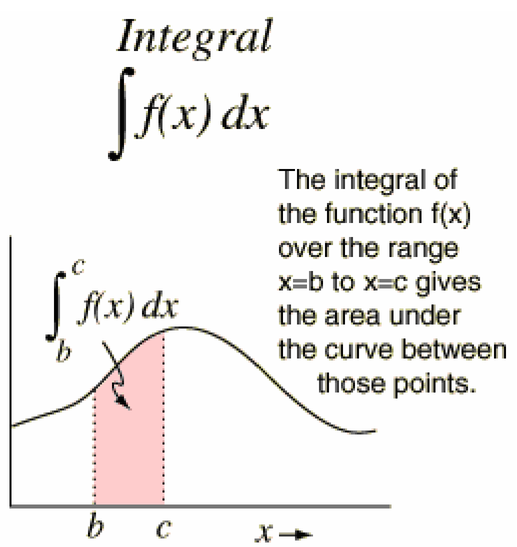
GLI INTEGRALI

L'INTEGRALE DEFINITO

L'INTEGRALE INDEFINITO



(figura tratta dal sito http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu)

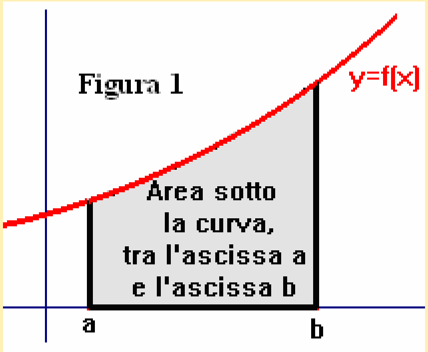
L'INTEGRALE DEFINITO

1. L' "area sotto una curva"

Il calcolo dell' "**area sotto una curva**", ossia **dell'area della regione di piano compresa fra una data curva e l'asse delle ascisse (entro la fascia di piano delimitata da due ascisse fissate)**, è un problema il cui interesse è enorme non solo in matematica pura, ma anche in svariati campi applicativi.

Ad esempio, **in Fisica**, l' "area sotto una curva" può assumere, di volta in volta, il significato di

- "**spazio complessivo** percorso in un certo intervallo di tempo" (quando sia nota la legge della *velocità* in funzione del *tempo*);
- "**lavoro** effettuato **da una forza** su di un oggetto che si sposta lungo un certo arco di traiettoria" (quando sia nota, per ogni singola posizione assunta dall'oggetto, la componente della *forza* nella direzione dello *spostamento*);
- ecc. ecc. ecc.



Nel seguito, chiameremo "**trapezoide**" la figura **mistilinea** (quella che è ombreggiata in Figura 1) di cui desideriamo calcolare l'area.

Supponiamo inizialmente, per semplicità, che la funzione $f(x)$ considerata sia monotòna crescente (d'ora in poi, nell'aggettivo, ometteremo l'accento, che comunque è da intendersi cada sull'*ultima* "o")

Consideriamo le figure qui a fianco.
L'intervallo [a,b] è stato suddiviso in n parti uguali,
ciascuna di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,
e gli estremi delle suddivisioni sono stati indicati con x_k :
$x_0 = \mathrm{a},\ \ x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots\ \ ,\ \ x_{n-1},\ \ x_n = \mathrm{b}$

Il poligono ombreggiato viene detto "**plurirettangolo inscritto**" e la sua area fornisce, evidentemente, un'**approssimazione per difetto** dell'area del trapezoide, approssimazione **tanto più precisa quanto più alto è il numero *n* delle suddivisioni di [a,b]**

(in fig. 2a è $n=4$, e l'approssimazione è piuttosto imprecisa; ma in fig. 2b, con $n=8$, l'approssimazione si fa già più soddisfacente).

Abbiamo

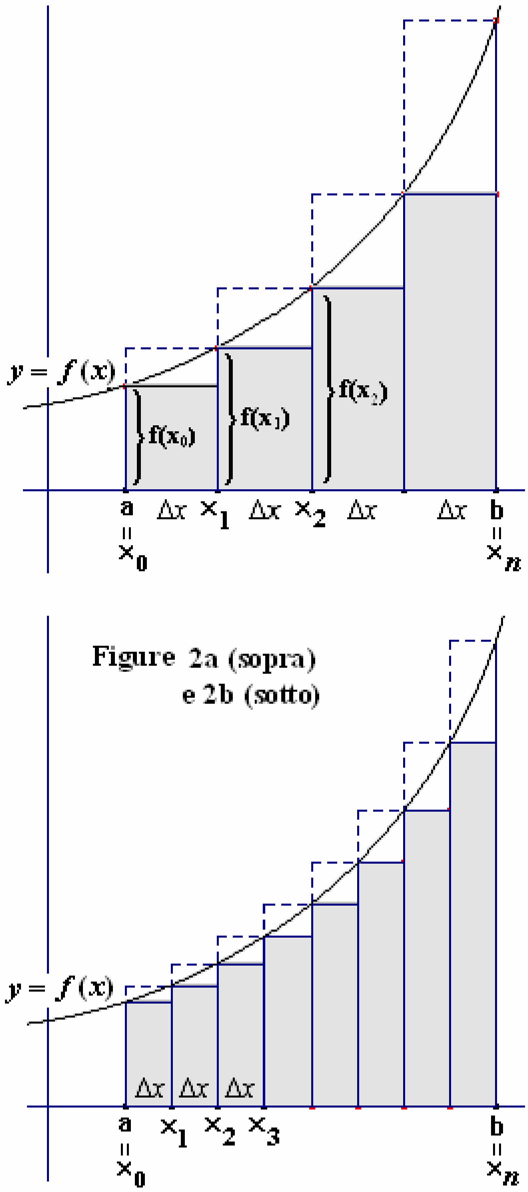
Area plurirettangolo inscritto =
= approssimazione per difetto dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli ombreggiati =

$$= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Le figure mostrano anche il cosiddetto "**plurirettangolo circoscritto**" (dai contorni superiori tratteggiati), la cui area rappresenta un'**approssimazione per eccesso** dell'area cercata, **tanto più precisa quanto più è alto il numero *n* delle suddivisioni di [a, b]**.

Area plurirettangolo circoscritto =
= approssimazione per eccesso dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli più alti =

$$= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$$



Poniamoci ora in una situazione più generale.

Non supporremo più che la funzione sia necessariamente monotona su [a,b];
ci limiteremo a supporla continua su [a,b].

In questo caso, le altezze dei singoli rettangoli costituenti i due plurirettangoli inscritto e circoscritto non saranno più, in generale, i valori assunti dalla funzione alle estremità dell'intervallino $[x_{k-1}, x_k]$, ma saranno, rispettivamente, il minimo m_k e il massimo M_k della $f(x)$ su $[x_{k-1}, x_k]$.
(Osserviamo per inciso che *una funzione continua su di un intervallo chiuso e limitato ammette ivi sempre minimo assoluto e massimo assoluto: teorema di* ***Weierstrass***).
Avremo allora

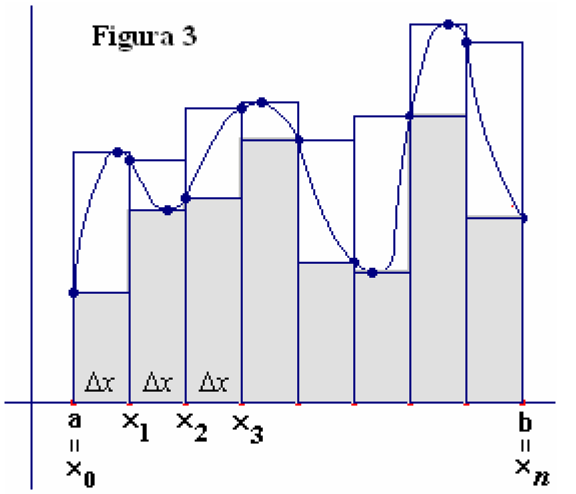
Area **plurirettangolo inscritto** =
= approssimazione per difetto dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli ombreggiati =

$$= m_1\Delta x + m_2\Delta x + ... + m_n\Delta x$$

Area **plurirettangolo circoscritto** =
= approssimazione per eccesso dell'area del trapezoide =
= somma aree rettangoli più alti =

$$= M_1\Delta x + M_2\Delta x + ... + M_n\Delta x$$

Si capisce che **facendo crescere *n***
(numero delle suddivisioni di [a,b] in sottointervalli),
potremmo ottenere approssimazioni,
rispettivamente per difetto e per eccesso, tanto precise
quanto lo desideriamo, dell'area del trapezoide.



Di fronte ad una funzione continua su di un intervallo (non importa se sia o non sia monotona) per calcolare l' "area sotto la curva" potremmo anche procedere nel modo seguente:

Effettuiamo la solita suddivisione di [a,b] in n sottointervallini uguali, ciascuno di ampiezza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

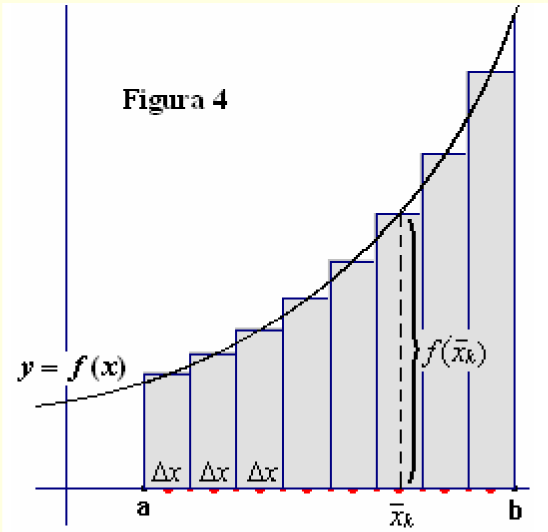
e andiamo a considerare, su ciascun intervallino $[x_{k-1}, x_k]$,
un'ascissa qualsiasi $\overline{x}_k$ (leggi: " *x segnato k* ")
(in Fig. 4 abbiamo preso $\overline{x}_k$ nel punto medio dell'intervallino,
ma non dev'essere obbligatoriamente proprio così).

Se ora calcoliamo la somma delle aree dei rettangoli
di base Δx e altezza $f(\overline{x}_k)$, ossia se calcoliamo

Area **plurirettangolo "intermedio"** =
= approssimazione dell'area del trapezoide =

$$= f(\overline{x}_1)\Delta x + f(\overline{x}_2)\Delta x + ... + f(\overline{x}_n)\Delta x,$$

si capisce che,
facendo crescere il numero *n* di suddivisioni di [a, b],
potremmo approssimare l'area del trapezoide
con la precisione desiderata.



Esercitazione
Facendo i calcoli "a mano", senza calcolatrice,
determina un'approssimazione per difetto e una per eccesso
dell'area sotto la curva $y = x^3$, sull'intervallo $[1, 2]$,
tali che differiscano tra loro meno di 0,01.

Per inciso, posso dirti che l'area in questione
vale ESATTAMENTE 15/4 = 3,75.

Come ho fatto a determinarne il valore
"esatto che più esatto non si può" ?
Ti piacerebbe saperlo, vero?
EH, EH!!! Non devi far altro che proseguire la lettura!

2. Sistemazione teorica

Sia $y = f(x)$ una funzione definita su di un intervallo chiuso e limitato [a,b] e ivi **continua**.
Suddividiamo l'intervallo [a,b] in *n* parti uguali, ciascuna di ampiezza $\Delta x = (b-a)/n$, indicando con x_k gli estremi degli intervallini che costituiscono la suddivisione: $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_{n-1},\ x_n = b$.
Indichiamo poi con m_k e con M_k rispettivamente il **minimo** e il **massimo** fra i valori assunti dalla $f(x)$ su $[x_{k-1}, x_k]$ (tale minimo e massimo assoluti esistono certamente, per il teorema di Weierstrass).

Consideriamo le somme

$$\boxed{s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \dots + m_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x}$$

detta **SOMMA INTEGRALE INFERIORE** della $f(x)$ su [a,b], relativa alla suddivisione effettuata

$$\boxed{S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \dots + M_n\Delta x = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x}$$

detta **SOMMA INTEGRALE SUPERIORE** della $f(x)$ su [a,b], relativa alla suddivisione effettuata

Si può dimostrare (sotto l'ipotesi, ribadiamolo, della ***continuità*** della $f(x)$ su [a,b]), che
la successione delle somme integrali inferiori $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \dots,\ s_n, \dots$
e la successione delle somme integrali superiori $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \dots,\ S_n, \dots$
convergono allo stesso limite.

Tale limite comune vien detto "integrale definito" della $f(x)$ su [a,b] e indicato col simbolo $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$.

E' dunque $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

dove **il simbolo** $\boxed{\int}$ **è stato scelto perché può esser visto come una "S" di "Somma" stilizzata**,

e il prodotto $\boxed{f(x)\,dx}$ ricorda che ciascun addendo delle somme di cui si sta indicando il limite è costituito dal prodotto di un valore della $f(x)$, per un incremento della variabile indipendente (incremento Δx che, al tendere di *n* all'infinito, diventa un infinitesimale dx).

Alla *dimostrazione di questo teorema*, la cui verità è peraltro facilmente colta dall'intuizione, *siamo costretti purtroppo a rinunciare*.
Infatti il ragionamento dimostrativo richiede di aver acquisito alcune nozioni sulla cosiddetta "*continuità uniforme*", che vanno al di là dei limiti del nostro corso.

Aggiungiamo, sempre senza dimostrazioni, qualcosa in più:

a) I due limiti coincidenti $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ costituiscono anche, rispettivamente,
l'estremo superiore dell'insieme numerico $\{s_n\}$ e **l'estremo inferiore** dell'insieme numerico $\{S_n\}$

b) Allo stesso limite comune al quale convergono le successioni
s_n (delle "somme integrali inferiori") ed S_n (delle "somme integrali superiori"),
risulta tendere anche qualunque successione di "**somme integrali intermedie**"
$T_n = f(\overline{x}_1)\Delta x + f(\overline{x}_2)\Delta x + \dots + f(\overline{x}_n)\Delta x$
costruita prendendo, in ciascun intervallino $[x_{k-1},\ x_k]$, un arbitrario punto $\overline{x}_k$

c) Con qualche adattamento e puntualizzazione, si potrebbe elaborare **una teoria più generale**, affrancata dal vincolo che le suddivisioni di [a,b] debbano essere costituite da sottointervalli di uguale ampiezza.

d) Nella trattazione, ci siamo concessi una licenza, un atteggiamento non rigoroso che ora vogliamo correggere. Abbiamo parlato fin dall'inizio di "area del trapezoide", *senza averla prima definita*.
Diciamo ora, più correttamente, che l' "area (con segno) del trapezoide" è, ***per definizione***, appunto il valore comune dei limiti $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$; il numero, insomma, che abbiamo indicato con $\int_a^b f(x)dx$.

3. Osservazioni e proprietà

Osserviamo ancora che
la definizione appena posta di “integrale definito”, seppure sia stata introdotta a partire da considerazioni di carattere geometrico, ha significato anche indipendentemente da interpretazioni geometriche.

