12}}=1$

XIV) $\left(\frac{10+\frac12}{5+\frac32}\right)^2=\left(\frac{{}^2\cancel{10}+\frac12}{{}_1\cancel{5}+\frac32}\right)^2=\left(\frac{\frac{4+1}{2}}{\frac{2+3}{2}}\right)^2=\left(\frac{\frac{\cancel5}{\cancel2}}{\frac{\cancel5}{\cancel2}}\right)^2=1^2=1$

XV) $\frac{\frac{2^2}{3}-\frac{2}{3^2}}{\frac{1}{4^2-2^2-2+0^2}}=\frac{\frac43-\frac29}{\frac{1}{16+4-2}}=\frac{\frac{12-2}{9}}{\frac{1}{18}}=\frac{10}{\cancel9}\cdot\cancel{18}^2=20$

XVI) $\frac{\frac{\frac13-\frac14}{2}}{6\cdot\left(\frac13+\frac14\right)}=\frac{\frac{\frac{4-3}{12}}{2}}{\cancel6\cdot\frac{4+3}{\cancel{12}_2}}=\frac{\frac{1}{\cancel{12}_6}\cdot\frac{\cancel2}{1}}{\frac72}=\frac{1}{\cancel6_3}\cdot\frac{\cancel2}{7}=\frac{1}{21}$

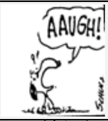
XVII) $\frac{\frac{1+\frac16}{2}+\frac{1-\frac16}{2}}{\frac12\cdot\frac13\cdot12}=\frac{\frac{\frac76}{2}+\frac{\frac56}{2}}{2}=\left(\frac{7}{12}+\frac{5}{12}\right)\cdot\frac12=\frac{\cancel{12}}{\cancel{12}}\cdot\frac12=\frac12$

XVIII) $\frac{4\cdot\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{42}-\frac{1}{14}\right)}{\frac23-\frac16}=\frac{4\cdot\frac{2+1-3}{42}}{\frac{4-1}{6}}=\frac{4\cdot\frac{0}{42}}{\frac36}=\frac{0}{\frac36}=0$

XIX) $\left(\frac{\frac32+2\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac43\cdot\frac92}{5}\right)^{10}=\left(\frac{\frac32+\cancel2\cdot\frac{1}{\cancel{12}_3}\cdot\frac{\cancel4}{\cancel3}\cdot\frac{\cancel9}{\cancel2}}{5}\right)^{10}=$

$=\left[\left(\frac32+1\right)\cdot\frac15\right]^{10}=\left(\frac{\cancel5}{2}\cdot\frac{1}{\cancel5}\right)^{10}=\left(\frac12\right)^{10}=\frac{1}{1024}$

RISPOSTE

I) $4\cdot\frac{3}{5}=?$ $\quad a)\ \frac{12}{20}$ $\quad \cancel{b)}\ \frac{12}{5}$ $\quad c)\ \frac{3}{20}$	Infatti $4\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 5}=\frac{12}{5}$. D'altronde, 4 volte 3/5 equivale a 4 volte 3 fette da 1/5 ciascuna, cioè 12 fette da 1/5, ossia 12/5.
II) $\frac{7}{11}:2=?$ $\quad a)\ \frac{14}{11}$ $\quad \cancel{b)}\ \frac{7}{22}$	Dividere per 2 equivale a moltiplicare per $\frac{1}{2}$. $\frac{7}{11}:2=\frac{7}{11}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{22}$
III) $\frac{3^2}{7}=?$ $\quad \cancel{a)}\ \frac{9}{7}$ $\quad b)\ \frac{9}{49}$	In assenza di parentesi, l'esponente si riferisce soltanto al numero più vicino (in questo caso, al 3). Invece: $\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{9}{49}$, $\frac{3}{7^2}=\frac{3}{49}$
IV) $\frac{\overset{5}{\cancel{25}}\cdot\overset{2}{\cancel{14}}}{{}_{11}\cancel{55}\cdot\cancel{21}_{3}}$ $\quad \boxed{\cancel{G}}$ $\quad \boxed{S}$	Tutti prodotti, si può semplificare (proprietà invariantiva)
V) $\frac{\overset{5}{\cancel{25}}+\overset{2}{\cancel{14}}}{{}_{11}\cancel{55}+\cancel{21}_{3}}$ $\quad \boxed{G}$ $\quad \boxed{\cancel{S}}$ 	Errore gravissimo. In una frazione, si può semplificare "sopra con sotto" soltanto se la semplificazione avviene (come nel IV) FATTORE CON FATTORE, MAI ADDENDO CON ADDENDO!
VI) $\frac{\overset{4}{\cancel{24}}+5}{\cancel{18}_{3}}$ $\quad \boxed{G}$ $\quad \boxed{\cancel{S}}$ 	Altro erroraccio tremendo (vedi esercizio precedente)
VII) $\frac{\frac{\cancel{33}^{\,3}}{5}}{\frac{\cancel{22}^{\,2}}{7}}$ $\quad \boxed{\cancel{G}}$ $\quad \boxed{S}$	Giusto. In un quoziente fra due frazioni, si possono semplificare i due numeratori fra loro (così come i due denominatori fra loro). Pensa infatti che trasformando in moltiplicazione si avrebbe: $\frac{\cancel{33}^{\,3}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{22}_{\,2}}$
VIII) $\boxed{\cancel{G}}$ $\quad \boxed{S}$	Giusto. Vedi esercizio precedente.
IX) $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{15}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot 15$ $\quad \boxed{G}$ $\quad \boxed{\cancel{S}}$	Ma no! Sarebbe come a dire che la "diviso" e la "per" sono la stessa cosa! Lo svolgimento corretto è invece: $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{15}=\frac{\frac{6+5}{30}}{\frac{15}{1}}=\frac{11}{30}\cdot\frac{1}{15}=\frac{11}{450}$
X) $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{6}{5}\right)$ $\quad \boxed{G}$ $\quad \boxed{\cancel{S}}$	No, no, no. "Capovolgere" una somma non equivale a capovolgere i singoli addendi! Lo svolgimento esatto è invece: $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{9+10}{12}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{19}{12}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{12}{19}=\frac{12}{133}$
XI) $\frac{4}{3+5}=\frac{4}{3}+\frac{4}{5}$ $\quad \boxed{G}$ $\quad \boxed{\cancel{S}}$	Sbagliatissimo "spezzare" la frazione in questo modo. $\frac{4}{3+5}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Invece sarebbe corretto spezzare se la somma fosse "sopra": ad esempio $\frac{3+5}{4}=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$ Insomma, ricorda: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ mentre $\frac{a}{b+c}\ \underset{\text{DA}}{\overset{\text{DIVERSO}}{\neq}}\ \frac{a}{b}+\frac{a}{c}$
XII) $\frac{8}{4+2}=8\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$ $\quad \boxed{G}$ $\quad \boxed{\cancel{S}}$	Erroraccio del tipo X). "Capovolgere" una somma non equivale a capovolgere i singoli addendi.

