## CAPITOLO SECONDO – CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - ESERCIZI

**I.**1) Anna, Beatrice e Carla fanno una gara di corsa. Stimo che Anna e Carla siano ugualmente veloci e che Beatrice abbia probabilità doppia delle altre due di vincere la gara. Quale probabilità attribuisco alla vittoria di ciascuna?
[R. 0,25; 0,5; 0,25]

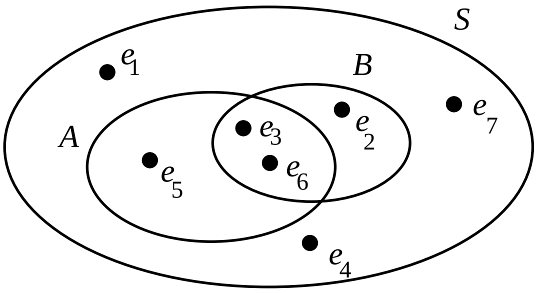
2) Ugo e Mario si sfidano a dama. Determinare la probabilità di ciascuno dei tre eventi elementari: "vince Ugo", "pareggio", "vince Mario" sulla base delle seguenti informazioni:
a) nelle ultime 16 partite vi sono stati 9 vittorie di Ugo, 5 pareggi e 2 vittorie di Mario;
b) mi è indifferente ricevere 10 € se vince Ugo, oppure 20 € in caso di pareggio, oppure 60 € se vince Mario.
[R. a) 0,5625; 0,3125; 0,125; b) 0,6; 0,3; 0,1]

3) In una partita di calcio, le probabilità dei tre eventi: la squadra di casa vince, o pareggia, o perde sono stimate rispettivamente con 0,5, 0,3 e 0,2. Avvicinandoci al ritrovo dei tifosi locali vediamo esposta la bandiera della squadra di casa, il che accade quando essa non ha perso. Come valutiamo adesso le probabilità dei tre eventi? [R. 0,625; 0,375; 0]

4) Uno spazio è costituito da tre eventi elementari $e_1$, $e_2$, $e_3$. Quali delle seguenti assegnazioni di probabilità costituiscono uno spazio probabilistico?
a) $p(e_1) = 0{,}4$ $p(e_2) = 0{,}5$ $p(e_3) = 0{,}2$
b) $p(e_1) = 1{,}6$ $p(e_2) = -0{,}2$ $p(e_3) = \frac{1}{4}$
c) $p(e_1) = 0{,}4375$ $p(e_2) = 0{,}1875$ $p(e_3) = 0{,}375$
d) $p(e_1) = \frac{1}{3}$ $p(e_2) = \frac{1}{17}$ $p(e_3) = \frac{31}{51}$ [R. c) e d)]

5) Un dado è truccato in modo che le facce 4 e 6 abbiano probabilità doppia delle altre quattro che sono equiprobabili. Costruire lo spazio probabilistico adeguato agli esiti del lancio del dado e calcolare la probabilità di ottenere:
a) un numero dispari;
b) un numero maggiore di 3. [R. 0,375; 0,625]

6) Lo spazio $S$ è costituito da sette eventi elementari con $p(e_1) = p(e_2) = p(e_3) = p(e_4) = 0{,}1$ e $p(e_5) = p(e_6) = p(e_7) = 0{,}2$.




Determinare le probabilità degli eventi composti $A$, $B$, $A \cup B$, $A \cap B$.
[R. 0,5; 0,4; 0,6; 0,3]

7) Anna, Beatrice e Carla si sfidano a corsa. Indicando le ragazze con le iniziali del loro nome, le probabilità dei possibili ordini di arrivo sono così stimate:

| 1° posto | 2° posto | 3° posto | probabilità |
|---|---|---|---|
| A | B | C | 18% |
| A | C | B | 9% |
| B | A | C | 40% |

| | | | |
|---|---|---|---|
| B | C | A | 20% |
| C | A | B | 2% |
| C | B | A | 11% |

Calcolare la probabilità che:
a) Beatrice vinca; b) Beatrice arrivi seconda;
c) Carla arrivi prima di Anna; d) Anna non arrivi ultima.
[R. a) 60%; b) 29%; c) 33%; d) 69%]

**2.**1) Un'urna contiene venti palline numerate da 1 a 20. Si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che il numero sorteggiato sia:
a) multiplo di 4 o di 5 b) multiplo di 5 o di 7 [R. 0,4; 0,3]

2) Si estrae una carta da un mazzo da quaranta. Calcolare la probabilità che esca:
a) una carta di cuori o una figura; b) un asso o una figura. [R. 0,475; 0,4]

3) Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che escano due numeri uguali o la cui somma sia sei? [R. $\frac{5}{18}$]