Non è poi necessario che la funzione $f(x)$ assuma, nell’intervallo [a,b], esclusivamente valori positivi, come abbiamo supposto fin qui per evitare complicazioni. E’ comunque ovvio che

se $f(x)$ è negativa sull’intervallo [a,b], negative saranno pure le somme s_n, S_n

e negativo sarà quindi il valore dell’integrale $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Dal punto di vista geometrico, questo numero negativo misurerebbe l’ “area con segno” tra la curva e l’asse x, entro il campo di ascisse considerato. Il valore assoluto dell’integrale darebbe il valore dell’ “area senza segno”.

E se la $f(x)$ assumesse, su [a,b], valori sia positivi che negativi?
Beh, allora in ciascuna somma s_n o S_n avremmo una parte degli addendi positiva e un’altra parte negativa, e il segno dell’integrale dipenderebbe da … ma aiutiamoci con una figura.

Nella figura, per comodità grafica, abbiamo rappresentato una somma integrale “intermedia” anziché (come è più usuale) una somma integrale inferiore o superiore, ma si capisce che il discorso non cambia nella sostanza.

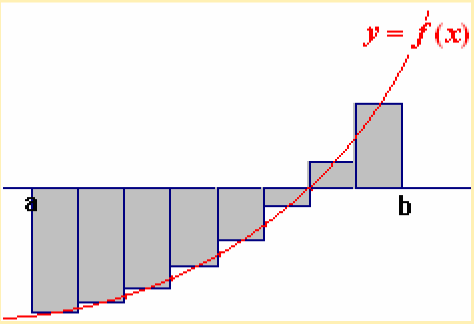


Fig. 5

Insomma, è evidente (e si potrebbe puntualmente dimostrare) che **in situazioni come quella della figura, cioè quando la $f(x)$ non ha segno costante su [a,b], l’integrale $\int_a^b f(x)dx$ avrebbe il significato di “somma algebrica di aree con segno”**: e pertanto avrebbe valore positivo o negativo a seconda che l’estensione complessiva dei pezzi di trapezoide al di *sopra* dell’asse x sia maggiore o, rispettivamente, minore dell’estensione complessiva dei pezzi di trapezoide che stanno *sotto* l’asse x.

Verifica empiricamente questo fatto calcolando, con carta e matita o, ad esempio, col foglio elettronico, l’integrale $\int_0^1 (3x^2-1)\,dx$ *: le approssimazioni trovate avranno, se il numero n delle suddivisioni di* [0,1] *è abbastanza elevato, valori prossimi a 0.*
Ciò significa che la porzione di superficie al di sotto dell’asse x dà all’integrale un contributo negativo uguale e opposto al contributo positivo che proviene dalla porzione al di sopra dell’asse x.
La “somma algebrica delle aree con segno” è pertanto nulla.

OSSERVAZIONE:
l’espressione linguistica “area sotto la curva” può essere ancora utilizzata, per estensione, anche nei casi in cui la curva vada a finire tutta o in parte nel semipiano delle ordinate negative: il significato è allora quello di “area con segno”, o di “somma algebrica di aree con segno”.

L’interpretazione geometrica permette anche di comprendere molto bene (vedi figura 6a) la **PROPRIETA’** espressa dalla seguente uguaglianza:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \, .$$

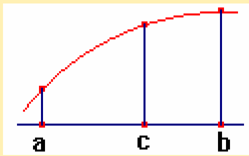


Fig. 6a

Ma il bello è che (figure 6b, 6c)
l’ uguaglianza di cui sopra vale QUALUNQUE SIANO LE POSIZIONI RECIPROCHE DEI TRE PUNTI a, b, c,
per il fatto che si pongono le seguenti **CONVENZIONI**:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

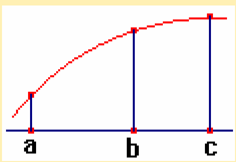


Fig. 6b

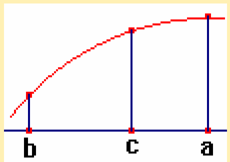


Fig. 6c

4. Due domande al professore

- **Come si calcolavano gli integrali quando non c'era il computer?**
- **Me lo dice adesso come ha fatto a trovare** $\boxed{\int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}}$ **?**

Prof.:

Se è solo per questo, potrei dirti, per esempio, che è anche $\int_0^{\pi} sen\, x\ dx = 2$. Uah, uah!!!

Pierino:
Ma è incredibile! Mi spiega il trucco?

Prof.:
sono qui per questo. Prima di tutto, è necessario stabilire cosa si intende per "funzione integrale".

Consideriamo una funzione $y = f(x)$, continua su di un intervallo [a, b].
Si dice "**funzione integrale della** $\boldsymbol{f(x)}$ **in [a, b]**" la funzione così definita:

$$\boxed{y = F(x) = \int_a^x f(x)\,dx} \ ,$$

il cui valore è l' area (con segno) della regione piana
compresa fra la curva di equazione $y = f(x)$ e l'asse x, sull'intervallo $[a, x]$.
Tale area dipende ovviamente dal secondo estremo x di integrazione.

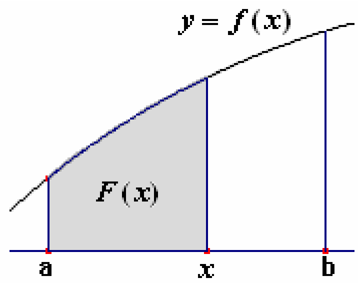


Fig. 7

Pierino:
ma qui x compare due volte: il simbolo x indica il secondo estremo di integrazione,
e, contemporaneamente, indica anche la variabile della funzione integranda!

Prof.:
Giusta osservazione. Sennonché, la variabile della funzione integranda (si dice: "la variabile di integrazione") è, come si suol dire, una **variabile "muta" o "apparente"**: niente cambia se se ne cambia il nome.

Che differenza fa, per esempio, se si scrive: $\int_1^2 x^3 dx$ oppure $\int_1^2 t^3 dt$ oppure $\int_1^2 u^3 du$ **?**

Pierino:
Beh, tutte e tre le scritture alla fin fine indicano un numero, anzi LO STESSO numero
(quello che noi avevamo approssimato al computer e che lei, professore, ci ha anticipato essere esattamente 15/4).

Prof.:

Infatti! Non c'è proprio nessuna differenza a scrivere $\int_1^2 x^3 dx$, o $\int_1^2 t^3 dt$, o $\int_1^2 u^3 du$: tutte e tre le scritture indicano il numero 15/4 (anche se l'asse delle ascisse è denominato "asse x" nel primo caso, "asse t" nel 2°, ecc.

Quindi, volendo, una stessa "funzione integrale" potrebbe essere scritta in tanti modi equivalenti:

$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(u)\,du \ \ldots$ Quale scrittura preferisci, Pierino?

Pierino:

Direi $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Mi è simpatica, e mi sembra più chiara della prima scrittura proposta,

perché x compare una volta sola e quindi è più evidente il ruolo che x riveste per noi,
ovvero il fatto che x è il secondo estremo di integrazione (il primo estremo di integrazione è fisso ad a),
e da questo secondo estremo di integrazione x dipende l'area considerata, che quindi è funzione di x:

$F(x)$ = Area sotto la curva sull'intervallo $[a, x]$.

Prof.:
D'accordo. Ora io dico una cosa: se noi riuscissimo a trovare una *formula*, contenente (com'è ovvio) *x*, che esprimesse la funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, allora saremmo a posto,

perché l'area che ci interessa, ossia il numero $\int_a^b f(t)\,dt$, coinciderebbe col numero $F(b)$.

Pierino: E' vero. Però scusi, professore, determinare una tale formula per *F*(*x*) comporterebbe di conoscere il valore di TUTTE le infinite aree sotto la curva, che possono ottenere mantenendo *a* come ascissa di sinistra, e facendo variare l'ascissa di destra *x* sull'intervallo [a, b]. In questo modo, non complichiamo il problema?

Prof.: Apparentemente sì.

Sennonché, quando pensiamo all' $\int_a^b f(x)\,dx$, l'oggetto del nostro pensiero è un qualcosa di "statico",

mentre $\int_a^x f(t)\,dt$ è una quantità "dinamica", di cui possiamo seguire la VARIAZIONE al variare di *x*.
E una osservazione molto elementare ci permetterà di trarre un'informazione *ESTREMAMENTE* significativa sul modo di variare di questa funzione $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Pierino:
A che informazione si riferisce, professore?

Prof.:

Ti invito a osservare le seguenti due funzioni integrali: $F_1(x)=\int_a^x f_1(t)\,dt$, $F_2(x)=\int_a^x f_2(t)\,dt$:

Figura 8a

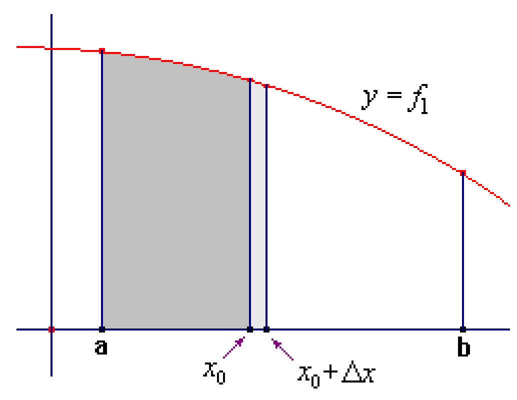
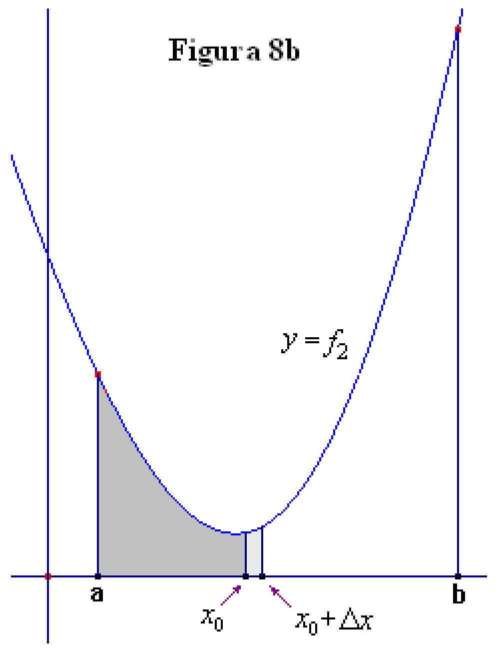


Figura 8b



Dopo aver scelto un'ascissa x_0 (la stessa per entrambi i grafici),
abbiamo considerato il valore, in x_0, di ciascuna funzione integrale:
$F_1(x_0) = \textit{area grigio scuro nella fig. di sinistra}$, $F_2(x_0) = \textit{area grigio scuro nella fig. di destra}$.
Abbiamo poi dato ad x_0 un *PICCOLO* incremento Δx (uguale per entrambe le figure).
Per effetto del passaggio da x_0 a $x_0+\Delta x$, il valore delle funzioni integrali si è modificato, diventando $F_1(x_0+\Delta x)$ e, rispettivamente, $F_2(x_0+\Delta x)$.
Ora io ti chiedo: quale fra le due funzioni integrali ha subìto l'incremento maggiore? La F_1 o la F_2 ?

Pierino:
Beh, i due incrementi ΔF_1 e ΔF_2 sono dati, nelle due figure,
dalle aree dei trapezoidini sottili compresi fra l'ascissa x_0 e l'ascissa $x_0 + \Delta x$;
ora, è evidente che il trapezoidino più grande è quello della prima figura;
quindi l'incremento maggiore, lo ha subito *la prima* delle due funzione integrali, la F_1.

Prof.:
Giusto. E senti adesso, a cosa si deve il fatto che il primo trapezoidino sia più esteso del secondo?

Pierino:
E' più esteso perché è più alto. La base, infatti, è lo stesso segmento Δx per entrambi i trapezoidini.
Ma il primo trapezoidino ha altezza maggiore del secondo, quindi la sua area è più grande.

Prof.:
Sono d'accordo.
Puntualizziamo però una cosa: in che senso mi parli di "altezza" del trapezoidino?
Il trapezoidino è limitato, a sinistra e a destra, da due segmenti verticali:
ora, le lunghezze di questi due segmenti non sono uguali …

Pierino:
E' vero. In effetti, ho parlato di "altezza" perché ogni trapezoidino mi è sembrato molto simile ad un rettangolino … il fatto è che … i due segmenti verticali che limitano lateralmente il trapezoidino differiscono di pochissimo…
certo, ciò non accadrebbe se Δx fosse grande, ma avendo noi preso un *piccolo* incremento Δx,
i due segmenti sono quasi uguali.

Prof.:
In effetti, se pensiamo Δx veramente ***molto*** piccolo,
i due segmenti verticali che limitano lateralmente il trapezoidino differiscono di pochissimo …
e il trapezoidino può essere assimilato ad un rettangolino.
Dunque, ricapitolando, tu mi hai detto che nel passaggio da x_0 a $x_0 + \Delta x$,
l'incremento più grande è stato subìto dalla funzione integrale F_1,
per il fatto che l' "altezza", diciamo così, del trapezoidino corrispondente era maggiore. Giusto.
Ora io ti chiedo: *quanto valgono* le altezze dei due trapezoidini, quelle altezze che sono responsabili,
in ultima analisi, della maggiore o minore rapidità di crescita delle funzioni integrali $F_1(x), F_2(x)$?

Pierino:
l'altezza del primo trapezoidino è pressappoco uguale a $f_1(x_0)$.
Dico "pressappoco" perché c'è comunque sempre il problema delle
"due altezze che non sono proprio uguali ma *quasi* uguali" …
e l'altezza (con le solite riserve) del secondo trapezoidino vale $f_2(x_0)$.

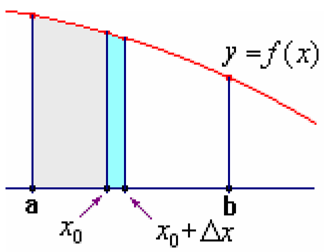
Prof.:
Dunque, in qualche modo, la rapidità con cui cresce una funzione integrale,
nelle immediate vicinanze di un'ascissa fissata, è proporzionale all'ordinata della funzione integranda,
in corrispondenza di quell'ascissa … Giusto?

Pierino: Giusto.

Prof.: Rapidità, velocità di crescita … quale concetto matematico fanno venire in mente queste parole?

Pierino: la derivata, direi.

Prof.: Infatti. Proviamo a costruire la derivata di una funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ nell'ascissa x_0.



$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\textit{area trapezoidino}}{\textit{"base" trapezoidino}} \approx \begin{array}{c}\textit{"altezza" trapezoidino,}\\ \textit{che è simile a un rettangolino}\end{array} \approx f(x_0)$$

Pierino:
Quindi la derivata della funzione integrale $F(x)$, calcolata in una data ascissa x_0,
è uguale al valore che la funzione integranda $f(x)$ assume, in corrispondenza della stessa ascissa x_0!

Prof.:
se le approssimazioni che abbiamo introdotto nel discorso (parlare di "altezza" del *trapezoidino*, assimilandolo ad un *rettangolino*, e scegliere come altezza di questo "rettangolino" proprio $f(x_0)$)
non sono tali da compromettere la verità della conclusione, è realmente così.
E anzi, visto che con x_0 abbiamo indicato un'ascissa fissata, ma fissata *arbitrariamente*,
questa relazione varrà *per ogni* ascissa x dell'intervallo [a, b]: si avrà dunque

(1) $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$.