XIII) Tutto giusto. Anche l'uso delle parentesi è corretto: quando si fa il denominatore comune, si ottiene una sola frazione, quindi è meglio evitare le parentesi (a meno che la frazione sia elevata ad esponente). E' vero, la quadra potrebbe diventare tonda, ma lasciare la quadra non è affatto un errore.

XIV) Errore iniziale: non si può semplificare il 10 "sopra" col 5 "sotto", perché sono addendi e non fattori.

XV) Sbagliato, per via di una distrazione: -2^2 deve diventare -4 e non $+4$

XVI) Errore nel "capovolgimento: $\frac{\frac{4-3}{12}}{2}$ deve diventare $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}$ e NON $\frac{1}{12}\cdot 2$ XVII), XVIII), XIX) sono giuste

F) ESPRESSIONI

1) $4+6\cdot 2+4$ 2) $6+5\cdot 4+3\cdot 2$ 3) $30-3\cdot 4-2$ 4) $13+12:2+1$ 5) $24:8+4-2\cdot 3$ 6) $(125-11\cdot 2-3):25$

7) $10+(8+3)\cdot(2+3)$ 8) $(10+8+3)\cdot 2+3$ 9) $4+2\cdot(5-3)\cdot(5+4):2$ 10) $(4+2\cdot 5-3)\cdot(5+4:2)$

11) $[(25-7-3):(1+4)+1]\cdot 2$ 12) $(12:4+15:3)\cdot 4+4$ 13) $2+[2+(112:4-2):2]\cdot(137-126)$

14) $3\cdot\{10\cdot[(4+2\cdot 10):2-2]+1\}$ 15) $(1+2\cdot 3)\{[(12+5\cdot 3):(4+5)-1]\cdot 2+3\}-9$ 16) $\{[(3+5\cdot 2)\cdot 2+4]:6+1\}\cdot 8$

17) $\{[(12+33):5-9]\cdot 234+3\}\cdot(7-2)$ 18) $\{6\cdot[150-(7+5)(2+5\cdot 2)]+4\}:(4\cdot 3-1-2\cdot 3)$

19) $\{[(4+8)(7+2):6-3]\cdot(1+2)+5\}:5$ 20) $12\cdot 3-2\cdot\{[(10+14\cdot 4+6\cdot 3):(2+2\cdot 5)-4]:3\}$

21) $1+2\cdot 3^2$ 22) $(2+5^2):3^2-3^1$ 23) $[(2^2+2^2\cdot 5)\cdot 2-3]:(2^3-3)$ 24) $\dfrac{[3\cdot 2^4-(3\cdot 2)^2]^2-11\cdot 2^2}{3^3-21:3}$

25) $15\cdot 10^2:(20^2+10^2)$ 26) $[(3+5^2):(1+2\cdot 3)+3^2]-3\cdot 4$ 27) $\{[(1+3)^2+5^2-1]\cdot 3-20\}:5^2-2^2$