4) Su 625 alunni di un istituto 225 sono iscritti al centro sportivo e 150 seguono un corso di informatica. Calcolare la probabilità che un alunno sia iscritto al centro sportivo o al corso di informatica nelle seguenti ipotesi:
a) nessun alunno svolge entrambe le attività;
b) 75 alunni le svolgono entrambe. [R. a) 0,6; b) 0,48]

5) In base a rilevazioni statistiche stimo con $\frac{1}{1000}$ la probabilità che un automobilista abbia un giorno un incidente, anche lieve. Per calcolare la probabilità dell'evento $E$ = "nei prossimi 1000 giorni l'autista avrà almeno un incidente", ragiono così: poiché $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_{1000}$ dove $E_k$ è l'evento "fra $k$ giorni l'automobilista avrà un incidente", per il teorema della probabilità totale
$p(E) = p(E_1) + p(E_2) + ... + p(E_{1000}) = 1000 \cdot \frac{1}{1000} = 1$.
Il risultato è palesemente contrario al buon senso e all'intuizione. Perché il ragionamento esposto è errato?

6) Calcolare la probabilità di ottenere almeno una testa lanciando una moneta:
a) tre volte; b) quattro volte. [R. a) 0,875; b) 0,9375]

7) Lancio cinque volte una moneta. Qual è la probabilità che escano almeno due croci. [R. 0,8125]

8) Calcolare la probabilità di ottenere come somma dei numeri usciti almeno cinque lanciando: a) due dadi; b) tre dadi. [R. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{53}{54}$]

9) Determinare la probabilità di un evento dato a "7 contro 9". (***Avv.***: *Nel linguaggio degli scommettitori l'espressione* "7 *contro* 9" *significa che*, *su* 16 *casi*, 7 *sono favorevoli all'evento e* 9 *all'evento contrario*). [R. 0,4375]

10) Per il prossimo campionato mondiale di calcio, la vittoria del Brasile è data a "1 contro 4" e quella dell'Italia a "1 contro 7". Calcolare la probabilità che una delle due squadre vinca il prossimo mondiale. [R. 0,325]

**3.**1) Si estraggono due carte da un mazzo da quaranta. Calcolare la probabilità che siano:
a) due figure; b) due assi;
c) la prima un asso e la seconda una figura;
d) la prima una figura e la seconda un asso.
[R. a) $\frac{11}{130}$; b) $\frac{1}{130}$); c) $\frac{2}{65}$; d) $\frac{2}{65}$ ]

2) Ripetere l'esercizio precedente nell'ipotesi che la prima carta estratta venga rimessa nel mazzo. [R. a) 0,09; b) 0,01; c) 0,03; d) 0,03]

3) In un'urna vi sono 7 palline bianche e 13 nere. Si estraggono due palline. Qual è la probabilità che siano entrambe nere? E la prima nera e la seconda bianca? [R. $\frac{39}{95}$; $\frac{91}{380}$]

4) Ripetere l'esercizio precedente nell'ipotesi che la prima pallina estratta venga rimessa nell'urna. [R. $\frac{169}{400}$; $\frac{91}{400}$]

5) In un'urna vi sono *n* palline nere e una bianca. Si estraggono due palline: qual è la probabilità che siano entrambe nere? Per quale valore di *n* tale probabilità vale 0,9? [R. $\frac{n-1}{n+1}$; 19]

6) Si estraggono tre carte da un mazzo da quaranta. Calcolare la probabilità di ottenere:
   a) tre figure;
   b) nell'ordine: un asso, un sette, una figura. [R. a) $\frac{11}{494}$; b) $\frac{4}{1235}$]

7) In un'urna vi sono due palline bianche e tre nere. Si estraggono tre palline. Calcolare la probabilità che siano:
   a) tutte nere;
   b) la prima bianca e le altre nere. [R. a) 0,1; b) 0,2]

8) Si lancia otto volte una moneta. Qual è la probabilità che escano tutte teste? [R. circa 0,0039]

9) Quante volte bisogna lanciare una moneta affinché la probabilità di ottenere tutte teste sia inferiore a $10^{-6}$? [R. 20]

10) Qual è la probabilità con una schedina giocata a caso:
   a) di fare 13;
   b) di non indovinare alcun risultato? [R. a) $\frac{1}{1.594.323}$; b ) $\frac{8.192}{1.594.323}$]

11) Quattro amici, uscendo piuttosto alticci da un bar, indossano a caso i cappotti. Qual è la probabilità che ognuno prenda il suo? [R. $\frac{1}{24}$]