In effetti, ti anticipo che una revisione di tutta la questione in termini rigorosi (la faremo dopo, con calma)
conferma pienamente la validità della relazione (1), che prende il nome di
"Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale" (attribuito a Evangelista Torricelli e Isaac Barrow).

Pierino:
quindi, della funzione integrale $F(x)$, noi conosciamo, su tutto [a, b], la funzione derivata!
E a partire dalla conoscenza della funzione derivata,
in qualche modo sarà possibile risalire alla funzione di partenza!

Prof.:
L'idea è questa. Occhio però a una cosa.
Dobbiamo tener presente che, se una funzione ha una certa derivata,
anche *tutte (e sole) le funzioni che differiscono da quella per una costante addit*iva,
risultano avere la stessa derivata … quindi,
se si conosce la derivata di una funzione incognita, quest'ultima non ne risulta determinata in modo unico…
restano aperte infinite possibilità (sebbene tutte le soluzioni del problema siano funzioni
strettamente "imparentate" tra loro, in quanto differiscono l'una dall'altra per una costante additiva).
Ad esempio, se è richiesto di trovare una funzione la cui derivata è x^2+1,
sarebbe incompleto rispondere che "la funzione" in questione è $\frac{1}{3}x^3+x$ …
voglio dire che l'uso del *singolare* sarebbe improprio,
perché andrebbe bene anche $\frac{1}{3}x^3+x+5$, o $\frac{1}{3}x^3+x-\frac{1}{2}$ …
insomma, le soluzioni del problema di "trovare una funzione la cui derivata è x^2+1" sono **infinite**,
sono tutte e sole le funzioni della forma $\frac{1}{3}x^3+x+C$, essendo C una costante arbitraria.

Pierino:
Dunque siamo di nuovo nei pasticci!
Il nostro obiettivo era, nota l'espressione analitica della funzione integrando $f(x)$,
di trovare l'espressione analitica della funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ …
perché poi, per determinare l' "area sotto la curva" sull'intervallo [a, b],
si sarebbe trattato semplicemente di calcolare $F(b)$.
Quando abbiamo stabilito che vale la relazione $F'(x) = f(x)$, ci siamo sentiti felici perché abbiamo pensato:
ci basterà risalire dalla derivata (che è nota),
alla funzione (incognita) che genera quella derivata (diciamo: all' "antiderivata") …
ma ora ci rendiamo conto che, anche quando siamo capaci di fare questo, come nel caso della funzione x^2+1,
la cui antiderivata è facile da trovare, c'è il guaio di avere una antiderivata determinata non in modo unico,
ma soltanto a meno di una costante additiva.
A questo punto, se io per esempio voglio calcolare l'area sotto la curva $y=x^2+1$, sull'intervallo $[1,3]$,
posso dire che la funzione integrale $F(x)=\int_1^x (t^2+1)dt$ è: $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x+C$, ma non so quanto vale C …

Prof.: Dài, che riesci a trovarmi anche C !
Rifletti bene (restiamo sull'esempio "concreto" che hai appena fatto):
cos'altro sai, riguardo alla funzione $F(x)=\int_1^x (t^2+1)\,dt$, oltre al fatto che la sua derivata vale x^2+1?

Pierino: Mumble mumble … un aiutino?

Prof.: Io dico che tu conosci un valore della funzione, in corrispondenza di una certa ascissa.
Qual è l'ascissa e qual è il valore? Pensa al significato geometrico
" $F(x)$ = Area sotto la curva, fra l'ascissa 1 e l'ascissa x " …

Pierino: Ci sono! Io so che $F(1)=0$.

Prof.: Perfetto! Ma allora tu sai : prima cosa, che $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x+C$; seconda cosa, che $F(1)=0$.
Quanto vale dunque la costante C ?

Pierino: Si ha $\frac{1}{3}\cdot 1+1+C=0$ da cui $C=-\frac{4}{3}$.

Prof.: Giusto. Dunque $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x-\frac{4}{3}$.
Quanto vale allora l'area sotto la curva $y=x^2+1$, sull'intervallo $[1,3]$?

Pierino: Vale $F(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3+3-\frac{4}{3}=9+3-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}=10{,}66...$.

Prof.: Ce l'abbiamo fatta!!!
Dài, riproviamoci considerando un'altra funzione su di un altro intervallo!
Ad esempio, prendiamo la funzione $y=1/x$ sull'intervallo $[2,8]$. Quanto vale l'area sotto la curva?

Pierino: Dunque… la funzione integrale $F(x)=\int_2^x \frac{1}{t}dt$ ha come derivata $\frac{1}{x}$,
quindi è una fra le infinite "antiderivate" di $1/x$.
Ma io me la ricordo, una funzione la cui derivata è $1/x$: è la funzione $\ln x$.
Perciò la famiglia delle antiderivate della funzione $1/x$
è la famiglia di tutte e sole le funzioni del tipo $\ln x+C$.
La mia funzione integrale è dunque $F(x)=\ln x+C$, ma devo ancora trovare *C*.
Però io so che $F(2)=0$.
Quindi $\ln 2+C=0$ da cui $C=-\ln 2$.
Di conseguenza $F(x)=\ln x-\ln 2$.
E in definitiva

$$\text{area sotto la curva, sull'intervallo } [2,8]=\mathrm{F}(8)=\ln 8-\ln 2=\ln 4=1{,}3862944...$$

Sinceramente, mi sto divertendo!

Prof.: In effetti, tutto questo è molto appassionante. Vedremo più avanti anche un metodo col quale si riuscirà a semplificare le cose, evitando di dover determinare esplicitamente la costante *C*.
Puoi ora controllare tu stesso che si ha, come avevamo anticipato,

$\int_1^2 x^3dx=\frac{15}{4}$ (*una funzione con derivata* x^3 *è* $\frac{1}{4}x^4$) e $\int_0^\pi sen\,x\,dx=2$ (*una funzione che ha derivata* $sen\,x$ *è* $-cos\,x$)

Ora però ci attende dell'altro lavoro:

a) rivisitare da un punto di vista più *rigoroso* il cammino percorso; **dare** cioè **una dimostrazione "come si deve" del teorema di Torricelli-Barrow** , ossia dell'uguaglianza

$$F'(x)=f(x), \quad \forall x\in[a,b].$$

b) **Studiare le principali tecniche mediante le quali, data una funzione, anche complicata, si può risalire all'espressione della sua "antiderivata"** (non sempre questo è realizzabile).

5. L' "antiderivata" o "primitiva" di una funzione assegnata: insomma, l' "integrale indefinito"

Si dice "**integrale indefinito**" di una funzione $f(x)$,
la famiglia di tutte e sole quelle funzioni la cui derivata è uguale a $f(x)$.
Se una funzione $F(x)$ è tale che $F'(x) = f(x)$,
allora si dice che $F(x)$ è una "**antiderivata**", o una "**primitiva**", della $f(x)$.
Il termine più usato è "primitiva".

Poiché:

- se due funzioni differiscono per una costante additiva, allora hanno la stessa derivata;
- e, viceversa, se due funzioni hanno la stessa derivata,
allora differiscono per una costante additiva (conseguenza del Teorema di Lagrange),

se ne deduce che,
data una funzione $f(x)$, se essa ammette una primitiva $F(x)$, ne ammetterà infinite:
si tratterà di tutte e sole le funzioni che si possono scrivere sotto la forma $\boxed{F(x)+C,\ C \in \mathbb{R}}$.

Il simbolo di integrale indefinito è il seguente: $\boxed{\int f(x)dx}$

(leggi: "integrale di $f(x)$ in dx": "in" è un modo di leggere l'operatore di moltiplicazione "per").

Tale simbolo è stato scelto per via del legame che il teorema di Torricelli-Barrow stabilisce
fra il problema del "calcolo dell'*area sotto una curva*" (integrale DEFINITO)
e la ricerca dell' "*antiderivata*" di una funzione (integrale INDEFINITO, appunto).

Poiché, dunque, **il simbolo di integrale indefinito indica la FAMIGLIA di tutte le primitive della funzione** $f(x)$ (o, se si preferisce: indica la GENERICA primitiva della $f(x)$),
esso contiene implicitamente una costante additiva arbitraria:

ad esempio $\int (x^2+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$, $\quad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

Ricordiamo che **la derivata è un "operatore lineare"**,
nel senso che la derivata di una combinazione lineare di funzioni
è uguale alla combinazione lineare delle derivate (s'intende, con gli stessi coefficienti):

$$\boxed{D[h\alpha(x)+k\beta(x)] = hD\alpha(x)+kD\beta(x) = h\alpha'(x)+k\beta'(x)}\ .$$

Ne consegue perciò che anche l'integrale indefinito è un operatore lineare:

$$\boxed{\int [hf(x)+kg(x)]dx = h\int f(x)dx + k\int g(x)dx}$$

Esempio: $\int (5x+3\cos x)dx = 5\int x\,dx + 3\int \cos x\,dx = 5\cdot\frac{1}{2}x^2 + 3\,\text{sen}\,x + C$

- ❑ Così come esistono delle ben precise "formule di derivazione",
similmente è possibile scrivere tutta una serie di "formule di integrazione indefinita"
(quando non ci sia possibilità di equivoco scriveremo semplicemente: "integrazione")
ed elaborare, per i casi più complessi, delle "tecniche di integrazione indefinita"
(integrazione "per parti", integrazione "col circolo vizioso apparente", ecc.)
Mentre però **la derivazione è una procedura del tutto meccanica**,
l'integrazione è, in una certa misura, un' "arte",
che richiede intuito, e capacità di collegare e reinterpretare procedure e formule diverse.
- ❑ Si può dimostrare che **una funzione, che sia continua su di un intervallo, è sempre ivi integrabile**;
tuttavia, il problema di risalire all'espressione analitica dell'integrale può essere anche molto difficile.
Aggiungo che **per alcune funzioni costruite componendo funzioni elementari**,
ad esempio la fondamentale e^{-x^2}, importantissima in Teoria degli Errori, **è stato dimostrato**
che l'integrale indefinito, pur esistente data la continuità della funzione integranda,
non ammette una espressione analitica costituita da composizioni di funzioni elementari.
- ❑ Le tecniche di "integrazione indefinita", o "antiderivazione", sono nella maggior parte dei casi utilizzate
per poi procedere al calcolo di un "integrale definito", ovvero dell' "area sotto una curva";
la loro importanza è perciò alquanto diminuita da quando, tramite i computer, possiamo utilizzare
opportuni algoritmi di "integrazione numerica" per approssimare, con la precisione desiderata,
l'integrale definito di una funzione assegnata, senza aver bisogno di calcolarne l'antiderivata.

Nel seguito impareremo le formule e le tecniche fondamentali di integrazione indefinita.

6. Il “teorema della media del calcolo integrale”

Se una funzione $y = f(x)$ è continua su di un intervallo chiuso e limitato [a, b], allora esiste certamente, nell’intervallo aperto (a, b), almeno un’ascissa c tale che

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)}$$

Giustificazione con l’intuizione geometrica:

considerata la curva continua $y = f(x)$ sull’intervallo [a, b], e presa una retta orizzontale, sarà sempre possibile spostare questa verso l’alto o verso il basso in modo da realizzare la situazione in cui l’area del rettangolo compreso fra la retta e l’asse *x*, sull’intervallo [a, b], sia perfettamente uguale all’area del trapezoide.

L’ordinata costante dei punti di tale retta dovrà evidentemente essere compresa fra il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione su [a, b], quindi la retta sarà obbligata a tagliare la curva in almeno un punto.

L’ascissa di tale punto di intersezione retta-curva è l’ascissa c di cui il teorema afferma l’esistenza.

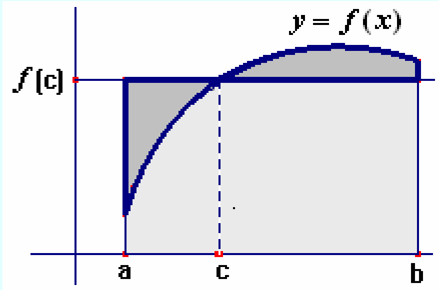


Figura 9
Le due aree più scure sono uguali, quindi sono uguali le aree
1) del trapezoide
2) del rettangolo

Dimostrazione

La funzione $f(x)$, per ipotesi continua sull’intervallo chiuso e limitato [a, b], è ivi dotata di minimo assoluto *m* e di massimo assoluto *M* (Teorema di Weierstrass).

Se ora noi prendiamo una qualsiasi “somma integrale inferiore”, avremo

$$s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots + m_n\Delta x \ge m\Delta x + m\Delta x + \ldots + m\Delta x = m(\Delta x + \Delta x + \ldots + \Delta x) = m(b-a)$$

e analogamente, presa una qualsivoglia somma integrale superiore, avremo

$$S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots + M_n\Delta x \le M\Delta x + M\Delta x + \ldots + M\Delta x = M(\Delta x + \Delta x + \ldots + \Delta x) = M(b-a).$$

Poiché dunque per ogni n risulta

$$m(b-a) \le s_n \le S_n \le M(b-a)$$

si avrà

$$m(b-a) \le \lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} S_n \le M(b-a)$$

ed essendo $\displaystyle \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$

sarà dunque $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

da cui infine $\displaystyle m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$.

Esiste perciò (“teorema dei valori intermedi”) un’ascissa *c*, con $a < c < b$, tale che

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \quad \text{quindi} \quad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), \text{ C.V.D.}$$

L’ordinata $\boxed{f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = V_m}$ viene chiamata “**valor medio**” della funzione $f(x)$ su [a, b].

7. Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (Teorema di Torricelli-Barrow)

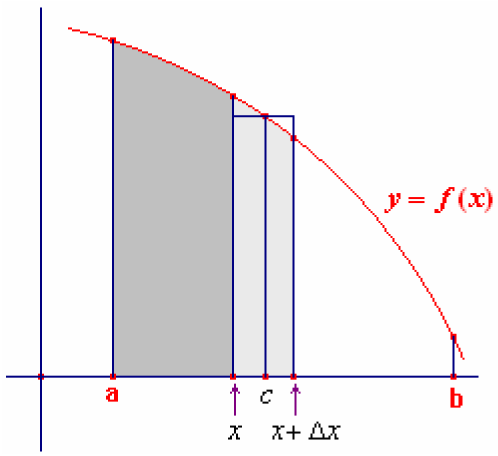
Se $y = f(x)$ è una funzione continua sull'intervallo [a, b], allora la derivata della funzione integrale

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

è uguale al valore della funzione integranda $y = f(x)$ in corrispondenza dell'ascissa nella quale si deriva:

$$\boxed{F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]}$$

Dimostrazione



Nella figura è rappresentata la funzione INTEGRANDA f.
Consideriamo un'ascissa *x* fissata a piacere in [a, b]
e scriviamo il rapporto incrementale della funzione INTEGRALE F nel punto *x*.
Avremo:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(c)$$

dove l'ultimo passaggio è un'applicazione del Teorema della Media sull'intervallo $[x,\ x+\Delta x]$:
c è appunto l'ascissa di cui quel teorema assicura l'esistenza.
Il punto *c* dipende da Δx, il che si può indicare scrivendo $c = c(\Delta x)$, e si ha $x < c < x + \Delta x$.