28) $\left\{2\cdot\left[\dfrac{(5^4)^4:(5^3)^3}{5^3\cdot 5^3}+2^2\right]+2\right\}^4:4^4$ 29) $\left(\dfrac{3^5\cdot 4^5:12^3-10^2}{11}+1\right)^6:(5^4\cdot 5)$ 30) $\left[\left(\dfrac{5^4\cdot 6^4}{30^3}:6+5\right)^2\right]^5:1000^3-10$

31) $\dfrac{25}{24}\cdot\dfrac{16}{35}-\dfrac{1}{7}$ 32) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}$ 33) $3\cdot\dfrac{4}{5}-14\cdot\dfrac{1}{10}$ 34) $5-\dfrac{6}{5}:\dfrac{9}{35}+\dfrac{6}{5}:2+\dfrac{1}{15}$ 35) $1+3\cdot\dfrac{5}{7}-8:7$

36) $\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{15}\right)\cdot\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot 4+\dfrac{1}{4}$ 37) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}\right)$ 38) $\dfrac{2}{7}+\left(2-\dfrac{8}{7}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$ 39) $\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{11}{15}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{12}\right):\dfrac{3}{5}+1$

40) $\left[\dfrac{5}{18}\left(4-\dfrac{2}{5}\right)+\dfrac{1}{3}\right]\cdot\dfrac{3}{2}$ 41) $2\cdot\left[\left(\dfrac{1}{38}+\dfrac{1}{57}\right):\dfrac{5}{228}-\dfrac{3}{2}\right]-1$ 42) $18\cdot\dfrac{5}{24}-6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}$ 43) $80\cdot\left(2:\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{2}:3+\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}\right)$

44) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}$ 45) $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}{2}$ 46) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{24}}$ 47) $\left(\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}{3}+1\right):5$ 48) $\dfrac{8}{\frac{3}{5}-\frac{1}{15}}$ 49) $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{14}+\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{8}$

50) $\left(\dfrac{\frac{2}{27}-\frac{1}{18}}{\frac{5}{6}}+\dfrac{1}{15}\right)\cdot\dfrac{9}{16}$ 51) $\dfrac{\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{24}{5}}$ 52) $\dfrac{\left(3-\frac{4}{3}-\frac{7}{12}\right)\cdot\left(1-\frac{17}{26}\right)+\frac{5}{8}}{\frac{3}{11}}-\dfrac{2}{3}$ 53) $\dfrac{\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}-3$

54) $\dfrac{\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{7}\right)\cdot 5-\frac{9}{7}\right]\cdot\frac{21}{2}-1}{40}+\dfrac{1}{2}$ 55) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\left(1+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}}{3}$ 56) $\left[\dfrac{1}{24}\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\left(3+\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{1}{8}\right]\cdot\dfrac{12}{5}+\dfrac{1}{10}$

57) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{10}{29}}{1{,}5}$ 58) $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{12}+0{,}0\bar{5}\right)\cdot 5-0{,}19\bar{4}\right]\cdot 3}{2}+2{,}25$ 59) $0{,}\bar{1}\cdot\left[\left(0{,}1\bar{6}+\dfrac{3}{4}\right)\cdot\dfrac{3}{22}+0{,}375\right]\cdot\dfrac{3}{2}-0{,}08\bar{3}$

60) $40\cdot\left[\dfrac{\left(0{,}0625\cdot 0{,}\overline{72}-\frac{1}{44}\right)\cdot 77}{4}+\dfrac{1}{16}\right]$ 61) $\left\{\left[\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right):\left(\dfrac{1}{5}-0{,}1\bar{6}\right)\cdot 0{,}15\right]+\dfrac{2}{3}\right\}:(2-0{,}\bar{3})$ 62) $\dfrac{0{,}0\bar{2}-0{,}\overline{02}}{0{,}0\overline{02}}$

63) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{10+3^2}{6^2}$ 64) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{3^2}{5}-\dfrac{3}{5^2}$ 65) $2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$ 66) $\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^6$

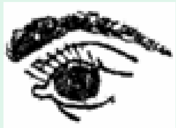
67) $\left(\dfrac{2^2}{3}-\dfrac{42}{70}\cdot\dfrac{15}{9}\right)^2+\dfrac{2^3}{9}$ 68) $\dfrac{\frac{3^2+1}{3^3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{1}{9}\right)^2}$ 69) $\dfrac{\frac{2^5-3^3}{75}+\frac{3}{4^2-2\cdot 3}}{\frac{22}{7^2-2^2}}$ 70) $\left[\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{1}{2\cdot 3^2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]\cdot\dfrac{2^3}{10}$

RISULTATI

1) 20 2) 32 3) 16 4) 20 5) 1 6) 4 7) 65 8) 45 9) 22 10) 77 11) 8 12) 36 13) 167 14) 303
15) 40 16) 48 17) 15 18) 8 19) 10 20) 34 21) 19 22) 0 23) 9 24) 5 25) 3 26) 1 27) 0 28) $5^4=625$
29) 5 30) 0 31) 1/3 32) 5/9 33) 1 34) 1 35) 2 36) 1/3 37) 2 38) 1 39) 2 40) 2 41) 0 42) 3 43) 10
44) 85/69 45) 1/4 46) 2/7 47) 2/9 48) 15 49) 1/8 50) 1/20 51) 0 52) 3 53) 0 54) 1 55) 1 56) 1
57) 1/3 58) 3 59) 0 60) 20 61) 1 62) 1 63) 1 64) 51/25 65) 0 66) 1 67) 1 68) 2 69) 3/4 70) 1/2

11. VARIE ...

IL GENIALE ALGORITMO (*) DI EUCLIDE PER IL CALCOLO DEL M.C.D.



