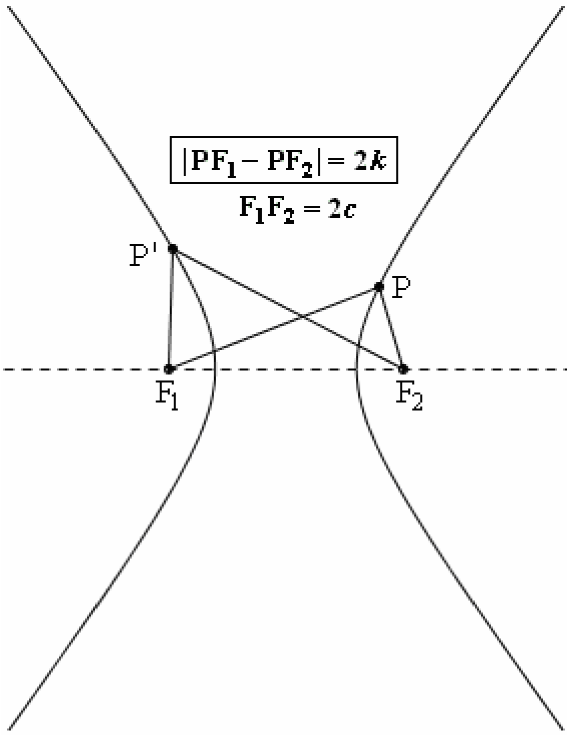
31. L’IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

DEFINIZIONE DI IPERBOLE

Si dice “iperbole” il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi, detti “fuochi”:

$$|\mathbf{PF_1} - \mathbf{PF_2}| = \textit{costante}$$

Indicheremo la differenza costante con $2k$, e la distanza fra i due fuochi (= distanza focale) con $\mathbf{2c}$.



Si osserva che la curva è distribuita su **due “rami” distinti**:

- il ramo costituito dai punti P per i quali $PF_1 - PF_2 = 2k$
- il ramo costituito dai punti P per i quali $PF_2 - PF_1 = 2k$

Con riferimento alla figura,
ricordando che in un triangolo la differenza fra due lati
è sempre minore del terzo lato, avremo

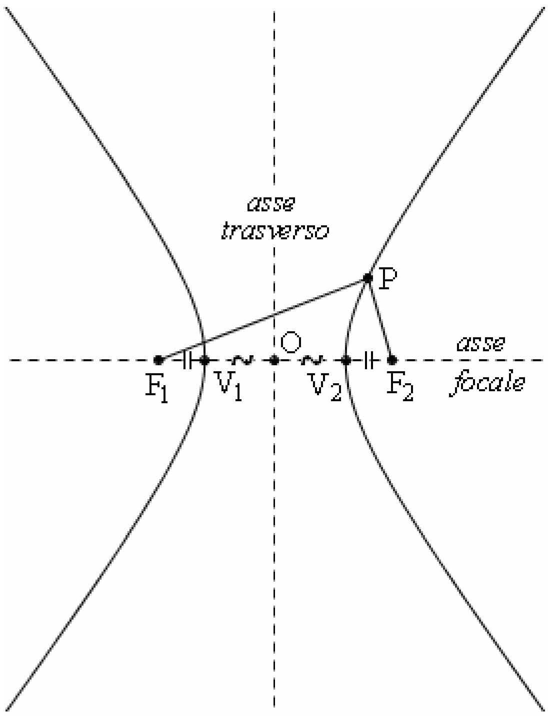
$$2k = |PF_1 - PF_2| < F_1F_2 = 2c\,.$$

- Se scegliessimo $2k > 2c$,
  il luogo dei punti P per cui $|PF_1 - PF_2| = 2k$
  sarebbe vuoto;
- se poi prendessimo $2k = 2c$,
  il luogo degenererebbe in … dillo tu!

Insomma: **dovrà essere $2k < 2c$ $(k < c)$**
affinché il luogo non sia né vuoto, né degenere.

Si intuisce, si constata da buoni disegni,
e si potrebbe facilmente dimostrare,
che un’iperbole è dotata di **due assi di simmetria**:

- la retta passante per i due fuochi (detta “asse focale”)
- e l’asse del segmento che ha per estremi i due fuochi (“asse trasverso”).