Ora faremo tendere Δx a zero;
ma quando Δx tende a zero,
l'ascissa c, essendo "stretta" fra x (fissato) e $x + \Delta x$, tenderà a x
e avremo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) \overset{\text{NOTA}}{=} f(x), \quad \text{C.V.D.}$$

NOTA: quest'ultimo passaggio dipende strettamente dalla ipotesi di continuità per la $f(x)$.
Volendo, per comprenderlo meglio, possiamo porre $c = x + h$, con $h = h(\Delta x)$ e $0 < h < \Delta x$,
e avremo $\lim_{c \to x} f(c) = \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, appunto per la continuità della f nell'ascissa x.

OSSERVAZIONE

In tutto il procedimento dimostrativo,
per rendere il ragionamento più spontaneo e anche per ragioni di praticità nell'esposizione,
abbiamo supposto *positivo* l'incremento Δx.

E' chiaro che il tutto si potrebbe riformulare per un Δx *di segno qualsiasi*.

8. Come si calcola nella pratica un integrale definito

Grazie al Teorema Fondamentale, dovendo calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$, è lecito procedere come segue.

Il nostro obiettivo è di scrivere l'espressione della funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$,
della quale ci interesserà poi calcolare il valore $F(b)$.
Poiché il Teorema ci assicura che $F'(x)=f(x)$, ricaveremo dunque l'espressione analitica della $F(x)$ determinando l' "antiderivata" (o "primitiva") della $f(x)$, con la tecnica di "antiderivazione" opportuna.
Tuttavia, sappiamo che tale primitiva è individuata a meno di una costante additiva C.
Supponiamo ora di aver trovato **una qualsiasi fra le infinite primitive** della $f(x)$.
Sia $\varphi(x)$ tale primitiva.
$\varphi(x)$ NON è, a meno di un colpo di fortuna, proprio la funzione integrale $F(x)$ che ci interessa;
tuttavia, $F(x)$ differisce da $\varphi(x)$ per una costante additiva e si ha dunque $F(x)=\varphi(x)+C$

Adesso abbiamo **due possibilità**:

a) Possiamo **determinare il valore della costante *C***, mediante la condizione $F(a)=0$.
Avremo: $\varphi(a)+C=0$ da cui $C=-\varphi(a)$ e quindi $F(x)=\varphi(x)-\varphi(a)$.
E a questo punto, concluderemo scrivendo: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)=\varphi(b)-\varphi(a)$

b) Oppure **(più conveniente!)** possiamo tenere presente il risultato definitivo $\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a)$

e **imboccare** quindi **una "scorciatoia"**:
evitiamo di ricavare *esplicitamente* la funzione integrale $F(x)$,
perché in fondo ci basta quella primitiva $\varphi(x)$ che avevamo trovato "antiderivando" la $f(x)$;
prendiamo dunque la nostra brava primitiva $\varphi(x)$
e calcoliamo la differenza fra i valori che essa assume in *b* e in *a* rispettivamente.
Di solito la procedura si espone con una simbologia speciale, molto efficace.

Si scrive:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\left[\varphi(x)\right]_a^b=\varphi(b)-\varphi(a)}$$

Il simbolo $\left[\varphi(x)\right]_a^b$ è semplicemente un comodo "pro memoria".
Serve, molto banalmente, per "inscatolare" la $\varphi(x)$
in modo da averla lì bella comoda,
e contemporaneamente indicare che di questa funzione
si dovranno calcolare i valori in b e in a, per farne la differenza.

RICAPITOLAZIONE

Il **calcolo di un' "area sotto la curva", di un "integrale definito"**, richiede di aprire una "finestra" a sé stante, per la determinazione di una *primitiva* della funzione integranda $f(x)$.
Vale a dire,
il calcolo di un integrale *definito* comporta di effettuare *prima* il calcolo di un integrale *indefinito*.

Riferiamoci ad un esempio: **supponiamo di dover calcolare** $\int_1^2 x^3\,dx$.

La procedura consta di **TRE FASI**.

1. **Si determina l'integrale indefinito**: $\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4+C$ (in questo caso è stato facile, non sempre lo è)
2. **Si prende una qualunque delle** infinite **primitive trovate**, ad esempio $\frac{1}{4}x^4$.
3. **Si calcola la differenza dei due valori che la primitiva considerata assume, in corrispondenza del secondo estremo di integrazione e del primo, nell'ordine.**

Si scrive cioè $\int_1^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2=\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{16}^{4}-\frac{1}{4}\cdot 1=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ecco fatto!
L'"area sotto la curva" vale,
nel nostro esempio, 15/4=0.375

ALTRI ESEMPI

- Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

$$\int \cos x\, dx = sen\, x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [sen\, x]_0^{\frac{\pi}{2}} = sen\frac{\pi}{2} - sen\, 0 = 1 - 0 = 1$$

- Calcolare $\int_{10}^{20} \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{10}^{20} = \ln 20 - \ln 10 = \ln\frac{20}{10} = \ln 2 \approx 0.693$$

- Calcolare $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\right) dx$

$$\int \left(x^2 - x\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

ESERCIZI

Determina il valore degli integrali indicati:

1) $\int_0^2 (4x - 3)\, dx$

2) $\int_0^1 e^x\, dx$

3) $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$

4) $\int_1^2 \left(1 + x^2\right) dx$

5) $\int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$

RISPOSTE

1) 2 2) $e - 1 \approx 1.718$ 3) $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ 4) $\frac{10}{3}$ 5) $1 + \ln 4 \approx 2{,}386$

L'INTEGRALE INDEFINITO

9. Integrali immediati

Riassumiamo le puntate precedenti: si dice "**INTEGRALE INDEFINITO" di una funzione $f(x)$**, **la famiglia di tutte e sole quelle funzioni la cui derivata è uguale a $f(x)$**. Esse sono dette "le **primitive**" (= "**antiderivate**") di $f(x)$, e **differiscono tutte fra loro per una costante additiva**.
Ad esempio, presa la funzione $f(x) = \cos x$, la famiglia delle sue "primitive", ossia il suo "integrale indefinito", è la famiglia costituita dalle infinite funzioni $\operatorname{sen} x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.
Infatti tutte, e sole, le funzioni della forma $\operatorname{sen} x + c$, hanno per derivata $\cos x$.

Il simbolo di integrale indefinito è il seguente: $\boxed{\int f(x)\,dx}$ (leggi: "integrale di $f(x)$ in dx").

Tale simbolo è stato scelto per via del legame che il **teorema di Torricelli-Barrow** stabilisce fra il problema del "calcolo dell'area sotto una curva" (integrale DEFINITO) e la ricerca dell' "antiderivata" o "primitiva" di una funzione (integrale INDEFINITO, appunto).
Poiché, dunque, il simbolo di integrale indefinito indica la FAMIGLIA di tutte le primitive della funzione $f(x)$ (o, se si preferisce: indica la GENERICA primitiva della $f(x)$), esso contiene *implicitamente* una costante additiva arbitraria.

Esempi: $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c,\quad \int 4x^3 dx = x^4 + c,\quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$

TAVOLA DEI PRINCIPALI INTEGRALI IMMEDIATI

Formule di derivazione	Formule corrispondenti di integrazione
Per derivare una potenza occorre moltiplicare per l'esponente e abbassare questo di un'unità $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$
$D[f(x)]^\alpha = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$	$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$ Caso particolare importante: $\int f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + c$
$D\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$D\ln\lvert f(x)\rvert = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$De^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$De^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$
$D\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
$D\operatorname{sen} f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$	$\int [\cos f(x)] \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$
$D\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$
$D\cos f(x) = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$	$\int [\operatorname{sen} f(x)] \cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c$
$D\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + c$
$D\operatorname{arcsen} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$
$D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$
$D\operatorname{arctg} f(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$

OSSERVAZIONI

- La tabella non riporta le formule di derivazione
  $D\,arc\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $D\,arc\,cotg\,x = -\dfrac{1}{1+x^2}$, con le corrispondenti formule di integrazione,
  per il fatto che tali formule differiscono solo per un segno dalle analoghe con $arc\,sen\,x$ e $arc\,tg\,x$
  e dunque, dovendo calcolare ad esempio $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,
  si potrebbe scrivere indifferentemente $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arc\,sen\,x + c$ oppure $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -arc\cos x + c$,
  ma di norma si preferisce, per consuetudine, utilizzare la funzione $arc\,sen$.
  Idem per la coppia $arc\ tg$, $arc\ cotg$: si privilegia quasi sempre la prima fra le due.

- Non abbiamo riportato neppure le formule $Da^x = a^x \ln a \to \displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
  perché, di fronte ad un'esponenziale in base diversa da e ,
  è sempre possibile passare alla base e , tramite l'identità
  $a^x = e^{x \ln a}$.
  Discorso analogo per le formule con la funzione logaritmica in base diversa da e .

Qui di seguito riportiamo **qualche esempio di applicazione** delle formule elencate in tabella.
Nello svolgere gli integrali proposti, abbiamo tenuto conto della **"linearità" dell'integrale indefinito**:

$$\boxed{\int [hf(x) + kg(x)]dx = h\int f(x)dx + k\int g(x)dx}$$

Esempio 1

$$\int \frac{6x^5 - \sqrt[3]{x} + 5x - 2}{x}dx = \int\left(\frac{6x^5}{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{2}{x}\right)dx =$$

$$= \int\left(6x^4 - \frac{x^{1/3}}{x} + 5 - \frac{2}{x}\right)dx = \int\left(6x^4 - x^{-\frac{2}{3}} + 5 - \frac{2}{x}\right)dx =$$

$$= 6\int x^4 dx - \int x^{-\frac{2}{3}}dx + 5\int dx - 2\int \frac{1}{x}dx = 6\frac{x^5}{5} - \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + 5x - 2\ln|x| + c =$$

$$= \frac{6}{5}x^5 - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 5x - 2\ln|x| + c = \frac{6}{5}x^5 - 3\sqrt[3]{x} + 5x - 2\ln|x| + c$$

UN CONSIGLIO DA AMICO

Specialmente nei primi esercizi, è opportuno fare la verifica,
derivando l'espressione ottenuta,
per controllare se si ottiene effettivamente quella che era la funzione integranda.

E ciò, non soltanto per essere sicuri che il risultato sia esatto,
ma anche per impadronirsi meglio dei meccanismi psicologici dell'integrazione:
essendo l'integrazione indefinita nient'altro che il processo inverso della derivazione,
in qualche modo si impara ad integrare solo se la mente è allenata a
"tornare-indietro-per-vedere-se-è-giusto".

Verifica di $\displaystyle\int \frac{6x^5 - \sqrt[3]{x} + 5x - 2}{x}dx = \int\left(6x^4 - x^{-\frac{2}{3}} + 5 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{6}{5}x^5 - 3\sqrt[3]{x} + 5x - 2\ln|x| + c$:

$$D\left(\frac{6}{5}x^5 - 3\sqrt[3]{x} + 5x - 2\ln|x| + c\right) = \frac{6}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}x^4 - \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^{\frac{1}{3}-1} + 5 - 2\cdot\frac{1}{x} = 6x^4 - x^{-\frac{2}{3}} + 5 - \frac{2}{x}$$

OK!!!!!!!!

Esempio 2 $\int (1+x+x^2-7x^3+e^x)\,dx = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-7\frac{x^4}{4}+e^x+c$

Esempio 3 $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$

Esempio 4 $\int (sen\,x-cos\,x)\,dx = -cos\,x - sen\,x + c$

Esempio 5 $\boxed{\int sen^3 x\,dx}$

OCCHIO! ATTENZIONE! Questo esercizio non è immediato!

Sarebbe **sbagliato** scrivere $\int sen^3 x\ dx = \frac{sen^4 x}{4}+c$!

Infatti l'integrale proposto non è della forma $\int x^{\alpha}\,dx$,

ma si presenta invece come $\int [\,f(x)]^{\alpha}\,dx$.

Sennonché, quando la base della potenza è una funzione, la formula di riferimento è

$$\int [\,f(x)]^{\alpha}\cdot f\,'(x)\,dx = \frac{[\,f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$$

che richiede la presenza, come fattore moltiplicativo, della DERIVATA
della funzione che è alla base della potenza … ma un tale fattore nel nostro esempio non c'è.
L'esercizio proposto è dunque abbastanza problematico.
Lo si può risolvere solo con una certa dose di inventiva: vedi qui sotto.

$$\int sen^3 x\,dx = \int sen^2 x\cdot sen\,x\,dx = \int (1-cos^2 x)\cdot sen\,x\,dx = \int (sen\,x - cos^2 x\,sen\,x)\,dx =$$

$$= \int sen\,x\,dx + \int \underbrace{(cos^2 x)\cdot(-sen\,x)}_{[\,f(x)]^2\cdot f\,'(x)}\,dx = -\,cos\,x + \frac{cos^3 x}{3}+c$$

Esempio 6 $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \underbrace{\ln x\cdot\frac{1}{x}}_{f(x)\cdot f\,'(x)}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}+c = \frac{\ln^2 x}{2}+c$

Esempio 7 $\int \underbrace{\frac{2x+3}{x^2+3x-4}}_{\frac{f\,'(x)}{f(x)}}\,dx = \ln\left|x^2+3x-4\right|+c$

Esempio 8 $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{\frac{f\,'(x)}{f(x)}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c$

Esempio 9 $\int \cos 3x\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot 3\cos 3x\ dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3\cos 3x}_{f\,'(x)\cdot cos\,f(x)}\,dx = \frac{1}{3}\,sen\,3x+c$

Con semplici passaggi analoghi a quelli dell'Esempio 9,
è possibile ricavare le seguenti **formule** di frequente applicazione:

$\boxed{\int cos\,mx\,dx = \frac{sen\,mx}{m}+c}$ $\boxed{\int sen\,mx\,dx = -\frac{cos\,mx}{m}+c}$ $\boxed{\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}+c}$

Esempio 10 $\int \underbrace{e^{sen\,x}\cdot cos\,x}_{e^{f(x)}\cdot f'(x)}\,dx = e^{sen\,x}+c$ **Verifica**: $D\left(e^{sen\,x}+c\right)=e^{sen\,x}\cdot cos\,x,\ OK!!!$

Esempio 11 $\int x\cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\cdot e^{-x^2}}_{e^{f(x)}\cdot f'(x)}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$

Esempio 12 $\boxed{\int e^{-x^2}\,dx}$ STOP!!!