Siano a, b i due interi di cui vogliamo determinare il Massimo Comun Divisore.
Calcoliamo il resto r della divisione intera $a:b$,
poi sostituiamo la coppia (a, b) con la coppia (b, r):
$a \leftarrow b,\ b \leftarrow r$ (cioè: b prende il posto di a, e a sua volta r prende il posto di b).
Si può dimostrare che il M.C.D. della "nuova" coppia coincide col M.C.D. della "vecchia".
Iteriamo (= ripetiamo) il procedimento per la nuova coppia; prima o poi, poiché operando in questo modo il "b", nella sua evoluzione, diventa sempre più piccolo, si arriverà ad avere $b = 0$.
Quando ciò accadrà, essendo $\text{M.C.D.}\ (a, 0) = a$, il valore che avrà a in quel momento sarà il M.C.D. cercato.

Esempio:

$a = 108,\ b = 84$

$108 : 84 = 1\ col\ resto\ di\ 24 \to r = 24$

$a = \cancel{108}\,84,\ b = \cancel{84}\,24$

$84 : 24 = 3\ col\ resto\ di\ 12 \to r = 12$

$a = \cancel{84}\,24,\ b = \cancel{24}\,12$

$24 : 12 = 2\ con\ resto\ 0 \to r = 0$

$a = \cancel{24}\,12,\ b = \cancel{12}\,0$

$Essendo\ b = 0,\ il\ procedimento\ termina:\ M.C.D. = a = 12$

Schematicamente:

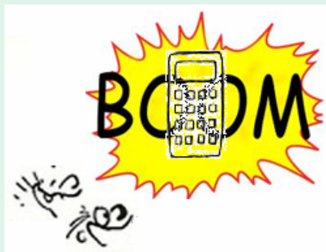
$a = 108,$	$b = 84$	$r = 24$
$a = 84,$	$b = 24$	$r = 12$
$a = 24,$	$b = 12$	$r = 0$
$a = 12,$	$\boxed{b = 0}$	$STOP$
		$\downarrow$
		$\text{M.C.D.} = 12$

(*) Un "**algoritmo**" (ne riparleremo, in modo più approfondito, nel Volume 2), è una **sequenza di istruzioni, di "passi", il cui scopo è la risoluzione di un problema di carattere generale**.
Le istruzioni di un algoritmo devono essere
- in numero finito, e concretamente eseguibili in un tempo finito;
- prive di ambiguità sia riguardo al contenuto che all'ordine di esecuzione.

ESERCIZIO

1) Serviti dell'Algoritmo di Euclide per determinare i seguenti M.C.D.
Ricontrolla i risultati mediante scomposizione in fattori.
a) M.C.D.(80, 35) b) M.C.D.(60, 135) c) M.C.D.(160, 104) d) M.C.D.(54, 144) e) M.C.D.(719, 520)

LA DISTRIBUTIVA E IL RIPOSO DELLA MACCHINETTA



La proprietà distributiva è davvero utilissima per il *calcolo mentale*!
Supponi di dover svolgere la moltiplicazione $37 \cdot 102$.
Allora potrai costruire, nel tuo pensiero, la catena
$37 \cdot 102 = 37 \cdot (100 + 2) = 37 \cdot 100 + 37 \cdot 2 = 3700 + 74 = 3774$
dove, fra l'altro, l'operazione $37 \cdot 2$ potrà essere effettuata anch'essa, volendo, come $(35 + 2) \cdot 2 = 70 + 4 = 74$ oppure come $(30 + 7) \cdot 2 = 60 + 14 = 74$.

ESERCIZIO

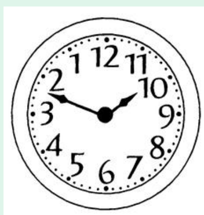
2) Prova a svolgere a mente, col metodo appena illustrato, i calcoli che seguono:
$43 \cdot 12\ (12 = 10 + 2)$; $41 \cdot 25\ (41 = 40 + 1)$; $82 \cdot 11$; $44 \cdot 22$; $103 \cdot 72$; $25 \cdot 33$

ESERCIZIO

3) A ben guardare, anche in una "normale" moltiplicazione fatta per iscritto col noto schema, la proprietà distributiva gioca un ruolo essenziale …
Immagina ad esempio di svolgere l'operazione $654 \cdot 321$ (vedi qui a fianco $\to$)
Ti sei mai chiesto a cosa si devono quei rientri verso sinistra
- del 1308 (un posto)
- e poi del 1962 (due posti)?