12) Due giocatori di pari abilità disputano una serie di partite. Vincerà chi per primo avrà totalizzato quattro vincite. Quando il primo giocatore sta conducendo per tre a zero decidono di sospendere il gioco e dividere la posta, che è di 64 euro, proporzionalmente alla probabilità di vittoria di ciascun giocatore. Come va ripartita la posta? (***Avv***.: *Conviene calcolare la probabilità di vittoria del secondo giocatore*). [R. 60 euro al primo giocatore e 4 al secondo]

**4.**1) Un'urna contiene sette palline bianche e tre nere. Si estraggono due palline. Calcolare la probabilità che siano:
   a) di colore diverso;
   b) dello stesso colore;
   c) almeno una nera. [R. a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{8}{15}$; c ) $\frac{8}{15}$]

2) Ripetere l'esercizio precedente nell'ipotesi che la prima pallina estratta venga rimessa nell'urna. [R. a) 0,42; b) 0,58; c) 0,51]

3) Un'urna contiene tre palline bianche, quattro nere, due rosse. Si estraggono due palline. Calcolare la probabilità che siano:
a) una rossa e una di un altro colore; b) dello stesso colore;
c) di colore diverso. [R. a) $\frac{7}{18}$; b) $\frac{5}{18}$ ; c) $\frac{13}{18}$]

4) Un'urna contiene $a$ palline azzurre, $b$ palline bianche, $c$ palline celesti. Si estraggono due palline, rimettendo la prima estratta nell'urna. Calcolare la probabilità che siano:
a) dello stesso colore;
b) di colore diverso. [R. a) $\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$ b) $\frac{2(ab+ac+bc)}{(a+b+c)^2}$]

5) Da ciascuno di due mazzi da quaranta si estrae una carta. Qual è la probabilità che almeno una delle due carte sia una figura? [R. 0,51]

6) Sono date due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 1 nera, la seconda 1 bianca e 2 nere. Si prende una carta da un mazzo da quaranta. Se è una figura si estrae una pallina dalla prima urna, altrimenti dalla seconda. Qual è la probabilità di ottenere una pallina nera? [R. $\frac{79}{150}$]

7) Una popolazione è formata da sei elementi. Due di essi presentano la caratteristica $A$ e quattro la caratteristica $B$ (ad esempio, su sei persone due sono maschi e quattro femmine; su sei palline due sono bianche e quattro nere, e così via). Scelti a caso tre elementi, qual è la probabilità che tale campione rispecchi esattamente la composizione della popolazione, cioè che un elemento presenti la caratteristica $A$ e due presentino la caratteristica $B$? [R. 0,6]

8) In una fabbrica vi sono tre macchine automatiche. Le probabilità che richiedano in un'ora l'intervento di un operaio sono rispettivamente 0,2, 0,4 e 0,5. Dire qual è la probabilità che in un'ora l'operaio debba intervenire:
a) su nessuna macchina;
b) su almeno una macchina. [R. a) 0,24; b) 0,76]

9) Claudia sfida Viola a tennis e a ping-pong. Ambedue le gare si concluderanno con una vittoria o con una sconfitta, senza pareggio. La probabilità che Claudia vinca a tennis è 0,3, che vinca a ping-pong è 0,8. Calcolare la probabilità che Claudia vinca:
a) esattamente una gara; b) almeno una gara. [R. a) 0,62; b) 0,86]

10) La probabilità che una persona di 25 anni giunga in vita all'età 75 è 0,57 per una donna e 0,52 per un uomo. Due venticinquenni si sposano. Qual è la probabilità che giunga in vita all'età 75:
a) uno solo dei due; b) nessuno dei due;
c) almeno uno dei due? [R. a) 0,4972; b) 0,2064; c) 0,7936]

11) Una cuoca, non troppo esperta, prepara il pranzo. Vi è la probabilità $\frac{1}{5}$ che la minestra risulti salata, $\frac{1}{2}$ che risulti insipida, $\frac{1}{6}$ che l'arrosto si bruci. Qual è la probabilità che il pranzo riesca bene? [R. $\frac{1}{4}$]

12) In una classe formata da sette ragazzi e nove ragazze si sorteggiano tre persone da mandare in gita premio. Qual è la probabilità che il gruppo:
a) sia formato da due maschi e una femmina;
b) comprenda almeno un maschio? [R. a) 0,3375; b) 0,85]

13) Si estraggono due carte da un mazzo da quaranta. Calcolare la probabilità di ottenere, nell'ordine, una figura e una carta di cuori.