E' stato dimostrato che questo integrale non può essere espresso in termini di funzioni elementari.
La funzione la cui derivata è e^{-x^2} *esiste (anzi, ne esistono infinite, che differiscono fra loro per una costante), ma non si tratta di una funzione che si possa scrivere combinando fra loro le "classiche" funzioni algebriche, goniometriche, esponenziali, logaritmiche ecc.*

Esempio 13 $\int \frac{1}{1+3x^2}dx = \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}}_{\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}\,x\right)+c$

Esempio 14 $\int \frac{1}{4+9x^2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{9}{4}x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}dx = \frac{1}{6}arctg\frac{3}{2}x+c$

Esempio 15 $\int \frac{x}{4+9x^2}dx \overset{\text{NOTA 1}}{=} \frac{1}{18}\int \frac{18x}{4+9x^2}dx = \frac{1}{18}\ln\left|4+9x^2\right| \overset{\text{NOTA 2}}{=} \frac{1}{18}\ln(4+9x^2)$

NOTA 1: la derivata del denominatore è $18x$;
cercheremo perciò di far comparire $18x$ a numeratore,
onde ricondurci alla situazione $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$

NOTA 2: possiamo sciogliere le stanghette di valore assoluto perché è $4+9x^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Esempio 16 $\int \frac{x^2}{4+9x^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{9x^2}{4+9x^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{9x^2+4-4}{4+9x^2}dx =$

$= \frac{1}{9}\int\left(1-\frac{4}{4+9x^2}\right)dx = \frac{1}{9}\int dx - \frac{4}{9}\int \frac{1}{4+9x^2}dx \overset{\text{NOTA 3}}{=} \frac{1}{9}x-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{6}\,arctg\frac{3}{2}x+c =$

$= \frac{1}{9}x-\frac{2}{27}arctg\frac{3}{2}x+c$ NOTA 3: approfittando di un risultato già acquisito (Esempio 14)

Esempio 17 $\int \frac{1}{9x^2-6x+1}dx =$

$= \int \frac{1}{(3x-1)^2}dx = \int (3x-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3(3x-1)^{-2}}_{f'(x)\cdot[f(x)]^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{3(3x-1)}+c$

Esempio 18 $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \underbrace{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}\,dx = \ln\left|\ln x\right|+c$ **Verifica**:
$D\left(\ln\left|\ln x\right|+c\right) = \frac{1}{\ln x}\cdot D\left(\ln x\right) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x},\ OK!!!$

Esempio 19 $\int\left(3x+sen\,4x\right)dx = 3\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{cos\,4x}{4}+c = \frac{3x^2}{2}-\frac{cos\,4x}{4}+c$

10. ESERCIZI sugli integrali immediati (o quasi)

1) $\int e^{-x} dx$

2) $\int \frac{1}{x^2} dx$

3) $\int \left(2+e^x\right)^2 dx$

4) $\int \sqrt[7]{x^6}\, dx$

5) $\int e^{3x+4} dx$

6) $\int \frac{2}{x+1} dx$

7) $\int \frac{2}{2x+1} dx$

8) $\int \frac{3-2x-x^2}{x^2} dx$

9) $\int \left(1-\cos 3x\right) dx$

10) $\int \frac{1+x^2}{x} dx$

11) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

12) $\int x\left(1+x^2\right)^{10} dx$

13) $\int 6x\sqrt{1+x^2}\, dx$

14) $\int \left(4 sen\, x - \cos 4x\right) dx$

15) $\int sen\, x \cos x\, dx$

16a) $\int sen^2 x\, dx$ Suggerimento: $sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 16b) $\int \cos^2 x\, dx$

17) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$

18) $\int \frac{x}{1+4x^2} dx$

19) $\int \frac{x^2}{1+4x^2} dx$ Suggerimento: $\frac{x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1+4x^2-1}{1+4x^2} = \ldots$

20) $\int \frac{1+4x^2}{x^2} dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

22) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

23) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

24) $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$

25) $\int \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$

26) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1} dx$

27) $\int \frac{1}{16+x^2} dx$ Suggerimento: $\frac{1}{16+x^2} = \frac{\frac{1}{16}}{1+\frac{x^2}{16}} = \dots$

28) $\int \sqrt{10-3x}\, dx$

29) $\int \frac{x-1}{x^2-2x-3} dx$

30) $\int \frac{1}{(5x+3)^4} dx$

31) $\int \frac{dx}{1+(1-x)^2}$

32) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

33) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ Suggerimento: $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \dots$

RISPOSTE

1) $-e^{-x}+c$ 2) $-\frac{1}{x}+c$ 3) $4x+4e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+c$ 4) $\frac{7}{13}x\sqrt[7]{x^6}+c$ 5) $\frac{1}{3}e^{3x+4}+c$

6) $2\ln|x+1|+c$ 7) $\ln|2x+1|+c$ 8) $-\frac{3}{x}-2\ln|x|-x+c$ 9) $x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+c$

10) $\ln|x|+\frac{1}{2}x^2+c$ 11) $\ln\sqrt{1+x^2}+c$ 12) $\frac{1}{22}(1+x^2)^{11}+c$ 13) $2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}+c$

14) $-4\cos x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x+c$ 15) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+c$ 16a) $\frac{x-\operatorname{sen}x\cos x}{2}+c$ 16b) $\frac{x+\operatorname{sen}x\cos x}{2}+c$

17) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+c$ 18) $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)+c$ 19) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+c$ 20) $-\frac{1}{x}+4x+c$

21) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}2x+c$ 22) $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+c$ 23) $\frac{1}{3}\ln^3 x+c$ 24) $\frac{1}{2}\ln^2 2x+c$ 25) $\frac{2}{3}\operatorname{sen}x\sqrt{\operatorname{sen}x}+c$

26) $\ln(\operatorname{sen}x+1)+c$ 27) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}$ 28) $-\frac{2}{9}(10-3x)\sqrt{10-3x}$ 29) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3|+c$

30) $-\frac{1}{15(5x+3)^3}$ 31) $-\operatorname{arctg}(1-x)+c$ 32) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x^2)^2}+c$ 33) $-\operatorname{arcsen}(1-x)+c$

10. Integrazione delle funzioni RAZIONALI FRATTE (= rapporti di polinomi)

Studieremo ora tecniche specifiche per gli integrali della forma

$$\boxed{\int \frac{A(x)}{B(x)}dx},$$

essendo $A(x)$ e $B(x)$ due **polinomi**.

E' lecito supporre che il numeratore $A(x)$ sia di grado inferiore rispetto al denominatore $B(x)$: infatti, se così non fosse, ci si potrebbe pur sempre riportare a questo caso, sostanzialmente tramite una divisione fra polinomi, come mostra l'esempio seguente.

$$\int \frac{x^3-x+1}{x+2}dx$$

Poiché il numeratore **non** è di grado inferiore rispetto al denominatore, svolgiamo la divisione:

$$\begin{array}{rrr|l}
\multicolumn{3}{c|}{\overbrace{x^3 \qquad\qquad -x+1}^{A(x)}} & \overbrace{x+2}^{B(x)} \\ \hline
-x^3-2x^2 & & & \underbrace{x^2-2x+3}_{Q(x)} \\ \cline{1-3}
/ \; -2x^2 & -x & +1 & \\
2x^2 & +4x & & \\ \cline{1-3}
/ & 3x & +1 & \\
 & -3x & -6 & \\ \cline{2-3}
 & / & \underbrace{-5}_{R(x)} &
\end{array}$$

Ora abbiamo a disposizione l'identità

$$x^3-x+1=(x^2-2x+3)(x+2)-5$$

e ciò fa sì che il nostro integrale possa essere trascritto come:

$$\int \frac{x^3-x+1}{x+2}dx=\int \frac{(x^2-2x+3)(x+2)-5}{x+2}dx=$$

$$=\int\left[\frac{(x^2-2x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}-\frac{5}{x+2}\right]dx=\int\left(x^2-2x+3-\frac{5}{x+2}\right)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-5\ln|x+2|+c$$

In generale, di fronte ad un integrale di funzione razionale fratta $\int \frac{A(x)}{B(x)}dx$

in cui sia $\deg(A(x)) \geq \deg(B(x))$ (***deg*** significa "grado", dall'inglese ***degree***)

- ♪ si svolgerà la **divisione** $A(x):B(x)$,
- ♫ poi si utilizzerà l'**identità**

$$\textit{dividendo} = \textit{quoziente} \cdot \textit{divisore} + \textit{resto}$$
$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$$

che permetterà di scrivere la funzione integranda sotto una forma diversa:

$$\boxed{\int \frac{A(x)}{B(x)}dx}=\int \frac{Q(x)\cdot B(x)+R(x)}{B(x)}dx=\int\left[\frac{Q(x)\cdot \cancel{B(x)}}{\cancel{B(x)}}+\frac{R(x)}{B(x)}\right]dx=\boxed{\int Q(x)dx+\int \frac{R(x)}{B(x)}dx}$$

In tal modo ci si ricondurrà all'integrazione
del **polinomio $Q(x)$** (immediata) e della **funzione razionale fratta $R(x)/B(x)$**.

Ma **in quest'ultima il numeratore è di grado inferiore rispetto al denominatore**,
perché in una divisione di polinomi il polinomio resto
ha sempre grado minore rispetto al polinomio divisore.

Il caso in cui il denominatore è di 1° grado

Se il polinomio a denominatore è di 1° grado,
allora, per quanto sopra, possiamo supporre che il numeratore sia di grado zero, cioè sia una costante.
Dunque il nostro integrale sarà della forma

$$\boxed{\int \frac{k}{ax+b}dx}$$

e procederemo come nell'esempio che segue:

$$\int \frac{7}{3x-8}dx = 7\int \frac{1}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + c \quad \text{(NOTA)}$$

In generale:

$$\boxed{\int \frac{k}{ax+b}dx =} \; k\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \boxed{\frac{k}{a}\ln|ax+b| + c}$$

NOTA

Per la precisione, sarebbe $\frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\left(\ln|3x-8| + c\right) = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{\frac{7}{3}c}$;

d'altra parte, poiché c indica una costante arbitraria, anche $\frac{7}{3}c$ sarà una costante arbitraria;

e questa costante arbitraria potrà essere indicata ancora con c.

Volendo effettuare tutti i passaggi, con perfetta salvaguardia della correttezza formale, si potrebbe scrivere:

$$\frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\left(\ln|3x-8| + \boxed{c_1}\right) = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{\frac{7}{3}c_1} = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + \boxed{c}$$

Ma ***NELLA PRATICA*, questi passaggi e ragionamenti vengono di norma saltati**
e si scrivono direttamente catene che portano dappertutto la sola "c":

$$\int \frac{7}{3x-8}dx = 7\int \frac{1}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x-8}dx = \frac{7}{3}\ln|3x-8| + c$$

ESERCIZI

1) $\int \frac{2}{10x+13}dx$ 2) $\int \frac{dx}{5(1-3x)}$ 3) $\int \frac{10x-13}{10x+13}dx$ Suggerimento: $\frac{10x-13}{10x+13} = \frac{10x+13-26}{10x+13} = \ldots$

4) $\int \frac{x}{3x-4}dx$ 5) $\int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{3}{4x+5} + 6x\right)dx$ 6) $\int \frac{dx}{x^2+x}$ Suggerimento: $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

RISPOSTE 1) $\frac{1}{5}\ln|10x+13| + c$ 2) $-\frac{1}{15}\ln|1-3x| + c$ *oppure* $-\frac{1}{15}\ln|5(1-3x)| + c$ (NOTA)

3) $x - \frac{13}{5}\ln|10x+13| + c$ 4) $\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\ln|3x-4| + c$

5) $\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{3}{4}\ln|4x+5| + 3x^2 + c$ 6) $\ln|x| - \ln|x+1| + c = \ln\frac{|x|}{|x+1|} + c = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$

NOTA $\int \frac{dx}{5(1-3x)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1-3x} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\ln|1-3x|\right) + c = -\frac{1}{15}\ln|1-3x| + c$

oppure: $\int \frac{dx}{5(1-3x)} = \int \frac{dx}{5-15x} = -\frac{1}{15}\ln|5-15x| + c = -\frac{1}{15}\ln|5(1-3x)| + c =$

$= -\frac{1}{15}\left(\ln 5 + \ln|1-3x|\right) + c = -\frac{1}{15}\ln 5 - \frac{1}{15}\ln|1-3x| + c$

Questo risultato equivale al precedente, perché
se c è una costante arbitraria, allora anche $-\frac{1}{15}\ln 5 + c$ è una costante arbitraria!

Il caso in cui il denominatore è di 2° grado

Allora, per quanto sopra, possiamo supporre che il numeratore sia di grado 0 o di grado 1:

$$\boxed{\int \frac{kx+h}{ax^2+bx+c}dx}$$

L'integrazione si effettua con 3 tecniche diverse, a seconda che, nel trinomio ax^2+bx+c, sia:

I. $\Delta > 0$
II. $\Delta = 0$
III. $\Delta < 0$

Primo sottocaso: $\boxed{\Delta > 0}$

E' noto che un trinomio di 2° grado con $\Delta > 0$ è scomponibile in due fattori di 1° grado, distinti fra loro.
La tecnica di integrazione consiste nell'**effettuare la scomposizione** e poi nello
spezzare la frazione in una somma algebrica di due frazioni col denominatore di primo grado.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\underbrace{2x^2-x-1}_{\substack{\Delta = \\ =b^2-4ac=9>0}}}dx$

Consideriamo la funzione integranda, scomponiamone il denominatore,
e scriviamola come somma algebrica di due frazioni aventi
per denominatori i due fattori di primo grado ottenuti
e per numeratori **due costanti *A, B* da determinarsi in modo opportuno**:

$$\frac{3x+4}{2x^2-x-1}=\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$$

Si tratta ora di stabilire per quali valori di A, B l'uguaglianza

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$$

è verificata per tutti i valori di x, ossia è un'identità.

Dovrà essere, "identicamente" (cioè: per ogni x),

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{Ax-A+2Bx+B}{(2x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{(A+2B)x+(-A+B)}{(2x+1)(x-1)}$$

e a tale scopo A, B dovranno soddisfare il sistema $\begin{cases} A+2B=3 \\ -A+B\ \ =4 \end{cases}$

Risolvendo, si ha $\begin{cases} A=-5/3 \\ B=7/3 \end{cases}$ da cui $\displaystyle\frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}=\frac{-\frac{5}{3}}{2x+1}+\frac{\frac{7}{3}}{x-1}$

Il nostro integrale allora diventa:

$$\int \frac{3x+4}{(2x+1)(x-1)}dx=\int\left(\frac{-\frac{5}{3}}{2x+1}+\frac{\frac{7}{3}}{x-1}\right)dx=-\frac{5}{3}\int\frac{1}{2x+1}dx+\frac{7}{3}\int\frac{1}{x-1}dx=-\frac{5}{6}\int\frac{2}{2x+1}dx+\frac{7}{3}\int\frac{1}{x-1}dx=$$

$$=-\frac{5}{6}\ln|2x+1|+\frac{7}{3}\ln|x-1|+c$$

PROVACI TU!!! Fai vedere che si ha $\displaystyle\int\frac{x-38}{x^2-13x+22}dx=4\ln|x-2|-3\ln|x-11|+c$

Secondo sottocaso: $\boxed{\Delta = 0}$

Un trinomio di 2° grado con $\Delta = 0$
è uguale a un **quadrato di binomio, eventualmente moltiplicato per una costante**.

Ma aspettiamo un attimo, prima di effettuare la scomposizione:
la prima cosa da fare, infatti, è di
far comparire a numeratore la derivata del denominatore,
come illustrato dall'esempio che segue.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x+1}{\underbrace{4x^2-4x+1}_{\substack{\Delta = b^2-4ac = \\ =16-16=0}}}dx$

La derivata del denominatore $4x^2-4x+1$ è $8x-4$.
Innanzitutto, vogliamo far comparire a numeratore questa espressione.