			6	5	4	×
			3	2	1	=
			6	5	4	
		1	3	0	8	–
	1	9	6	2	–	–
	2	0	9	9	3	4

LA BIZZARRA "ARITMETICA DELL'OROLOGIO"



Sono trascorse 3 ore dalle 11; che ora segna l'orologio del campanile adesso?
Nell' "aritmetica dell'orologio" $11 \oplus 3 = 2$.
A partire dalle ore 0, passano 5 turni di 4 ore ciascuno. Che ora segnano le lancette?
Nell' "aritmetica dell'orologio" $5 \otimes 4 = 8$.

ESERCIZIO

4) Spiega in che senso nell' "aritmetica dell'orologio" NON vale la "legge di annullamento del prodotto".

FRAZIONI PROPRIE, IMPROPRIE, APPARENTI

Una frazione si dice

- "propria" se il suo numeratore è minore del denominatore, ossia se il suo valore è <1
- "impropria" se il suo numeratore è maggiore del denominatore, ossia se il suo valore è >1
- "apparente" se il suo numeratore è multiplo del denominatore (oppure è 0).
  Una frazione apparente equivale quindi a un numero intero.

NOTA

Va detto che, riguardo a queste semplici definizioni,
non tutti i libri scolastici in realtà dicono proprio le stesse cose.
Ad esempio, qualcuno afferma che sia da considerare "impropria" anche una frazione
col numeratore *uguale* al denominatore, quindi equivalente all'unità.
Per il nostro testo, e per altri, una frazione come (ad esempio) 14/7 è sia impropria che apparente, mentre
c'è chi per frazione "impropria" intende "con numeratore maggiore *e non multiplo* del denominatore".
E una frazione con numeratore 0, quindi di valore uguale a 0, andrà considerata anch'essa "apparente"?
Mah … Noi abbiamo fatto questa scelta, tuttavia consultando vari testi il "mistero" rimane, in quanto
si tende ad evitare di affrontare la questione.
D'altronde, abbiamo pure detto che per "multipli di 5" si devono intendere i numeri $5, 10, 15, 20$, ecc.
mentre da qualche parte si legge che fra i multipli di un intero c'è sempre anche lo 0
(cosa che, a nostro parere, sembra del tutto bislacca, tant'è vero che, se la si accettasse, per coerenza
si sarebbe costretti ad ammettere che il minimo comune multiplo fra due interi qualsiasi … è sempre 0!).
Ah, questi matematici …
… Si mettessero un po' d'accordo, eviterebbero qualche stress in più ai nostri poveri ragazzi!

ESERCIZI (*numero "assoluto" = numero "senza segno". Si contrappone a "relativo" = "con segno"*)

5) Per quali valori interi (assoluti) di x la frazione $\frac{3+x}{6}$ è a) propria? b) impropria? c) apparente?

6) Per quali valori interi (assoluti) di y la frazione $\frac{6}{3+y}$ è a) propria? b) impropria? c) apparente?

PAROLE, ESPRESSIONCINE, PARENTESI (FORSE)

ESERCIZI

7) Scrivi, inserendo correttamente le parentesi *soltanto se strettamente necessario*,
le espressioni *aritmetiche* che corrispondono alle espressioni *verbali* seguenti:

a) "Somma al numero 58 il prodotto fra 13 e 14"
b) "Sottrai dal prodotto di 11 e 19, la somma fra 45 e 54"
c) "Addiziona il prodotto fra 13 e 12 col quoziente fra 24 e 4"
d) "Moltiplica 5 per la somma fra 7 e 9"
e) "Moltiplica la somma dei due numeri 12 e 8, per la differenza degli stessi numeri"
f) "Eleva al quadrato la somma dei quadrati dei numeri 2 e 3, e dividi il risultato per la somma fra 14 e 26"

RISPOSTE

3) Gli spostamenti verso sinistra della seconda riga di un posto,
e della terza di due, sono semplicemente dovuti al fatto che

$$654\cdot321 = 654\cdot(300+20+1) = 654\cdot300+654\cdot20+654\cdot1 =$$
$$= (654\cdot3)\cdot\underbrace{100}_{*} + (654\cdot2)\cdot\underbrace{10}_{**} + 654\cdot1$$

$*$ *moltiplicazione per* 100 : *spostamento di due posti a sinistra, come se si aggiungessero due zeri alla fine*

$**$ *moltiplicazione per* 10 : *spostamento di un posto a sinistra, come se si aggiungesse uno zero alla fine*

			6	5	4	×
			3	2	1	=
			6	5	4	
	1	3	0	8	(0)	
1	9	6	2	(0)	(0)	
2	0	9	9	3	4	

4) La "legge di annullamento del prodotto", valida nella "normale" aritmetica, afferma che
se il risultato di una moltiplicazione è 0, allora necessariamente almeno uno dei fattori deve essere 0.
Invece *nell'aritmetica dell'orologio ciò non è vero* perché, ad esempio, è $3\otimes4=0$