[R. 0,075]

14) Compilando una schedina a caso, qual è la probabilità di indovinare almeno un risultato? [R. $\frac{1.586.131}{1.594.323}$]

15) Qual è la probabilità che, su quattro persone, almeno due festeggino il compleanno lo stesso mese? (Trascurare il fatto che le nascite possono essere più frequenti in certi mesi piuttosto che in altri). [R. $\frac{41}{96}$]

16) Determinare qual è il minimo valore di $n$ per cui è superiore a 0,5 la probabilità che, su $n$ persone, almeno due compiano gli anni lo stesso giorno. [R. 23]

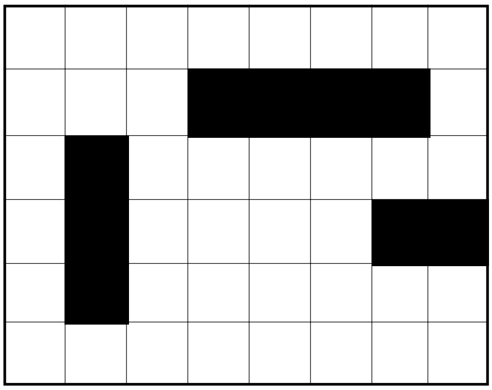
17) Dimostrare che, lanciando due volte una moneta truccata, la probabilità che si presentino due facce uguali supera la probabilità che si presentino due facce diverse. (***Avv***.: *Dette p la probabilità che esca testa e q quella che esca croce, ci si riconduce alla disuguaglianza* $(p - q)^2 > 0$, *sempre vera per* $p \neq q$).

18) «Siano $A$ e $B$ due eventi incompatibili e indipendenti. Sapendo che $p(A \cup B) = 0{,}7$ e $p(A \cap B) = 0{,}12$, determinare $p(A)$ e $p(B)$.

[R. $p(A) = 0{,}3$ e $p(B) = 0{,}4$ oppure $p(A) = 0{,}4$ e $p(B) = 0{,}3$] ».

Quale errore è contenuto nel testo di questo esercizio?

19) Inizio a giocare a battaglia navale. Dopo aver sparato a caso il primo colpo, se apprendo dall'avversario che è andato a segno, cerco col secondo colpo di colpire di nuovo la nave individuata. Nella situazione:

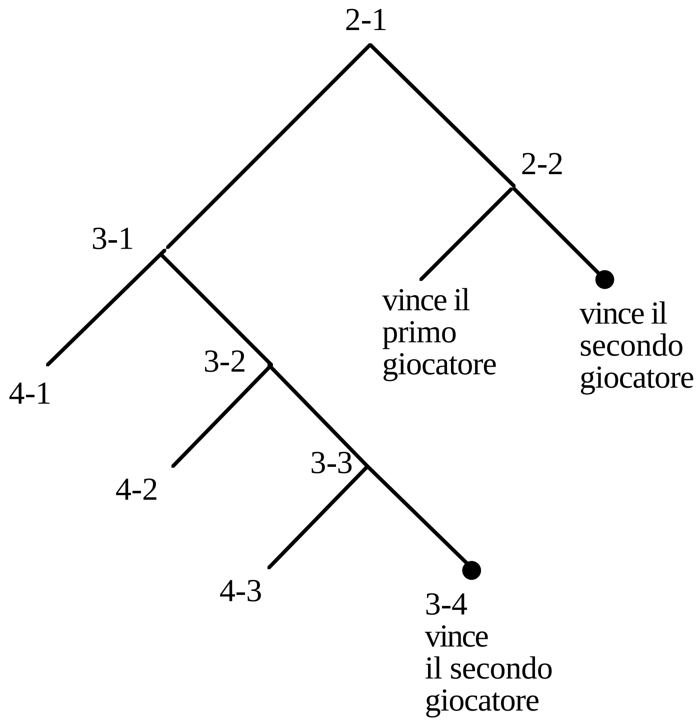


quale probabilità ho di affondare la nave più piccola con i primi due colpi.

[R. $\frac{7}{576}$]

20) Due giocatori di pari abilità disputano una serie di partite. Vincerà chi per primo avrà totalizzato quattro vincite. Quando il primo giocatore sta conducendo per 2 a 1, decidono d'interrompere la partita e dividere la posta, che è di 64 euro, proporzionalmente alla probabilità di vittoria di ciascun giocatore. Come va ripartita la posta?

(***Avv***.: *Aiutarsi con il seguente schema e calcolare la probabilità di vittoria del secondo giocatore, tenendo presente che sul* 2-2 *entrambi i giocatori hanno la stessa probabilità di vittoria*:




[R. 44 euro al primo giocatore e 20 al secondo]

**5.**1) Costruire lo spazio di probabilità relativo al lancio di un dado, condizionato all'evento "esce un numero minore di 5".