Avremo:

$$\int \frac{x+1}{4x^2-4x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2-4x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x-4+12}{4x^2-4x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{12}{4x^2-4x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+1}dx + \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,2}}\int \frac{1}{(2x-1)^2}dx =$$
$$= \frac{1}{8}\ln\left|4x^2-4x+1\right| + \frac{3}{2}\int (2x-1)^{-2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\ln(2x-1)^2 + \frac{3}{4}\int 2(2x-1)^{-2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot 2\ln|2x-1| + \frac{3}{4}\cdot\frac{(2x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|2x-1| - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x-1} + c =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|2x-1| - \frac{3}{4(2x-1)} + c$$

PROVACI TU!!! Fai vedere che si ha $\displaystyle\int \frac{x}{25x^2+20x+4}dx = \frac{1}{25}\ln|5x+2| + \frac{2}{25(5x+2)} + c$

Terzo sottocaso: $\boxed{\Delta < 0}$

Di un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$ con $\Delta < 0$, noi sappiamo che:

- non è scomponibile in fattori
  (a meno di utilizzare coefficienti complessi: ma in questo contesto, non se ne parla neppure!)
- si può scrivere come $a[(x+k)^2 + p]$, essendo $p > 0$.

La tecnica di integrazione, in questo caso, consiste nel **ricondursi alla derivata di un "arco tangente"**, come illustrato dall'esempio che segue.
Anche qui, come nel sottocaso precedente (quello del $\Delta = 0$)
occorre innanzitutto far comparire a numeratore la derivata del denominatore.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x-1}{\underbrace{x^2-6x+11}_{\substack{\Delta = b^2 - 4ac = \\ = 36-44<0}}} dx$

$$\int \frac{x-1}{x^2-6x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-6x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6+4}{x^2-6x+11}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x-6}{x^2-6x+11} + \frac{4}{x^2-6x+11}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{x^2-6x+11}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_1} + 2\underbrace{\int \frac{1}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_2}$$

Si tratta ora di risolvere i due integrali $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$:

- il primo porta immediatamente a un logaritmo,
- il secondo va ricondotto ad un $arc\ tg$.

Dunque:

$$\mathbf{I_1} = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx = \ln(x^2-6x+11) + c$$

(abbiamo omesso il valore assoluto perché, com'è noto, un trinomio di 2° grado con $\Delta < 0$ e 1° coefficiente positivo è sempre >0, per ogni valore della variabile)

$$\mathbf{I_2} = \int \frac{1}{x^2-6x+11}dx = \int \frac{1}{x^2-6x+9+2}dx =$$
$$= \int \frac{1}{2+(x-3)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+(x-3)^2}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{(x-3)^2}{2}}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx \overset{\text{NOTA}}{=} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} arctg \frac{x-3}{\sqrt{2}} + c$$

NOTA*:*
stiamo cercando di portarci nelle condizioni di poter applicare la formula di integrazione
$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = arctg\ f(x) + c.$$
La funzione che nella formula è indicata con $f(x)$ *è per noi la* $\frac{x-3}{\sqrt{2}}$.

E si ha $D\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right) = D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-3)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

In definitiva avremo

$$\boxed{\int \frac{x-1}{x^2-6x+11}dx} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_1} + 2\underbrace{\int \frac{1}{x^2-6x+11}dx}_{\mathrm{I}_2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+11) + 2\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x-3}{\sqrt{2}} + c = \boxed{\ln\sqrt{x^2-6x+11} + \sqrt{2}\,arctg\frac{x-3}{\sqrt{2}} + c}$$

PROVACI TU!!! Fai vedere che si ha $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+65}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+65\right) - \frac{1}{8}arctg\frac{x+1}{8} + c$

ESERCIZI

1) $\int \frac{4x-22}{x^2-6x+8}dx$

2) $\int \frac{x+3}{x^2-1}dx$

3) $\int \frac{4x-3}{(3x-1)(2x-1)}dx$

4) $\int \frac{x+7}{x^2-4x+4}dx$

5) $\int \frac{x-1}{(3x-2)^2}dx$

6) $\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx$

7) $\int \frac{x}{x^2-2x+26}dx$

8) $\int \frac{x+3}{16x^2+8x+5}dx$

9) $\int \frac{x+2}{4x^2-4x+10}dx$

10) $\int \frac{2x}{x^2-10x+25}dx$

11) $\int \frac{x+2}{5x^2-2x}dx$

12) $\int \frac{1}{9x^2+6x+1}dx$

13) $\int \frac{2x+7}{x^2+20x+136}dx$

14) $\int \frac{5x+19}{x^2+x-30}dx$

15) $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$

RISPOSTE

1) $7\ln|x-2|-3\ln|x-4|+c$ 2) $2\ln|x-1|-\ln|x+1|+c$ 3) $\frac{5}{3}\ln|3x-1|-\ln|2x-1|+c$

4) $\ln|x-2|-\frac{9}{x-2}+c$ 5) $\frac{1}{9}\ln|3x-2|+\frac{1}{9(3x-2)}+c$ 6) $arctg(x-2)+c$

7) $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+26)+\frac{1}{5}arctg\frac{x-1}{5}+c$ 8) $\frac{1}{32}\ln(16x^2+8x+5)+\frac{11}{32}arctg\frac{4x+1}{2}+c$

9) $\frac{1}{8}\ln(4x^2-4x+10)+\frac{5}{12}arctg\frac{2x-1}{3}+c$ 10) $2\ln|x-5|-\frac{10}{x-5}+c$

11) $\frac{6}{5}\ln|5x-2|-\ln|x|+c$ 12) $-\frac{1}{3(3x+1)}+c$ 13) $\ln|x^2+20x+136|-\frac{13}{6}arctg\left(\frac{x+10}{6}\right)+c$

14) $\ln|x+6|+4\ln|x-5|+c$ 15) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

Il caso in cui il denominatore è di grado superiore al secondo

Di fronte all'integrale di un rapporto tra due polinomi $\int \frac{M(x)}{N(x)} dx$

nel quale il grado del denominatore sia superiore a 2,
ossia $\deg(N(x)) > 2$,
innanzitutto scomporremo in fattori il denominatore $N(x)$.

I fattori ottenuti potranno essere dei tipi seguenti:

- $ax+b$
- $(ax+b)^n$, $n>1$
- $ax^2+bx+c \;\; con \;\; \Delta<0$ (trinomio di 2° grado non scomponibile utilizzando coefficienti reali)
- $\left(ax^2+bx+c\right)^n \;\; con \;\; \Delta<0, \;\; n>1$

A questo punto,
cercheremo di decomporre la frazione $\frac{M(x)}{N(x)}$ in una somma algebrica di frazioni più semplici.

- Per ogni fattore $ax+b$ prepareremo una frazione della forma $\frac{A}{ax+b}$
- Per ogni fattore $(ax+b)^n$ prepareremo *n* frazioni della forma
$$\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \dots, \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$
- Per ogni fattore ax^2+bx+c prepareremo una frazione della forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
- Per ogni fattore $(ax^2+bx+c)^n$ prepareremo *n* frazioni della forma
$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}, \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \dots, \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Infine **determineremo le costanti in gioco in modo che**
la somma algebrica di tali frazioni sia identicamente uguale alla frazione iniziale $\frac{M(x)}{N(x)}$.

Per illustrare il procedimento, consideriamo l'integrale seguente: $\boxed{\mathrm{I} = \int \frac{x(2x^2-4x+5)}{x^4-x^3-x+1} dx}$

$$\frac{x(2x^2-4x+5)}{x^4-x^3-x+1} = \frac{2x^3-4x^2+5x}{x^3(x-1)-(x-1)} = \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)(x^3-1)} =$$
$$= \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A(x^3-1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{Ax^3-A+Bx^2+Bx+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{(A+C)x^3+(B-2C+D)x^2+(B+C-2D)x+(-A+B+D)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A \quad +C = 2 \\ B \quad -2C \quad +D = -4 \\ B \quad +C \quad -2D = 5 \\ -A \quad +B \quad +D = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1)+(2)+(3)+(4) \\ (1) \\ (3)-(2) \\ (4) \end{matrix} \begin{cases} 3B=3 \\ A+C=2 \\ 3C-3D=9 \\ -A+B+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ C-D=3 \\ -A+D=-1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \\ \\ (2)+(4) \end{matrix} \begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ C-D=3 \\ C+D=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ \\ (3)+(4) \\ (4)-(3) \end{matrix} \begin{cases} B=1 \\ A+C=2 \\ 2C=4 \\ 2D=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=2 \\ D=-1 \end{cases}$$

E' dunque

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \cancel{\frac{0}{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x-1}{x^2+x+1}$$

e di conseguenza:

$$\mathrm{I} = \int \frac{2x^3-4x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}\right]dx = \underbrace{\int \frac{1}{(x-1)^2}dx}_{\mathrm{I}_1} + \underbrace{\int \frac{2x-1}{x^2+x+1}dx}_{\mathrm{I}_2}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int (x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{x-1}+c$$

$$\mathrm{I}_2 = \int \frac{2x-1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x+1-2}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx = \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx = \ln\left|x^2+x+1\right| - 2\int \frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{8}{3}\int \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}dx = \ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{\cancel{8}^{\,4}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{4\sqrt{3}}{3}\,arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c$$

Finalmente avremo $\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2 = -\frac{1}{x-1}+\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{4\sqrt{3}}{3}\,arctg\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+c}$

ESERCIZI

1) $\int \frac{5x^2+15x+12}{x^3+4x^2+4x}dx$ 2) $\int \frac{x^3+2x^2-3x+8}{x^3+4x}dx$ 3) $\int \frac{10x^2+2x+10}{x^4+2x^2+1}dx$

4) $\int \frac{x^5+2x^3+8x^2+5x-1}{x^3(x+1)}dx$ 5) $\int \frac{3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ 6) $\int \frac{44x^3-56x^2-24x+18}{x^2(2x-3)^2}dx$

RISPOSTE

1) $3\ln|x|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+c$ 2) $x+2\ln|x|-\frac{7}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$ 3) $10\,arctg\,x-\frac{1}{x^2+1}+c$

4) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}-x-\frac{6}{x}+2\ln|x|+\ln|x+1|+c$ 5) $\frac{1-6x}{2(x-1)^2}+c$ 6) $-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x-3}+11\ln|2x-3|+c$

11. Integrazione “PER PARTI”

Capita a volte che la funzione integranda si presenti come il prodotto di due funzioni, tali che nessuna di esse sia la derivata dell’altra, ma tali però che **fra le due, almeno una sia “facilmente integrabile”.** In questi casi può talvolta “funzionare” la cosiddetta **regola di integrazione per parti**.

Non vogliamo rappresentarla subito tramite una formula:
infatti, la regola si assimila più facilmente se è descritta a parole.
Anzi, **sarà estremamente conveniente studiarsi la “filastrocca” a memoria**
e ripetersela passo a passo mentre la si applica.

Premesso che
- il fattore “facilmente integrabile” viene chiamato **“fattor differenziale” (fd)**
- mentre l’altro fattore viene detto **“fattor finito” (ff)**,

la regola dice così:

“fattor finito per (moltiplicato)
l’integrale (NOTA 1) **del fattor differenziale,**
− (meno)
l’integrale (NOTA 2) **dell’integral trovato,**
per la derivata del fattor finito”.

NOTA 1 qui “integrale” significa “primitiva”

NOTA 2 qui “integrale” significa invece “operatore di integrazione $\int$ ”

Va detto che la scelta del fattore da prendersi come “fattor differenziale” è legata non soltanto a questioni di “facile integrabilità”, ma anche alla previsione della natura del nuovo integrale cui si perverrà: … sì, perché **quando si integra per parti non si conclude subito l’integrazione, ma la si riconduce al calcolo di un altro integrale**, che sia più semplice di quello assegnato.

Esempio 1

$$\int \underbrace{x}_{ff}\,\underbrace{sen\,x\,dx}_{fd}=\boxed{x(-cos\,x)-\int -cos\,x\cdot 1\,dx}=-x\,cos\,x+\int cos\,x\,dx=-x\,cos\,x+sen\,x+c$$

fattor finito $\boxed{x}$ per l’integrale del fattor differenziale $\boxed{-cos\,x}$

− (meno)

l’integrale $\boxed{\int}$ dell’ integral trovato $\boxed{-cos\,x}$ per la derivata del fattor finito $\boxed{1}$

Verifica: $D(-x\,cos\,x+sen\,x+c)=-(1\cdot cos\,x-x\,sen\,x)+cos\,x=\cancel{-cos\,x}+x\,sen\,x\cancel{+cos\,x}$ OK!!!

Prima di proseguire con gli esempi, *traduciamo la regola in formula e dimostriamola*.

Indichiamo con:
- $\int \underbrace{a(x)}_{ff}\cdot\underbrace{b(x)\,dx}_{fd}$ l’integrale di partenza
- $B(x)$ quello che la regola chiama l’ “integrale” (nel senso di “primitiva”) del fattor differenziale

La regola afferma dunque che $\int a(x)\cdot b(x)\,dx=a(x)\cdot B(x)-\int B(x)\cdot a'(x)\,dx$

e dimostrarla significa semplicemente far vedere che $D\left(a(x)\cdot B(x)-\int B(x)\cdot a'(x)\,dx\right)=a(x)\cdot b(x)$

Ora:

$$D\left(a(x)\cdot B(x)-\int B(x)\cdot a'(x)\,dx\right)=\underbrace{a'(x)\cdot B(x)+a(x)\cdot B'(x)}_{\substack{questa\ è\ la\ derivata\\ del\ prodotto\ a(x)B(x)}}-\underbrace{B(x)\cdot a'(x)}_{\substack{la\ derivata\\ di\ un\ integrale\\ è\ la\ funzione\\ integranda}}=$$

$$=\cancel{a'(x)\cdot B(x)}+a(x)\cdot\underbrace{b(x)}_{\substack{B\ indicava\\ la\ primitiva\\ di\ b:\\ B'(x)=b(x)}}\cancel{-B(x)\cdot a'(x)}=a(x)\cdot b(x),\ \text{C.V.D.}$$

Esempio 2 $\quad \int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\ln x}_{ff}\, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

Esempio 3 $\quad$ *Qui si integra per parti una prima e poi una seconda volta!*

$$\int \underbrace{x^2}_{ff} \underbrace{e^x\, dx}_{fd} = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\, dx = x^2 e^x - 2\int \underbrace{x}_{ff} \underbrace{e^x\, dx}_{fd} =$$
$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \cdot 1 dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x\, dx =$$
$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

Esempio 4

$$\int \underbrace{x^2}_{ff} \underbrace{\cos 2x\, dx}_{fd} = x^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \cdot 2x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} 2x - \int \underbrace{x}_{ff} \underbrace{\operatorname{sen} 2x\, dx}_{fd} = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} 2x - \left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int -\frac{\cos 2x}{2} \cdot 1\, dx \right] =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + c$$

TIPICI INTEGRALI DA RISOLVERE PER PARTI sono i seguenti:

$$\int \underbrace{x^n}_{ff} \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{fd} \qquad \int \underbrace{x^n}_{ff} \underbrace{\cos x\, dx}_{fd} \qquad \int \underbrace{x^n}_{ff} \underbrace{e^x\, dx}_{fd} \qquad \int \underbrace{x^n}_{fd} \underbrace{\ln x\, dx}_{ff}$$

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,sen} x\, dx}_{ff} \qquad \int \operatorname{arc\,cos} x\, dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,cos} x\, dx}_{ff} \qquad \int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,tg} x\, dx}_{ff}$$

Esempio 5

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = \int \underbrace{1}_{fd} \cdot \underbrace{\operatorname{arc\,sen} x\, dx}_{ff} = \operatorname{arc\,sen} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$
$$= x \cdot \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\int -2x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2} \frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

OSSERVAZIONE DI CARATTERE FORMALE

In $\int \underbrace{x^n}_{fd} \underbrace{\ln x\, dx}_{ff}$, *tanto per fare un esempio, non sarebbe perfettamente corretto dire che il fatt. diff. è* x^n : *il "vero" fattor differenziale è, a stretto rigore,* $x^n\, dx$.
Il fatto è che il "fattor differenziale" dovrebbe, volendo, poter essere pensato come il "differenziale" (vedi uno dei paragrafi successivi) di una funzione.
Tuttavia, nello scrivere, non siamo stati tanto a sottilizzare, perché banali ragioni di carattere grafico ci avrebbero reso un po' scomoda questa pignoleria.