5) a) 0, 1, 2 b) 4, 5, 6, 7 ecc. c) 3, 9, 15, 21 ecc. 6) a) 4, 5, 6, 7 ecc. b) 0, 1, 2 c) 0, 3

7) a) $58+13\cdot14$ b) $11\cdot19-(45+54)$ c) $13\cdot12+24:4$ d) $5\cdot(7+9)$ e) $(12+8)\cdot(12-8)$ f) $(2^2+3^2)^2:(14+26)$

12. QUESITI TRATTI DA GARE MATEMATICHE

su: NUMERI INTERI; LE QUATTRO OPERAZIONI

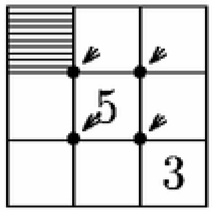
Al termine della rassegna c'è in qualche caso una breve indicazione (ma cerca prima di farne a meno!); se visiti, cliccando sul link sottolineato, i siti da cui provengono i problemi, sovente troverai anche la risoluzione in dettaglio.

Le risposte, invece, per evitare che si possa "sbirciare", sono state messe a pagina 39.

Il bel logo del carinissimo sito delle Olimpiadi Matematiche Messicane

1) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2004
Sam thinks of a number, and whispers it (*lo dice in un orecchio*) to Sabrina.
Sabrina either adds 2 to the number or doubles it, and whispers the result to Susan.
Susan takes that number and either subtracts 3 or divides the number by 3.
The final result she announces is 10. What is the largest number Sam may have given Sabrina?

2) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
Nel quadrato in figura si scrivono i numeri interi da 1 a 9 (senza ripetizione).
La somma dei quattro numeri intorno a ciascuno dei vertici indicati dalle frecce deve essere sempre 20. I numeri 3 e 5 sono stati già scritti.
Che numero va messo nella casella ombreggiata?
(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 7 (e) 9



3) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
Alicia va al club ogni giorno; Beatriz ogni 2 giorni; Carlos ogni 3; Daniel ogni 4; Enrique ogni 5; Francisco ogni 6 e Gabriela ogni 7. Se oggi si trovano tutti al club, fra quanti giorni torneranno a trovarsi tutti assieme per la prima volta?
(a) 27 (b) 28 (c) 210 (d) 420 (e) 5040

4) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Final Round, 1999
Josh found the value of 3^{19} to be $3^{19}=11a2261467$. He found all the digits (*digit* = *cifra*) correctly, except the third decimal digit which is denoted by *a*. The value of *a* is:
(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 7

5) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
Se si svolge il prodotto di tutti i numeri dispari compresi tra 1 e 1994, quale sarà la cifra delle unità del numero così ottenuto? (a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

6) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest, 2005 (Final)
Two operations * and $\odot$ are defined by the two tables below:

*	1	2	3
1	1	3	2
2	1	3	1
3	3	3	1

$\odot$	1	2	3
1	4	2	3
2	3	6	5
3	2	6	4

(For example, $1\odot 2=2$)

The value of $2\odot(3*3)$ is: (a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3 (e) 2

7) American Mathematics Competitions 2002
The dimensions of a rectangular box in inches (*inch* = *pollice*) are all positive integers and the volume of the box is $2002\ \text{in}^3$. Find the minimum possible sum in inches of the three dimensions.
(a) 36 (b) 38 (c) 42 (d) 44 (e) 92

8) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1998
In the following display each letter represents a digit:

3	B	C	D	E	8	G	H	I

The sum of any three successive digits (*digit* = *cifra*) is 18. The value of H is:
(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 7 (e) 8

9) Kangourou 2004
Cinque bambini pensano ciascuno a un numero, che può essere 1, o 2, o 4.
Si calcola il prodotto dei cinque numeri.
Quale può essere il risultato ottenuto?
(a) 100 (b) 120 (c) 256 (d) 768 (e) 2048

10) British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 2010
The value of $(100+98+96+...+4+2)-(1+3+5+...+97+99)$ is:
(a) 0 (b) 50 (c) 100 (d) 147 (e) None of these

11) Kangourou 2000
Se $A+1=B+2=C-3=D+4=E-5$ qual è il maggiore?
(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

12) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
Quanto vale la somma delle cifre del numero $N=10^{92}-92$?
(a) 1992 (b) 992 (c) 818 (d) 808 (e) 798

13) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2004
Beth buys $9 worth of oranges that sell for $0.75 each on Monday.
On Thursday she finds that the oranges are on sale at $0.25 each and buys another $9 worth.
What is the average cost (*costo medio*) per orange of the total number she bought?