2) Un dado truccato ha la seguente distribuzione di probabilità:

| eventi elementari | esce 1 | esce 2 | esce 3 | esce 4 | esce 5 | esce 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| probabilità | 0,2 | 0,04 | 0,1 | 0,06 | 0,5 | 0,1 |

Costruire lo spazio di probabilità condizionato all'evento "è uscito un numero dispari".
[R. escono l'1 o il 3 o il 5 rispettivamente con probabilità 0,25; 0,125; 0,625]

3) Si lanciano quattro monete. Costruire lo spazio di probabilità relativo al numero di teste uscite condizionato all'evento "è uscita testa nella prima moneta".
[R. 1, 2, 3, 4 teste rispettivamente con probabilità 0,125; 0,375; 0,375; 0,125]

4) Per una partita di calcio, le probabilità dei tre eventi 1, X, 2 sono stimate rispettivamente con 0,4; 0,36; 0,24. Costruire lo spazio di probabilità condizionata all'evento "non c'è stato un pareggio".
[R. 1 con probabilità 0,625 e 2 con probabilità 0,375]

5) Si lanciano due dadi. Gli eventi "è uscito almeno un 1" e "la somma dei numeri usciti è 6" sono indipendenti? [R. no]

6) Si lanciano due dadi. Gli eventi "col primo dado è uscito un numero pari" e "la somma dei due numeri usciti è 7" sono indipendenti? [R. sì]

7) Fra gli studenti di un istituto, il 16% ha debito formativo in italiano e il 25% in matematica. Dire se i due eventi sono indipendenti nell'ipotesi che la percentuale degli studenti con debito formativo in entrambe le materie sia:
a) il 10%; b) il 4%. [R. a) no; b) sì]

8) Si estrae una carta da un mazzo da quaranta. Gli eventi "esce una carta di picche" e "esce una figura" sono indipendenti? [R. sì]

9) Si estraggono due carte da un mazzo da quaranta. Gli eventi “escono due carte di picche” e “escono due figure” sono indipendenti? [R. no]

**6.**1) Si lancia dodici volte una moneta. Calcolare la probabilità che escano cinque, oppure sei, oppure sette teste. [R. $\frac{627}{1024}$ ]

2) Si lancia venti volte una moneta. Calcolare la probabilità che il numero delle teste sia superiore a quattro e inferiore a sedici. (***Avv.***: *Determinare prima la probabilità dell’evento contrario*). [R. circa 0,988]

3) In un’urna vi sono quattro palline bianche e due nere. Si estraggono quattro palline. Qual è la probabilità che siano due bianche e due nere? E se si rimette ogni volta la pallina estratta nell’urna? [R. $\frac{2}{5}$; $\frac{8}{27}$]

4) In un’urna vi sono cinque palline bianche e cinque nere. Si estraggono sei palline. Qual è la probabilità che siano tre bianche e tre nere? E se si rimette ogni volta la pallina estratta nell’urna? [R. $\frac{10}{21}$; $\frac{5}{16}$]

5) In un’urna vi sono cinque palline bianche e cinque nere. Estraggo cinque palline. Qual è la probabilità che siano tre di un colore e due dell’altro? [R. $\frac{50}{63}$]

6) Si sperimenta su otto pazienti l’efficacia di un farmaco, ottenendo i seguenti risultati:

| | guariti | non guariti |
|---|---|---|
| hanno assunto il farmaco | 3 | 1 |
| non hanno assunto il farmaco | 1 | 3 |

Qual è la probabilità che l’efficacia del farmaco sia solo apparente, e sia stata ottenuta per puro caso? (***Avv.***: *È come estrarre quattro palline da un’urna che ne contiene quattro bianche e quattro nere, ed ottenerne almeno tre bianche*)

[R. $\frac{17}{70}$, troppo elevata per poter considerare efficace il farmaco]

7) Un satellite trasmette segnali in codice binario {0, 1}. La probabilità che un segnale venga interpretato correttamente è 0,8 (e di conseguenza è 0,2 la probabilità che venga interpretato in modo errato, cioè 1 se è 0 e 0 se è 1). Ogni segnale è ripetuto cinque volte e a terra è interpretato a maggioranza (cioè 1 oppure 0 a seconda di come è la maggioranza dei segnali). Qual è la probabilità che il segnale cosi ripetuto venga interpretato in modo errato? [R. 0,05792]

8) Lanciando tre dadi, e scommettendo sulla somma dei numeri usciti, conviene puntare sul nove o sul dieci? [R. sul dieci; le due probabilità sono $\frac{25}{216}$ e $\frac{27}{216}$]

9) Due giocatori di pari abilità disputano una serie di cinque partite, ognuna delle quali si concluderà necessariamente con una vittoria. Qual è la probabilità che la gara termini con un solo punto di distacco del vincitore sul perdente? [R. 0,625]

10) In uno scatolone sono posti, alla rinfusa, cinque paia di scarpe. Scegliamo a caso quattro scarpe. Qual è la probabilità di ottenere:
a) due paia di scarpe;
b) nessun paio di scarpe;
c) esattamente un paio di scarpe;
d) almeno un paio di scarpe?

