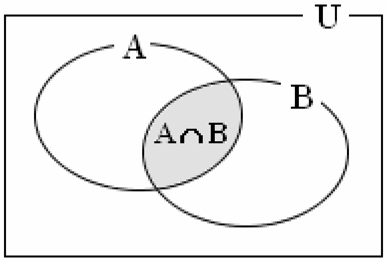
7.2 - Teorema sulla probabilità dell'evento intersezione (detto "teorema delle probabilità composte")

Sia U l'insieme universo dei casi equipossibili, e siano $A \subseteq U$, $B \subseteq U$. Avremo

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} \cdot \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = p(A) \cdot p(B/A)$$



E in modo del tutto analogo si potrebbe ottenere

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$$

Resta così dimostrato il notevole

TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE:

$$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)} \quad \text{oppure} \quad \boldsymbol{p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)}$$

Se A, B sono stocasticamente indipendenti la formula diventa semplicemente

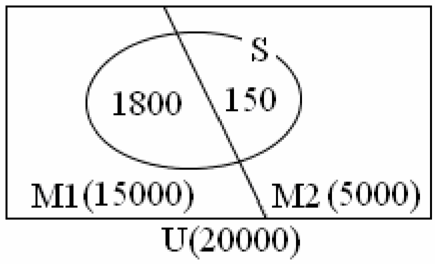
$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$ **TEOREMA DELLE PROB. COMPOSTE PER EVENTI INDIPENDENTI**

- **Esempio**
Due macchine M1 ed M2 di un'officina producono complessivamente 200 copie all'ora di un certo articolo.
La macchina M1 è più veloce perché produce 150 pezzi all'ora, ma di questi mediamente il 12% è di scarto;
la produzione della M2 è invece soltanto di 50 pezzi all'ora, ma lo scarto è irrisorio: solo il 3%.
I pezzi prodotti sono stati immagazzinati tutti insieme, cosicché non ci è possibile stabilire quali provengano dalla M1 e quali dalla M2.
Se preleviamo un pezzo a caso dal magazzino, qual è la probabilità che provenga dalla macchina M2 e sia di scarto?

1° modo di risolvere (col teorema delle probabilità composte)

Poniamo
M2 = "il pezzo prelevato proviene dalla macchina M2"
S = "il pezzo prelevato è di scarto".

Avremo: $p(M2 \cap S) = p(M2) \cdot p(S/M2) = \frac{50}{200} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{400}$



2° modo di risolvere (senza teoremi, con visione "frequentista")
Dopo 100 ore di produzione, la situazione del magazzino sarà, pressappoco, quella illustrata nella figura.
Osservandola si ha subito $p(M2 \cap S) = 150/20000 = 3/400$

Una CONSEGUENZA IMPORTANTE DEL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE è:

♥ $$\boldsymbol{p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Questa formula viene utilizzata sovente, in Calcolo delle Probabilità.

- **Esempio**
a) Se, lanciando due dadi, la somma dei punteggi ottenuti è 8, calcolare la probabilità che uno dei due esiti sia stato "6".
b) Quanto varrebbe la probabilità richiesta se al posto di una somma uguale a 8 considerassimo una somma uguale a 9, 10, 11 rispettivamente?

a) Casi possibili: (4, 4); (3, 5); (5, 3); (2, 6); (6, 2); casi favorevoli: (2, 6); (6, 2); $p = 2/5$

oppure: $p(6/somma\ 8) = \frac{p(6 \cap somma\ 8)}{p(somma\ 8)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$

b) Per il 9: $p = 1/2$; per il 10: $p = 2/3$; per l'11: $p = 1$