14) British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1997
If a man walks to work and rides back home (*va al lavoro a piedi e ritorna in auto*)
it takes him an hour and a half. When he rides both ways, it takes 30 minutes.
How long would it take him to make the round trip by walking?
(a) $2\frac{1}{2}$ hrs (b) $1\frac{1}{4}$ hrs (c) $1\frac{1}{2}$ hrs (d) $3\frac{1}{2}$ hrs (e) $2\frac{3}{4}$ hrs

15) British Columbia Colleges Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round 1999
La notazione $n!$ (si legge: "n fattoriale") è definita nel modo seguente: $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1$.
Ad esempio, $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$.
La cifra delle unità nella somma $1!+2!+3!+...+1998!+1999!$ è uguale a:
(a) 0 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 9

16) Kangourou 2001
Una delle diagonali *d* divide un poligono di perimetro 31 cm in due poligoni di perimetro rispettivamente 21 cm e 30 cm. Allora la lunghezza di *d* è:
(a) 5 cm (b) 10 cm (c) 15 cm (d) 20 cm (e) non determinabile senza ulteriori informazioni

17) UK Junior Mathematical Olympiad 2011
Every digit of a given integer is either a 3 or a 4 with each occurring at least once
(*con ognuno che compare almeno 1 volta*).
The integer is divisible by both 3 and 4.
What is the smallest such integer?

18) Kangourou 2000
Se ogni lettera corrisponde ad una cifra differente, allora
$KANGAROO+10000\times AROO-10000\times KANG$ ("$\times$" indica l'ordinaria moltiplicazione) vale
(a) AROOAROO (b) AROOKANG (c) KANGKANG (d) KANGAROO (e) KAGANROO

QUALCHE INDICAZIONE

4) Il numero è multiplo di 9, e il criterio di divisibilità per 9 dice che …
7) $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ per cui i modi per esprimerlo come prodotto di tre interi sono …
10) E' uguale a $(100-99)+(98-97)+...$ quindi …
12) Il numero termina con 08, e prima c'è una sequenza di tanti 9 … Quanti?
15) A partire dall'addendo $5!$ la cifra delle unità della somma non cambia più, perché …

Risposte, NON ai quesiti precedenti ma a quelli delle pagg. 38-39 (su frazioni e potenze)

1) c 2) e 3) c 4) 3/5 5) b 6) b 7) d 8) b 9) c 10) d 11) e 12) c 13) d 14) c 15) b 16) e 17) c 18) d-a-c-b

QUESITI TRATTI DA GARE MATEMATICHE

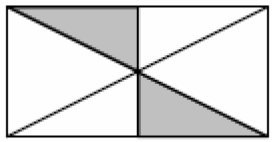
su: FRAZIONI E POTENZE

Al termine della rassegna c'è in qualche caso una breve indicazione (ma cerca prima di farne a meno!); se visiti, cliccando sul link sottolineato, i siti da cui provengono i problemi, sovente troverai anche la risoluzione in dettaglio.

Le risposte, invece, per evitare che si possa "sbirciare", sono state messe a pagina 37.

Plus de 6 millions de participants au jeu-concours Kangourou des Mathématiques en 2011

1) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2007



The large rectangle has sides of length 1 and 2. The two shaded triangles are right-angled triangles. What is the total area of the shaded region?

(a) 1 (b) 0.25 (c) 0.5 (d) $\frac{11}{10}$ (e) $\frac{2}{\sqrt{17}}$

2) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios

Un pastello viene accorciato togliendo ogni volta la terza parte del pastello che si aveva prima di spezzarlo. Che frazione del pastello iniziale rimane dopo aver accorciato tre volte?

(a) 2/3 (b) 4/3 (c) 4/9 (d) 8/9 (e) 8/27

3) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2006

John gives half his money to Emma, who then gives half of that to Séamus, who then gives half of that to John. What fraction of his original amount does John now have?

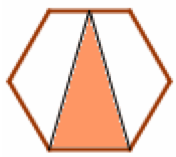
(a) 1/2 (b) 3/4 (c) 5/8 (d) 3/8 (e) 1/8

4) The Calgary Mathematical Association - Junior High School Mathematics Contest 2004

Mr. Smith pours a full cup of coffee and drinks 1/2 cup of it, deciding it is too strong and needs some milk. So he fills the cup with milk, stirs it, and tastes again, drinking another 1/4 cup. Once again he fills the cup with milk, stirs it, and finds that this is just as he likes it.

What ratio $\frac{\text{amount of coffee}}{\text{amount of milk}}$ does Mr. Smith like? (*ratio* = *rapporto*)

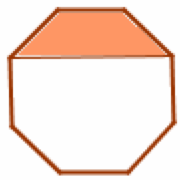
5) University of New Brunswick and Université de Moncton - Junior High School Mathematics Competition 1994



What fraction of the area of the regular hexagon is the shaded triangle?

(a) 1/4 (b) 1/3 (c) 3/8 (d) 5/12 (e) 1/2

6) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 1999



The figure to the right is a regular octagon.

What fraction of its area is shaded? (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $\frac{3}{8}$

7) Kangourou 2000

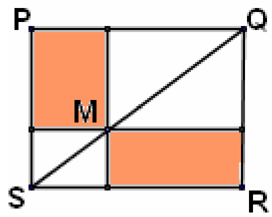
Charlie affitta la sua fiammante bicicletta agli amici nel modo seguente: per due tavolette di cioccolato quattro ore e per dodici caramelle tre ore. Mike dà a Charlie 1 tavoletta di cioccolato e 4 caramelle. Per quanto tempo potrà scorrazzare con la bicicletta di Charlie?