(***Avv***.: *Una volta risposto ad* a) *e* b), *si può rispondere facilmente a* c) *ricordando il teorema della probabilità dell'evento contrario*; d) *è l'evento contrario a* b) *per cui...*). [R. $\frac{1}{21}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{13}{21}$]

11) Sei persone si distribuiscono a caso in tre scompartimenti di una vettura ferroviaria. Qual è la probabilità che si dispongano:
 a) tutte in un solo scompartimento;
 b) due per scompartimento;
 c) tre, due e una per scompartimento?
 (***Avv***.: *Indicati con a, b, c i tre scompartimenti, ad esempio la sequenza a a b a b c significa ... per cui i casi possibili sono ...*) [R. $\frac{1}{243}$; $\frac{10}{81}$; $\frac{40}{81}$]

12) Si prendono quattro carte da un mazzo da quaranta. Qual è la probabilità che:
 a) nessuna sia una figura;
 b) esattamente una sia una figura;
 c) esattamente due siano figure;
 d) almeno tre siano figure? [R. a) 0,224; b) 0,430; c) 0,273; d) 0,073 circa]

13) Si prendono quattro carte da un mazzo da quaranta. Qual è la probabilità che siano:
 a) tutte di seme diverso;
 b) due di cuori e due di fiori;
 c) due di un seme e due di un altro? [R. circa 0,109; 0,022; 0,133]

14) Gioco a poker con tre amici con 32 carte: 7, 8, 9, 10, J, Q, R, A. Qual è la probabilità che riceva servito:
 a) una scala reale;
 b) un poker;
 c) colore (tutte le carte dello stesso seme);
 d) un full;
 e) un tris? [R. a) $\frac{5}{50.344}$ ; b) $\frac{1}{899}$; c) $\frac{1}{899}$; d) $\frac{6}{899}$); e) $\frac{48}{899}$]

## RISPOSTE AD ALCUNI ESERCIZI

**4.**11) Può sembrare corretta la soluzione $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$ ottenuta moltiplicando le probabilità che la minestra non sia salata, che la minestra non sia insipida e che l'arrosto non sia bruciato. Essa è tuttavia errata. Ci si può convincere di questo fatto osservando che, se la minestra risultasse salata con probabilità $\frac{1}{2}$ e insipida con probabilità $\frac{1}{2}$, allora la probabilità che la minestra vada bene sarebbe evidentemente 0, e non $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. L'errore consiste nel supporre i due eventi indipendenti. Invece, se la minestra non è salata, la probabilità che non sia insipida diminuisce. La soluzione corretta si ottiene osservando che la probabilità che la minestra sia salata o insipida è $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$, e quindi la probabilità che la minestra vada bene risulta $1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$. La probabilità richiesta è pertanto: $\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$.

**4.**16) Supponiamo che le persone siano 2 ($n$ = 2). La prima è nata in un certo giorno. La probabilità che la seconda non sia nata in quel giorno (non si considerano anni bisestili)

è $\frac{364}{365} \approx 0{,}99726$, e quindi che abbiano lo stesso compleanno è $1 - 0{,}99726 = 0{,}00274$.
Supponiamo ora che le persone siano 3 ($n = 3$). La probabilità che due qualsiasi di esse non abbiano lo stesso compleanno è $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \approx 0{,}9918$, e quindi che almeno due abbiamo lo stesso compleanno è circa $1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$.
In generale, la probabilità che di $n$ persone due non abbiamo stesso compleanno è $\frac{364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^{n-1}}$. Al crescere di $n$ tale probabilità diminuisce e vale circa 0,5243 per $n = 22$ e 0,4927 per $n = 23$. Quindi, per $n = 22$, la probabilità che due persone abbiano lo stesso compleanno è circa $1 - 0{,}5243 = 0{,}4757$ e, per $n = 23$, è circa $1 - 0{,}4927 = 0{,}5073$, ossia maggiore di 0,5. In altre parole, prese a caso 23 persone, è più probabile che almeno due abbiano lo stesso compleanno piuttosto che il contrario. A titolo di curiosità, tale probabilità sale a circa 0,7063 per $n = 30$, a 0,8912 per $n = 40$, a 0,9703 per $n = 50$.