INTEGRAZIONE COL "CIRCOLO VIZIOSO APPARENTE"

Esempio 6

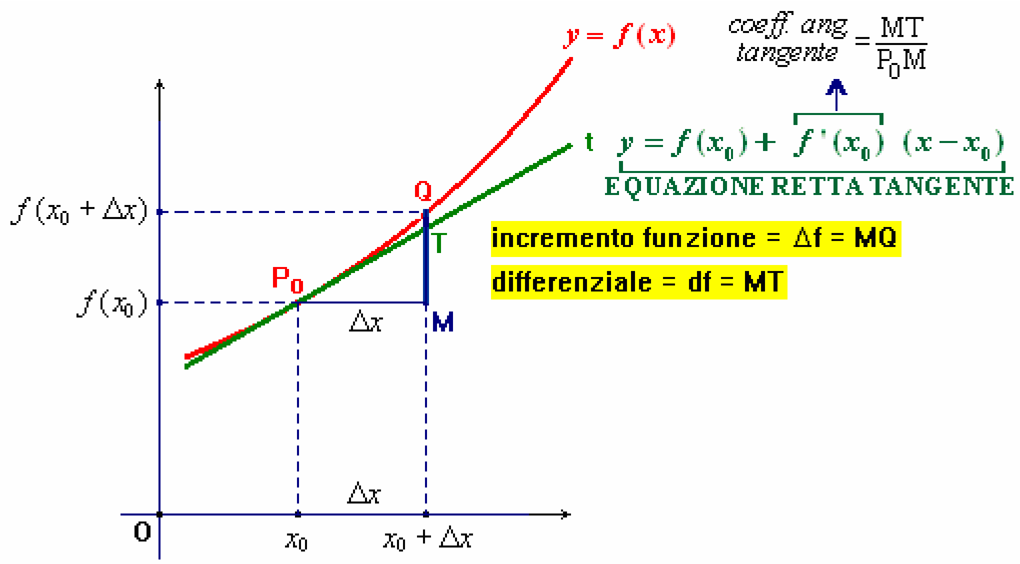
$$\boxed{\int \underbrace{e^x}_{fd} \underbrace{\cos x\, dx}_{ff}} = \cos x \cdot e^x - \int e^x (-\operatorname{sen} x)\, dx = e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{fd} \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{ff} = e^x \cos x + \operatorname{sen} x \cdot e^x - \boxed{\int e^x \cdot \cos x\, dx}$$

Sembra che si sia generato un circolo vizioso; abbiamo infatti ritrovato l'integrale di partenza.
Ma se si scrivono soltanto il primo e l'ultimo anello della catena, si ottiene:

$$\boxed{\int e^x \cdot \cos x\, dx} = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \boxed{\int e^x \cdot \cos x\, dx} \text{ da cui è possibile ricavare } \boxed{\int e^x \cdot \cos x\, dx}:$$
$$2\boxed{\int e^x \cdot \cos x\, dx} = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + c_1$$
$$\boxed{\int e^x \cdot \cos x\, dx} = \frac{e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} + c$$

Gli ESERCIZI sull'integrazione per parti sono a pagina 38.

12. Il DIFFERENZIALE, questo sconosciuto



Nella figura è rappresentata una funzione $y = f(x)$ derivabile in un'ascissa x_0.

Il grafico della f è dunque dotato di retta tangente, non verticale, nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$;
tale tangente t ha, com'è noto, equazione $y - f(x_0) = f\,'(x_0)(x - x_0)$ o anche $y = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0)$.

A partire dal valore x_0, diamo alla variabile indipendente un incremento Δx:
passiamo cioè da x_0 al nuovo valore $x_0 + \Delta x$.
Che incremento subisce, in corrispondenza, la nostra funzione?

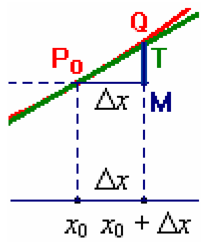
Dall'ordinata $f(x_0)$ si va alla nuova ordinata $f(x_0 + \Delta x)$ (l'ordinata del punto Q),
quindi l'incremento subito dalla funzione è

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Nella figura, tale incremento Δf è rappresentato dalla misura (con segno) del segmento orientato MQ.

Pensiamo ora a cosa succederebbe prendendo Δx molto, ma molto piccolo.
Con Δx piccolissimo, il grafico della f è vicinissimo a quello della tangente *t*:
dunque il segmento orientato che nella figura è indicato con MQ
tende ad identificarsi col segmento orientato MT, la cui misura con segno è

$$\boxed{\mathrm{MT}} = y_T - y_M =$$
$$= \left[f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0)\right] - f(x_0) =$$
$$= f\,'(x_0)(x - x_0) = \boxed{f\,'(x_0)\Delta x} \text{ (\textit{vedi anche} NOTA)}$$



NOTA:
il coeff. ang. *m*
della retta tangente
è uguale alla derivata;
ma

$$m = \frac{diff.\ ordinate}{diff.\ ascisse} = \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{P_0M}}$$

da cui

$$\mathrm{MT} = m \cdot \mathrm{P_0M} = f\,'(x_0)\cdot \Delta x$$

Pertanto, se siamo interessati all'incremento

$$\boxed{\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \mathrm{MQ}}$$

che la funzione subisce, quando diamo alla x
un PICCOLO incremento, facendola passare da x_0 a $x_0 + \Delta x$,
potremo egregiamente approssimare Δf con la quantità $f\,'(x_0)\Delta x$.

Riassumendo:

$$\text{MQ} \underset{\substack{circa \\ uguale\ a}}{\approx} \text{MT}\,, \text{ se } \Delta x \text{ è piccolo}$$

cioè: $\Delta f \approx f\,'(x_0)\Delta x$, se Δx è piccolo.

Insomma, **l'incremento $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ subito da una funzione, in corrispondenza di un PICCOLO incremento Δx della variabile indipendente, è ben approssimato dalla quantità $f\,'(x_0)\Delta x$, che è "l'incremento della y, misurato *non* sul grafico della funzione, *bensì* sulla retta tangente"**

In Matematica e nelle sue applicazioni (ad esempio alla Fisica), è assai frequente che interessi valutare il *piccolo* incremento Δf subito da una determinata funzione f, quando si dà alla variabile indipendente un *piccolo* incremento Δx, che la porti dal valore x al valore $x + \Delta x$.

Abbiamo scoperto che tale incremento è egregiamente approssimato dalla semplice e "maneggevole" quantità $f\,'(x)\Delta x$ (se, beninteso, Δx è molto piccolo!)
E abbiamo anche visto che questa quantità $f\,'(x)\Delta x$ corrisponde all' "incremento della y, misurato *non* sul grafico della funzione, *bensì* sulla retta tangente".

Alla quantità $f\,'(x)\Delta x$ si dà un nome particolare: la si chiama il DIFFERENZIALE della funzione *f*, e la si indica con df o anche con dy.

$\underbrace{df}_{\text{OPPURE: } dy} = f\,'(x)\Delta x =$ differenziale della funzione f = quantità che bene approssima l'incremento della f, per un piccolo incremento della x

Il differenziale è dunque il prodotto della derivata, per l'incremento della variabile indipendente.

Osserviamo che:

a) il differenziale è una quantità che dipende da DUE variabili: x e Δx; tuttavia, se pensiamo x fissato, a questo punto il differenziale dipenderà soltanto da Δx.

b) E' vero: il differenziale è utile, per approssimare l'incremento della funzione, soltanto quando Δx è molto piccolo; d'altra parte, il differenziale è una quantità che resta definita anche quando Δx non è piccolo.

c) Il significato geometrico del differenziale è importantissimo per comprendere bene. Ribadiamolo ancora una volta:
differenziale = incremento della y, misurato *non* sul grafico della funzione, *bensì* sulla retta tangente.

VEDIAMO UN ESEMPIETTO

Il differenziale della funzione $y = x^3$ è
$dy = 3x^2\Delta x$ [si può pure scrivere: $d\left(x^3\right) = 3x^2\Delta x$].
Ciò significa che, per un piccolo incremento di x, la quantità $dy = 3x^2\Delta x$ fornisce un'ottima approssimazione dell'incremento subito dalla funzione $y = x^3$.

Poniamo che si voglia valutare l'incremento subito dalla funzione $y = x^3$ nel passaggio da $x = 2$ a $x = 2{,}001$ $(\Delta x = 0{,}001)$.
Bene, si potrà dire che tale incremento è molto vicino a $3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}001 = 0{,}012$.
In effetti, andando a calcolare il VERO incremento della funzione, si trova $(2{,}001)^3 - 2^3 = 0{,}012006$.

13. Approfondimenti: Pierino e il differenziale

Prof. : Ti vedo perplesso, Pierino.

Pierino: Sì, in effetti sono un po' confuso, per via dei simboli utilizzati.
Abbiamo detto che il differenziale di una funzione, ossia la quantità $f'(x)\Delta x$
(differenziale = prodotto della derivata per l'incremento della variabile indipendente), viene indicato con dy.
Quella "*d*" sta dunque per "differenziale"?

Prof : Certo.

Pierino: Ma a me quella "*d*" fa anche venire in mente la questione delle "differenze infinitesime" !
Abbiamo sempre detto che, in matematica, il simbolo principe per indicare differenza è Δ;
tuttavia,se si pensa a una differenza "piccolissima", "tendente a zero", "infinitesimale",
al posto del simbolo Δ si va preferibilmente a sostituire il simbolo d.
Ad esempio, se penso a un punto in movimento, e lo osservo in due istanti di tempo successivi t_1, t_2,
quando ha velocità rispettivamente v_1, v_2, potrò dire che nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1 = \Delta t$
la variazione di velocità è stata $v_2 - v_1 = \Delta v$;
ma se i due istanti di tempo li penso estremamente ravvicinati, preferirò parlare
di un intervallino di tempo dt nel quale è intervenuta una piccolissima variazione di velocità dv.

Prof : Parole sante.

Pierino: Dunque, se trovo da qualche parte il simbolo dy,
dovrò presumere che indichi ***il differenziale*** della *y*, oppure ***un incremento infinitesimo*** della y ?
Perché fra l'altro, se leggo dy come differenziale, allora dy sarà
un "incremento, calcolato non sul grafico della funzione bensì sulla retta tangente" (segmento MT della figura),
mentre se leggo dy come incremento (infinitesimo) della funzione,
allora dy mi indicherà il VERO incremento, quello indicato dal segmento MQ della figura.

Prof : in effetti, potrebbe esserci una certa ambiguità.
D'altra parte, abbiamo sottolineato che il differenziale si rivela utile, quando l'incremento della *x* è piccolo.
In tali condizioni, MT ed MQ sono "pressappoco uguali"
e interpretare dy come indicatore dell'incremento sulla retta tangente oppure sul grafico
diventa tendenzialmente irrilevante.
Certo, il discorso diventerebbe più delicato se queste questioni dovessero entrare
nella dimostrazione di un teorema … in tal caso, il "pressappoco" andrebbe valutato attentamente,
e sarebbero necessarie di volta in volta considerazioni più "fini".
Tuttavia, almeno per una prima "presa di confidenza" coi simboli, potremo dire che:

a) il fatto se la scrittura dy vada letta come "differenziale della funzione y"
oppure come "incremento infinitesimo della variabile dipendente y", si desume dal contesto;

b) le due possibili interpretazioni finiscono per rivelarsi sostanzialmente equivalenti perché il differenziale
è di norma coinvolto in situazioni in cui, essendo piccolissimo l'incremento della variabile indipendente,
tendono a identificarsi l'incremento VERO della variabile dipendente (MQ),
e il valore APPROSSIMATO (MT) di tale incremento,
che si ottiene sostituendo al grafico della funzione, il grafico della retta tangente.

Pierino: Bene.
Però, se il differenziale trova la sua ragion d'essere soprattutto quando l'incremento Δx è piccolo piccolo,
perché non indicare anche quest'ultimo incremento con dx anziché con Δx ?

Prof : In effetti, in matematica si finisce per fare proprio così come stai suggerendo tu!
Avevamo posto, inizialmente:
$dy = f'(x)\Delta x$ = differenziale della funzione f =
= quantità che bene approssima l'incremento della f, per un piccolo incremento della x

Ora diciamo che

si preferisce scrivere il differenziale di una funzione f sotto la forma $dy = f'(x)dx$ anziché $dy = f'(x)\Delta x$

- sia in considerazione del fatto che in un differenziale possiamo pensare Δx piccolo o anche non piccolo, ma il differenziale si rivela poi utile, per approssimare l'incremento della funzione, soltanto quando quel Δx diventa un infinitesimale dx;
- sia per il fatto che, formalmente, se pensiamo alla particolare funzione $y = x$ (la "funzione identica"),
avremo $dy = d(x) = 1 \cdot \Delta x$ e quindi $\underbrace{dx}_{(*)} = \Delta x$ (*) differenziale della funzione identica

Pierino:
quindi, adotteremo preferibilmente la scrittura:

$$dy = f'(x)dx$$

al posto della

$$dy = f'(x)\Delta x,$$

e, in tale scrittura $dy = f'(x)dx$, potremo interpretare indifferentemente il simbolo dx come indicante:

- un piccolo incremento di x;
- oppure il differenziale (a sua volta) della funzione identica $y = x$.

Ho capito bene?

Prof :
Hai capito MOLTO bene.
Ora ti faccio un'anticipazione veloce di una questione un po' delicata.
All'Università ti sarà probabilmente richiesto di tener presente il seguente fatto:

> Il differenziale, scritto nella forma $dy = f'(x)dx$,
> è formalmente invariante se si passa a considerare la variabile indipendente
> come funzione, a sua volta, di un'altra variabile"
> (**Principio di Invarianza del Differenziale**).

Pierino: ??????

Prof :
Sia $f: x \to y$.
Allora

$$\textit{differenziale di } f = dy = f'(x)dx.$$

Bene.
Se ora pensiamo x non più come variabile indipendente, ma come funzione di un'altra variabile, diciamo t, avremo:

$$x = x(t) = \varphi(t)$$

$$t \xrightarrow{\varphi} x \xrightarrow{f} y$$

e quindi avremo una funzione composta:

$$y = y(x) = f\left(\varphi(t)\right) = F(t)$$

Quale sarà il differenziale di questa funzione y, che ora è vista come funzione di t anziché di x?

Vediamo: $dy = F'(t)dt = f'(x)\cdot\varphi'(t)dt = f'(x)\cdot[\varphi'(t)dt] = f'(x)dx$ in quanto $dx = \varphi'(t)dt$

In definitiva: $dy = f'(x)\cdot dx$ anche se x è, a sua volta, una funzione. Il nostro asserto è dimostrato.