La curva possiede pure un **centro di simmetria**
(detto, per brevità, semplicemente “**il centro**” dell’iperbole):
esso è l’intersezione O fra l’asse focale e l’asse trasverso,
ossia il punto medio del segmento che ha per estremi i fuochi.

Si dicono “**vertici**” dell’iperbole,
i punti di intersezione della curva con l’asse focale.

E’ facile dimostrare che, in un’iperbole,
la distanza tra i vertici è uguale alla “costante dell’iperbole”
(ossia alla differenza costante di cui parla la definizione,
quella che abbiamo indicato con $2k$).

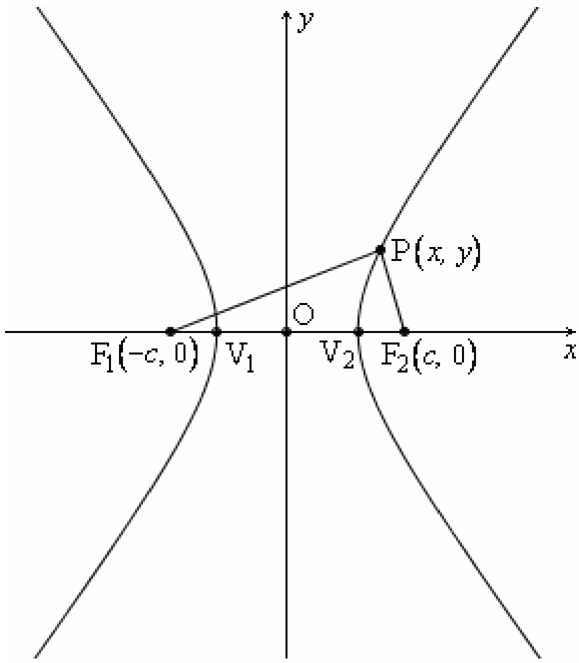
Con riferimento alla figura qui a fianco, infatti,
poiché per ogni punto P *del ramo destro dell’iperbole si ha*

$$PF_1 - PF_2 = 2k$$

ed essendo V_2 *un punto del ramo destro dell’iperbole,*
sarà pure $V_2F_1 - V_2F_2 = 2k$
quindi $V_1V_2 \cancel{+V_1F_1} \cancel{-V_2F_2} = 2k$
dove nel semplificare abbiamo tenuto conto che è
$V_1F_1 = V_2F_2$ *per motivi di simmetria.*

L'EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

Per semplicità, supporremo inizialmente che gli assi del riferimento cartesiano coincidano con gli assi di simmetria dell'iperbole.
In queste condizioni,
si **parlerà di "iperbole riferita ai suoi assi"**,
o anche di "iperbole in posizione canonica"
(brevemente: "**iperbole canonica**").



Se l'iperbole è in posizione canonica,
il centro di simmetria dell'iperbole coinciderà con l'origine e i fuochi staranno o sull'asse x, o sull'asse y.
In ciascuno dei due casi,
l'origine sarà il punto medio del segmento F_1F_2.

Supponiamo dapprima che i fuochi stiano sull'asse x.
In questo caso,
al posto di indicare la "differenza costante" con $2k$,
la indicheremo con $2a$
(questa scelta è dettata da motivi di opportunità
che lo studente comprenderà a posteriori).

Avremo dunque:

$F_1(-c,0);\ F_2(c,0)\ \ P(x,y)$

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

Questa equazione equivale a $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$

ossia $PF_1 - PF_2 = 2a \ \vee\ PF_1 - PF_2 = -2a\ \ (PF_2 - PF_1 = 2a)$.

Perciò se $P(x,y)$ appartiene alla curva si avrà $\boxed{PF_1 - PF_2 = \pm 2a}$ da cui seguono le uguaglianze

$$(*)\qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2cx \cancel{+c^2} \cancel{+y^2} = 4a^2 \cancel{+x^2} - 2cx \cancel{+c^2} \cancel{+y^2} \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$\pm a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = cx - a^2$$

$$a^2x^2 \cancel{-2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 \cancel{-2a^2cx} + a^4$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Essendo ora $2k < 2c\ \ (k < c)$ sarà anche $a = k < c$, quindi $a^2 < c^2$, e dunque $a^2 - c^2 < 0$.