Questo esempio è considerato un "paradosso" della probabilità: dal punto di vista intuitivo, non sembra accettabile che bastino 23 persone per rendere maggiore di 0,5 la probabilità che almeno due di esse siano nate nello stesso giorno. Ciò deriva dal fatto che è raro incontrare persone che festeggino il compleanno nel nostro stesso giorno. Bisogna tuttavia tener distinto il problema di trovare fra $n$ persone due che siano nate lo stesso giorno e quello di trovare una persona che sia nata nello stesso giorno di una scelta fra le $n$. In questo secondo caso, la probabilità che, scelta una di $n$ persone, le altre siano nate in giorni diversi da essa è $\left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$ e quindi che ve ne sia almeno una con lo stesso compleanno di quella scelta è $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1}$. Anche quest'ultimo valore cresce con $n$, ma molto più lentamente. Per $n = 50$ è circa 0,1258, per $n = 80$ è circa $\frac{1}{5}$ e diventa maggiore di $\frac{1}{2}$ solo per $n = 254$ . Inoltre, per $n = 366$ è circa $\frac{2}{3}$ e tende a 1 solo al tendere di $n$ all'infinito (nel caso precedente è 1 per $n = 366$).

**4.**18) Se due eventi sono incompatibili, allora sono dipendenti; il realizzarsi di uno dei due rende nulla la probabilità dell'altro.

**4.**20) Calcoliamo la probabilità di vittoria del secondo giocatore quando il punteggio è 2-1 in favore del primo giocatore. Dopo un'altra partita, con probabilità $\frac{1}{2}$ il punteggio passa sul 3-1 e con probabilità $\frac{1}{2}$ sul 2-2. Nel primo caso, come emerge dal diagramma ad albero, la probabilità di vittoria del secondo giocatore è $\frac{1}{8}$, mentre nel secondo, essendo i giocatori in parità, è $\frac{1}{2}$. In definitiva, la probabilità di vittoria del secondo giocatore è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$. Quella del primo è $\frac{11}{16}$ e quindi la posta va ripartita in parti proporzionali a 11 e 5.
Problemi come questo hanno avuto un ruolo importante nella storia della teoria della probabilità. Erano detti "problemi della suddivisione della posta" e consistevano appunto nello stabilire come due giocatori, in caso di interruzione di una partita, dovessero spartirsi la posta. Nella sua soluzione si cimentarono con esiti deludenti molti

matematici (tra cui Luca Pacioli, Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano): solo i fondatori del calcolo delle probabilità, Blaise Pascal e Pierre de Fermat, lo risolsero in modo soddisfacente.

**6.**1) $\dfrac{C_{12,5}+C_{12,6}+C_{12,7}}{2^{12}}$.

**6.**2) $1-\dfrac{2\cdot\left(C_{20,0}+C_{20,1}+C_{20,2}+C_{20,3}+C_{20,4}\right)}{2^{20}}$.

**6.**3) $\dfrac{C_{4,2}\cdot C_{2,2}}{C_{6,4}}$ e $C_{4,2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$.

**6.**4) $\dfrac{\left(C_{5,3}\right)^2}{C_{10,6}}$ e $C_{6,3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$.

**6.**5) $\dfrac{2\cdot C_{5,3}\cdot C_{5,2}}{C_{10,5}}$.

**6.**6) $\dfrac{C_{4,4}+4\cdot C_{4,3}}{C_{8,4}}$.

**6.**7) $0,2^5+5\cdot 0,2^4\cdot 0,8+C_{5,2}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^2$.

**6.**8) La risoluzione di questo esercizio ha le sue radici nella preistoria del calcolo delle probabilità e come protagonista Galileo Galilei. Alcuni giocatori gli avevano posto il seguente quesito relativo alla probabilità di ottenere un certo punteggio lanciando tre dadi. Essi si erano accorti che il 9 era svantaggiato rispetto al 10, ma non sapevano rendersene ragione perché sia il 9 sia il 10 potevano essere ottenuti con 6 possibilità:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| per il 9: | 1-2-6 | 1-3-5 | 1-4-4 | 2-2-5 | 2-3-4 | 3-3-3 |
| per il 10: | 1-3-6 | 1-4-5 | 2-2-6 | 2-3-5 | 2-4-4 | 3-3-4 |

Il punto è, come osserva Galileo, che i casi con tre esiti diversi, come 1-2-6, si possono realizzare in sei modi (1+2+6, 1+6+2, 2+1+6, 2+6+1, 6+1+2, 6+2+1), i casi con due esiti uguali, come 1-4-4, in tre modi (1+4+4, 4+1+4, 4+4+1) e i casi con tre esiti uguali, come 3-3-3, in un modo solo (3+3+3). Dei 216 possibili esiti ve ne sono 25 favorevoli al 9 e 27 favorevoli al 10.