(a) Un'ora e mezza (b) 1 ora (c) 2 ore (d) 3 ore (e) 4 ore

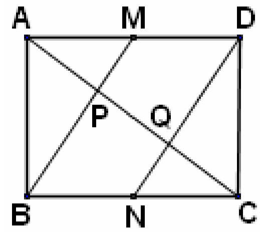
8) Kangourou 2000

800 dobloni hanno lo stesso valore di 100 ducati. 100 dobloni hanno lo stesso valore di 250 talleri. Quanti ducati hanno lo stesso valore di 100 talleri? (a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 25 (e) 50

9) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
In che rapporto stanno le aree delle due regioni grigie segnate nel rettangolo PQRS, se M è un punto qualunque della diagonale? (*Questo problema fa parte della gara Canguro Animado*)
(a) Quella in alto è più grande (b) Quella in basso è più grande
(c) Sono uguali (d) Sono uguali solo se M è il punto medio della diagonale
(e) Non si hanno dati a sufficienza per rispondere



10) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
Nel rettangolo della figura, M e N sono i punti medi di AD e BC, rispettivamente, e P e Q sono le intersezioni di AC con BM e ND. Supponendo che AD misuri 5 cm e AB 3 centimetri, di quanti centimetri quadrati è la superficie del quadrilatero MPQD?
(a) 2.75 (b) 3 (c) 3.25 (d) 3.75 (e) 4



11) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1991
Trova il valore del prodotto dei 98 numeri $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{4}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)...\left(1-\frac{2}{98}\right)\left(1-\frac{2}{99}\right)\left(1-\frac{2}{100}\right)$
(a) 1/10 (b) 98/100 (c) 1/6 (d)1/582120 (e) 1/4950

12) University of New Brunswick - Junior High School Mathematics Competition 1990
Two workers X and Y can do a job together in 4 hours.
If X alone takes 6 hours to do the job, then how long will it take Y alone to do the job?
(a) 8 h (b) 10 h (c) 12 h (d) 14 h (e) None of the previous answers

13) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
L'addestratore più esperto del circo ha bisogno di 40 minuti per lavare un elefante. E suo figlio porta a termine lo stesso compito in 2 ore. Quanti minuti ci metterebbero i due a lavare 3 elefanti lavorando insieme? (a) 30 (b) 45 (c) 60 (d) 90 (e) 100

14) American Mathematics Competitions 2002
The ratio (*rapporto*) $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ equals (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2 (e) 8

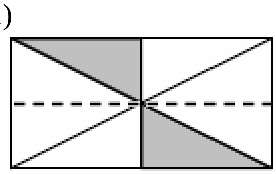
15) PRISM: Problem Solving for Irish Second level Mathematicians, 2006
An amoeba is placed in a jar and each minute it doubles its size by splitting its cells in two. Suppose that the jar will be completely filled in 10 minutes. How long (in minutes) would it take to fill the jar if instead of one amoeba there had been two amoebas in it to start? (a) 10 (b) 9 (c) 5 (d) 1 (e) 6

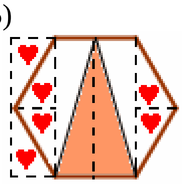
16) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 2005
Given the following: I. even (*pari*) II. odd (*dispari*) III. a perfect square IV. a multiple of 5
then it is true that the product $21\times35\times15$ is:
(a) II & IV (b) I & IV (c) II & III (d) III & I (e) II, III, & IV

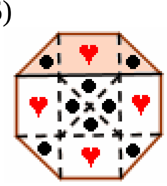
17) Olimpiada Mexicana de Matemáticas - Problemas Introductorios
Quante cifre ha il prodotto $2^{1998}\times5^{2002}$? (a)1999 (b) 2000 (c) 2001 (d) 2002 (e) 2003

18) British Columbia Colleges - Junior High School Mathematics Contest - Preliminary Round, 1997
Metti in ordine crescente i numeri $a=2^{800}$, $b=3^{600}$, $c=5^{400}$, $d=6^{200}$

QUALCHE INDICAZIONE

1)


5)


6)


9) SPQ e SRQ sono uguali, e anche altri triangoli in figura sono tra loro uguali …
12) Se un tale ci mette 6 ore a fare un lavoro, che frazione di quel lavoro fa in 1 ora?
17) $5^{2002}=5^{1998}\times...$ 18) $2^{800}=(...)^{100}$ ecc.

Risposte, NON ai quesiti precedenti ma a quelli di pag. 36-37 (su numeri interi e quattro operazioni)
1) 28 2) d 3) d 4) d 5) c 6) d 7) b 8) d 9) c 10) b 11) e 12) c 13) 37.5 cents 14) a 15) b 16) b 17) 3444 18) a