Converrà perciò cambiare i segni di tutti i termini, ottenendo

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

Poiché si ha $c^2 - a^2 > 0$, potremo porre $c^2 - a^2 = b^2$, e la nostra equazione diventerà $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Dividendo ora per a^2b^2 otterremo:

$$(**)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ \ (b^2 = c^2 - a^2)$$

Abbiamo fin qui fatto vedere che, se un punto $P(x,y)$ appartiene all'iperbole di fuochi $F_1(-c,0);\ F_2(c,0)$ e costante $2a$, allora le coordinate (x,y) di P verificheranno l'equazione $(**)$.

Si può poi dimostrare che vale anche il *viceversa*, ossia che, se un punto (x,y) è tale che le sue coordinate verifichino la $(**)$, allora (x,y) appartiene all'iperbole di fuochi $F_1(-c,0);\ F_2(c,0)$ e costante $2a$.

Resta così stabilito che
l'iperbole di fuochi $F_1(-c,0);\ F_2(c,0)$ e costante $2a$ ha equazione

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ \ (b^2 = c^2 - a^2)}$$

E se i fuochi stessero sull'asse *y*?

In questo caso,
al posto di indicare la "differenza costante" con $2k$,
la indicheremo con $2b$ e, fatti i calcoli, otterremo

$$b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=b^2(b^2-c^2)$$

Essendo ora $2k<2c$ $(k<c)$ sarà anche

$$b=k<c,\ \ b^2<c^2,\ \ b^2-c^2<0$$

Cambieremo perciò i segni di tutti i termini:

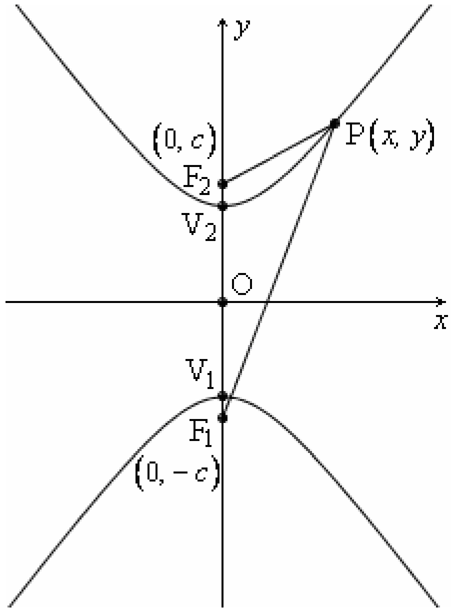
$$-b^2x^2+(c^2-b^2)y^2=b^2(c^2-b^2)$$

Grazie alla positività di c^2-b^2,
potremo porre $c^2-b^2=a^2$, ottenendo

$$-b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;\quad b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$$

Dividendo infine per a^2b^2 l'equazione assumerà la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\quad (c^2-b^2=a^2)$$



Ricapitoliamo:

Considerata un'iperbole canonica
coi FUOCHI SULL'ASSE *x*,
se si indica con $2c$ la sua distanza focale
e con $2a$ la sua costante, la sua equazione è

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad (b^2=c^2-a^2)$$

Considerata un'iperbole canonica
coi FUOCHI SULL'ASSE *y*,
se si indica con $2c$ la sua distanza focale
e con $2b$ la sua costante, la sua equazione è

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\quad (a^2=c^2-b^2)$$

Si capisce a questo punto che la scelta di indicare la costante dell'iperbole
(= la differenza costante di cui parla la definizione)

- con $2a$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse *x*,
- con $2b$ anziché con $2k$ quando i fuochi stanno sull'asse *y*,

è motivata dal fatto che, in questo modo, si ottengono, nei due casi, due equazioni con ugual primo membro.

Occhio però:

- quando i fuochi stanno sull'asse *x*, il secondo membro è +1,
- mentre quando i fuochi stanno sull'asse *y*, il secondo membro è –1.