Pierino: Cosa mi può dire, per terminare, riguardo alla scrittura $y' = \dfrac{dy}{dx}$?

In questo caso, dy e dx hanno il significato di "piccoli incrementi" e non di differenziali, giusto?

Infatti abbiamo imparato che $\dfrac{dy}{dx}$ sta per "$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx (e quindi anche Δy) è piccolissimo" …

cioè, il simbolo $\dfrac{dy}{dx}$ è un simbolo agile per "vedere" la derivata come limite del rapporto incrementale,

al tendere dell'incremento a zero … Dico bene?

Prof : $\dfrac{dy}{dx}$, notazione introdotta da LEIBNIZ, ha proprio il significato che hai ricordato tu.
D'altra parte, se anche interpretassimo questo simbolo come rapporto fra due DIFFERENZIALI anziché come rapporto fra due INCREMENTI INFINITESIMI, non sbaglieremmo.
Osserva infatti che si può scrivere, banalmente,

$$f'(x) = \frac{f'(x)dx}{dx} = \frac{dy}{dx}$$ interpretando tutte le d come indicatori di "differenziale".

In questo senso

> **si può anche dire, volendo, che la derivata è uguale ad un rapporto di due differenziali**
> (il differenziale della funzione che si sta derivando,
> fratto il differenziale della variabile rispetto a cui si deriva).

14. Integrazione per SOSTITUZIONE
(vale a dire, “tramite una posizione”, “tramite un cambiamento di variabile”)

La tecnica di integrazione per sostituzione
consiste in una serie di passaggi “meccanici”, “formali”,
la cui correttezza ai fini della determinazione della famiglia delle primitive
si può constatare dagli esempi,
e si potrebbe dimostrare in termini generali.

Serviamoci dapprima di un caso particolare per illustrare il procedimento.

$$\boxed{\mathrm{I}=\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}}$$

Poniamo $\boxed{\sqrt{x+1}=y}$.

Avremo $\boxed{x+1=y^2}$

da cui $\boxed{x=y^2-1}$.

Differenziando ora i due membri dell’ultima equazione ottenuta, otteniamo

$$\boxed{dx=2y\cdot dy}$$

e **sostituendo** nell’integrale proposto:

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}=\int\frac{2\cancel{y}\,dy}{(y^2-1-3)\,\cancel{y}}=\int\frac{2\,dy}{\underbrace{y^2-4}_{(y+2)(y-2)}}$$

da risolversi “spezzando” la frazione:

$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{A}{y+2}+\frac{B}{y-2}$$
$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{A(y-2)+B(y+2)}{(y+2)(y-2)}$$
$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{Ay-2A+By+2B}{(y+2)(y-2)}$$
$$\frac{2}{(y+2)(y-2)}=\frac{(A+B)y+(-2A+2B)}{(y+2)(y-2)}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-2A+2B=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-A+B=1\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}(1)+(2)\\(1)-(2)\end{array}\begin{cases}2B=1\to B=1/2\\2A=-1\to A=-1/2\end{cases}$$

$$\frac{2}{y^2-4}=\frac{-\frac{1}{2}}{y+2}+\frac{\frac{1}{2}}{y-2}$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{2}{y^2-4}dy=$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{2}}{y+2}dy+\int\frac{\frac{1}{2}}{y-2}dy=-\frac{1}{2}\ln|y+2|+\frac{1}{2}\ln|y-2|+c=-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+1}+2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+1}-2\right|+c$$

La procedura di integrazione per sostituzione si può descrivere come segue:

I. **individuo, nella funzione integranda, l'espressione da sostituire e pongo** $\alpha(x) = y$;
II. **isolo x, invertendo**: $x = \alpha^{-1}(y) = \beta(y)$;
III. **differenzio**: $dx = \beta'(y)\,dy$;
IV. **sostituisco nell'integrale**: al posto di x, ci metto $\beta(y)$, e al posto di dx metterò $\beta'(y)\,dy$;
V. **integro nella variabile y e infine risostituisco**, al posto di y, l'espressione $\alpha(x)$.

A volte, il metodo viene applicato saltando, in pratica, il punto I):
si pone subito $x = \beta(y)$ o $x = \beta(t)$ … essendo β una funzione scelta, ovviamente, in modo che l'integrale in y così ottenuto sia poi risolubile.

Un esempio di questa variante del metodo di sostituzione è l'integrale notevole seguente.

UN INTEGRALE NOTEVOLE RISOLTO PER SOSTITUZIONE

$$\boxed{\mathrm{I} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,,\ \ a > 0}$$

$x = a\,sen\,t$
$dx = a\cos t\,dt$

$$\mathrm{I} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 sen^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a\int \sqrt{a^2(1 - sen^2 t)}\cdot \cos t\,dt =$$

$$= a\int a\sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt \overset{\text{NOTA}}{=} a^2\int \cos t\cdot\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen\,2t\right) + c = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\cancel{2}\,sen\,t\cos t\right) + c = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}sen\,t\cos t\right) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + sen\,t\cos t) + c$$

Per sapere ora cosa va sostituito al posto di t,
occorre risolvere la $x = a\,sen\,t$ rispetto a t:

$$x = a\,sen\,t;\ \ sen\,t = \frac{x}{a};\ \ t = arc\,sen\frac{x}{a}\ \ \text{da cui}\ \ \cos t = \sqrt{1 - sen^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

In definitiva:

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}(t + sen\,t\cos t) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(arc\,sen\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}arc\,sen\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

NOTA

A dire il vero, sarebbe $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$.
Ma ai nostri scopi possiamo omettere il valore assoluto:
infatti il nostro obiettivo è di effettuare passaggi formali che ci portino ad una primitiva, ad una funzione la cui derivata sia uguale alla funzione integranda iniziale:
tanto vale allora proseguire i calcoli sotto le ipotesi più favorevoli
(in questo caso, ad esempio, supponendo $\cos x \ge 0$),
salvo poi verificare se la funzione ottenuta farà effettivamente da primitiva alla funzione integranda proposta,
su tutto l'insieme di definizione di questa.
Anche più avanti nel procedimento di determinazione del presente integrale,
ci concediamo altre licenze dello stesso tipo, che il lettore attento non mancherà di notare.

15. ESERCIZI

SULL'INTEGRAZIONE PER PARTI

1) $\int x\cos x\,dx$ 2) $\int x e^x\,dx$ 3) $\int x\ln x\,dx$ 4) $\int x^3\ln x\,dx$ 5) $\int arctg\,x\,dx$

6) $\int x^2\,arctg\,x\,dx$ 7) $\int x^2 e^{3x}\,dx$ 8) $\int \ln^2 x\,dx$ 9) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Col "circolo vizioso apparente":

10) $\int e^x\,sen\,x\,dx$

11) $\int e^{2x}\cos x\,dx$

12) $\int e^{-x}\cos 3x\,dx$

SULL'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

(per questi esercizi più impegnativi, nelle "risposte" sono riportati gli svolgimenti completi)

13) Fai vedere che $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = 2\,arctg\sqrt{x-1}+c$, con la sostituzione $\sqrt{x-1}=t$

14) Fai vedere che $\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{(x-1)(6x+4)}{15}\sqrt{x-1}+c$, con la sostituzione $\sqrt{x-1}=t$

15) Dimostra che $\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\,arc\,sen\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c$, ponendo $x=2\,sen\,t$

16a) Dimostra che $\int\frac{1}{x(\ln x+2)}\,dx = \ln\left|\ln x+2\right|+c$, con la sostituzione $x=e^t$

16b) L'integrale precedente avrebbe potuto essere ricavato anche senza sostituzioni: in che modo?

17) Mostra che $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+c$, ponendo $\sqrt{x+1}=t$

18) Ricava l'uguaglianza $\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -x-2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+c$ tramite la sostituzione $\sqrt{x}=t$

19) Ponendo $x=sen\,t$ ricava l'uguaglianza $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = arc\,sen\,x+\sqrt{1-x^2}+c$

20a) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3}+c$ con la sostituzione $\sqrt{1+x^2}=t$

20b) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3}+c$ senza alcuna sostituzione

21) Il laborioso integrale $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = arctg\,x+\frac{x}{1+x^2}+c$ può essere ricavato in due modi:

a) con la sostituzione $x=tg\,t$

b) coi passaggi $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)dx = arctg\,x-\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

eseguendo l'ultimo integrale per parti: $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int\frac{1}{2}x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \dots$

Provaci!

RISPOSTE

1) $x\,sen\,x+\cos x+c$ 2) xe^x-e^x+c 3) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$

4) $\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+c$ 5) $x\,arctg\,x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$ 6) $\frac{x^3}{3}arctg\,x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)+c$

7) $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+c$ 8) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$ 9) $\frac{2(x+1)(3x-2)}{15}\sqrt{x+1}+c$

10) $\frac{e^x\left(sen\,x-\cos x\right)}{2}+c$ 11) $\frac{e^{2x}\left(2\cos x+sen\,x\right)}{5}+c$ 12) $\frac{e^{-x}\left(3sen\,3x-\cos 3x\right)}{10}+c$

13)

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$\sqrt{x-1}=t$$

$$x-1=t^2\rightarrow x=1+t^2$$

$$dx=2t\,dt$$

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx=\int\frac{1}{\left(1+t^2\right)\cdot\cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt=\int\frac{2}{1+t^2}dt=2\,arctg\,t+c=2\,arctg\sqrt{x-1}+c$$

14)

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

$$\sqrt{x-1}=t$$

$$x-1=t^2$$

$$x=1+t^2$$

$$dx=2t\,dt$$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int\left(1+t^2\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int\left(2t^2+2t^4\right)dt=$$

$$=2\cdot\frac{t^3}{3}+2\cdot\frac{t^5}{5}+c=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+c=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+c=$$

$$=(x-1)\sqrt{x-1}\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{5}(x-1)\right]+c=$$

$$=(x-1)\sqrt{x-1}\cdot\frac{10+6x-6}{15}+c=\frac{(x-1)(6x+4)}{15}\sqrt{x-1}+c$$

15)

$$\int\sqrt{4-x^2}dx$$

$$x=2sent\rightarrow sent=\frac{x}{2},\ t=arc\,sen\frac{x}{2};\quad \cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$dx=2\cos t\,dt$$

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\sqrt{4-4sen^2t}\cdot 2\cos t\,dt=\int\sqrt{4\left(1-sen^2t\right)}\cdot 2\cos t\,dt=\int 2\sqrt{1-sen^2t}\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$=\int 2\sqrt{\cos^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$=\int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=\int 4\cos^2 t\,dt=4\cdot\frac{t+sent\cos t}{2}+c=$$

$$=2t+2sent\cos t+c=2\,arc\,sen\frac{x}{2}+\cancel{2}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+c=2\,arc\,sen\frac{x}{2}+x\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}+c=2\,arc\,sen\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+c$$

16a)
$$\int \frac{1}{x(\ln x+2)}dx$$
$$\ln x = t \rightarrow x = e^t$$
$$dx = e^t\, dt$$
$$\int \frac{1}{x(\ln x+2)}dx = \int \frac{1}{\cancel{e^t}\,(t+2)} \cdot \cancel{e^t}\, dt =$$
$$= \ln|t+2| + c = \ln|\ln x + 2| + c$$

16b)
$$\int \frac{1}{\ln x+2} \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\,dx$$
$$\ln f(x) + c$$

17)
$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx \qquad \sqrt{x+1} = t; \qquad x+1 = t^2; \qquad x = t^2-1; \qquad dx = 2t\,dt$$
$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx = \int \frac{t}{t^2-1} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = 2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2t + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + c = 2\sqrt{x+1} + \ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| - \ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + c = 2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c$$

18)
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx \qquad \sqrt{x} = t; \qquad x = t^2; \qquad dx = 2t\,dt$$
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx = \int \frac{t}{1-t} \cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^2}{1-t}dt = -2\int \frac{t^2}{t-1}dt = -2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = -2\int\left(\frac{(t+1)\,\cancel{(t-1)}}{\cancel{t-1}} + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$
$$= -2\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + c = -2\left(\frac{x}{2} + \sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}-1\right|\right) + c = -x - 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + c$$

19)
$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$
$$x = sen\,t \rightarrow t = arc\,sen\,x, \quad dx = cos\,t\,dt$$
$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1-sen\,t}{1+sen\,t}}\,cos\,t\,dt = \int \sqrt{\frac{(1-sen\,t)^2}{(1+sen\,t)(1-sen\,t)}}\,cos\,t\,dt = \int \frac{1-sen\,t}{\sqrt{1-sen^2 t}}\,cos\,t\,dt =$$
$$= \int \frac{1-sen\,t}{\sqrt{cos^2 t}}\,cos\,t\,dt = \int \frac{1-sen\,t}{\cancel{cos\,t}}\,\cancel{cos\,t}\,dt = t + cos\,t + c = arc\,sen\,x + cos(arc\,sen\,x) + c = arc\,sen\,x + \sqrt{1-x^2} + c$$

20a)
$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$$
$$\sqrt{1+x^2} = t$$
$$1+x^2 = t^2$$
$$x^2 = t^2-1 \rightarrow x = \sqrt{t^2-1}$$
$$dx = \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2-1}}dt$$
$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \cancel{\sqrt{t^2-1}} \cdot t \cdot \frac{t}{\cancel{\sqrt{t^2-1}}}dt =$$
$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{3} + c = \frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3} + c$$

20b)
$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$
$$\frac{1}{2}\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int f'(x)[f(x)]^{\frac{1}{2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{[f(x)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$
$$= \frac{1}{3}[f(x)]^{\frac{3}{2}} + c$$

21a)

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$x = tg\,t = \frac{sent}{cos\,t} = \frac{sent}{\sqrt{1-sen^2 t}}$$

$$x^2 = \frac{sen^2 t}{1-sen^2 t};\quad x^2 - x^2 sen^2 t = sen^2 t;\ x^2 = x^2 sen^2 t + sen^2 t;\ x^2 = sen^2 t\left(x^2+1\right);$$

$$sen^2 t = \frac{x^2}{1+x^2};\ sent = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = \frac{1}{cos^2 t}dt$$

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left(1+tg^2 t\right)^2}\cdot\frac{1}{cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\left(1+\frac{sen^2 t}{cos^2 t}\right)^2}\cdot\frac{1}{cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\left(\frac{cos^2 t + sen^2 t}{cos^2 t}\right)^2}\cdot\frac{1}{cos^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{cos^2 t}\right)^2}\cdot\frac{1}{cos^2 t}dt = \int cos^4 t\cdot\frac{1}{cos^2 t}dt = \int cos^2 t\,dt = \frac{t + sent\,cos\,t}{2} + c = \frac{arctg\,x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}{2} + c =$$

$$= \frac{arctg\,x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}{2} + c = \frac{arctg\,x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}{2} + c = \frac{arctg\,x + \frac{x}{1+x^2}}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(arctg\,x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c$$

21b)

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right]dx = arctg\,x - \int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \frac{1}{2}x\cdot\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right) - \int\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot 1dx\right] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}arctg\,x + c$$

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx = arctg\,x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}arctg\,x + c = \frac{1}{2}arctg\,x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + c$$