**6.**9) $\dfrac{C_{5,3}+C_{5,2}}{2^5}$ = 0,625.

**6.**10) Indichiamo con $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$, $D_1$, $D_2$, $E_1$, $E_2$ le dieci scarpe. Ne estraiamo 4. I casi possibili sono $C_{10,4}$ = 210

a) Le combinazioni che contengono esattamente due paia di scarpe:

$A_1\ A_2\ B_1\ B_2$, $A_1\ A_2\ C_1\ C_2$, ... $D_1\ D_2\ E_1\ E_2$

sono $C_{5,2}$ = 10, per cui la probabilità è $\dfrac{10}{210}=\dfrac{1}{21}$.

b) Per determinare le combinazioni che non contengono alcuna coppia, scegliamo 4 tra A, B, C, D, E, e ciò può essere fatto in 5 modi. Poi mettiamo gli indici in tutti i modi possibili:

1,1,1,1; 1,1,1,2; 1,1,2,1; ... 2,2,2,2

che sono 16. I casi favorevoli sono 5·16 = 80, per cui la probabilità è $\dfrac{8}{21}$.

c) $1-\left(\frac{1}{21}+\frac{8}{21}\right)=\frac{4}{7}$.

d) $\frac{1}{21}+\frac{4}{7}=\frac{13}{21}$.

Al punto b) si può rispondere più rapidamente con la regola della probabilità composta. Scegliere la prima scarpa qualsiasi, la seconda di un paio diverso dalla prima, la terza di un paio diverso dalle prime due e la quarta di un paio diverso dalle prime tre ha probabilità $1\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{8}{21}$.

**6.**11) Indicati con $a$, $b$, $c$ i tre scompartimenti, la sequenza $a\ a\ b\ a\ b\ c$ significa prima persona in $a$, seconda in $a$, terza in $b$, quarta in $a$, quinta in $b$ e sesta in $c$. I casi possibili sono quante le sequenze, ossia le disposizioni con ripetizione di 3 oggetti a 6 a 6 = $3^6$ = 729.

a) I casi favorevoli sono evidentemente 3, per cui la probabilità è $\frac{1}{243}$.

b) I casi favorevoli sono $C_{6,2}\cdot C_{4,2}$, per cui la probabilità è $\frac{10}{81}$.

c) I casi favorevoli sono $C_{6,3}\cdot C_{3,2}\cdot 3!$, per cui la probabilità è $\frac{40}{81}$.

**6.**12) a) $\frac{C_{28,4}}{C_{40,4}}$; b) $\frac{12\cdot C_{28,3}}{C_{40,4}}$; c) $\frac{C_{12,2}\cdot C_{28,2}}{C_{40,4}}$; d) $\frac{28\cdot C_{12,3}}{C_{40,4}}+\frac{C_{12,4}}{C_{40,4}}$ che è uguale a 1 – la somma di quanto ottenuto in a), b) e c).

**6.**13) a) $\frac{10^4}{C_{40,4}}\approx 0{,}109$. b) $\frac{C_{10,2}\cdot C_{10,2}}{C_{40,4}}\approx 0{,}022$. c) $\frac{C_{4,2}\cdot C_{10,2}\cdot C_{10,2}}{C_{40,4}}\approx 0{,}133$.

**6.**14) I casi possibili sono $C_{32,5}=$ 201 376.

a) Per ciascun seme le scale reali sono 5, per cui la probabilità è $\frac{4\cdot 5}{201.376} = \frac{5}{50.344}$.

b) Un poker si ottiene accostando a quattro 7, o a quattro 8, o a quattro 9, ... (8 possibilità) una delle restanti 28 carte; la probabilità è $\frac{8\cdot 28}{201.376} = \frac{1}{899}$.

c) $\frac{4\cdot C_{8,5}}{201.376} = \frac{1}{899}$.

d) Un full si ottiene scegliendo un tris qualsiasi (8·4 possibilità) e una coppia di altro valore (7·6 possibilità), per cui la probabilità è $\frac{8\cdot 4\cdot 7\cdot 6}{201.376} = \frac{6}{899}$.

e) Per aver servito un tris d'assi, i casi favorevoli si ottengono scegliendo un tris d'assi (4 possibilità) e due carte fra le rimanenti 28, ossia $C_{28,2}$ = 378. Per escludere il caso del full, bisogna che le due carte non formino una coppia. Ciò riduce i casi a 336. La probabilità è $\frac{4\cdot 336}{201.376} = \frac{6}{899}$. Per passare al caso di un tris qualsiasi, basta moltiplicare per 8 e la probabilità è $\frac{48}{899}$.