In definitiva, un'iperbole canonica ha sempre equazione della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ e precisamente:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **se i fuochi sono in orizzontale (in questo caso, la costante è $2a$)**

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ **se i fuochi sono in verticale (in questo caso, la costante è $2b$)**

Ora ci domandiamo:

- **data un'equazione della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, essa rappresenterà sempre un'iperbole coi fuochi in orizzontale, qualunque siano i valori dei due parametri *a*, *b* ?**
  La risposta è affermativa.
  Infatti: posto $c^2=a^2+b^2$, se andiamo a ricavare l'equazione dell'iperbole di fuochi $(\pm c,0)$ e costante $2a$,
  otterremo proprio $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

- **E data un'equazione della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, essa rappresenterà sempre un'iperbole coi fuochi in verticale, qualunque siano i valori dei due parametri *a*, *b* ?**
  La risposta è affermativa.
  Infatti: posto $c^2=a^2+b^2$, se andiamo a ricavare l'equazione dell'iperbole di fuochi $(0,\pm c)$ e costante $2b$,
  otterremo proprio $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

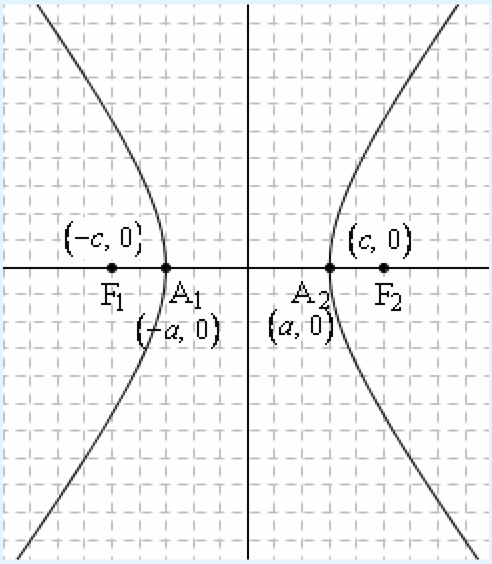
RIASSUNTO DEL RIASSUNTO SULL'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

Caso dei fuochi in orizzontale:

$$\left|PF_1 - PF_2\right| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{con } b^2 = c^2 - a^2 \;\rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2$$

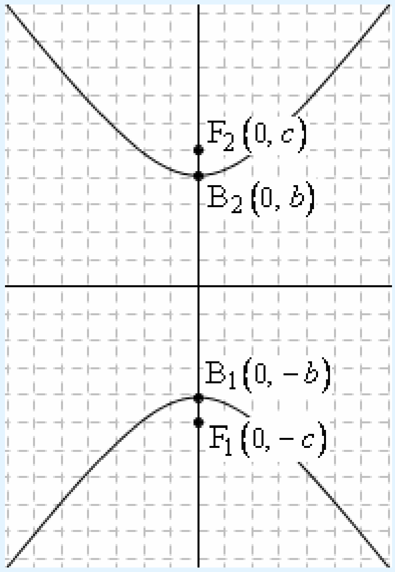


Caso dei fuochi in verticale:

$$\left|PF_1 - PF_2\right| = 2b$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$\text{con } a^2 = c^2 - b^2 \;\rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2$$



- **Se è data un'equazione della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$,**
  noi sappiamo che essa rappresenta un'iperbole "in posizione canonica",
  nel senso che gli assi di simmetria della curva coincidono con gli assi cartesiani.

  Pertanto, se prendiamo l'equazione data e la poniamo a sistema
  prima con l'equazione dell'asse x ($y = 0$)
  e poi con l'equazione dell'asse y ($x = 0$),
  otterremo che uno degli assi cartesiani viene intersecato dalla curva, l'altro no.

  L'asse che viene intersecato dalla curva, ne è l'asse focale;
  i punti di intersezione trovati sono i vertici dell'iperbole.

  E' poi sempre utilissimo ricordare che la costante dell'iperbole (NOTA)
  è sempre uguale alla distanza tra i due vertici.

  NOTA:
  Per "costante dell'iperbole" intendiamo la differenza costante di cui parla la definizione,
  quella che avevamo in generale indicato con $2k$, e che per l'iperbole canonica abbiamo preferito indicare con $2a$ nel caso i fuochi fossero in orizzontale, con $2b$ per fuochi in verticale

  Sia quando l'equazione è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sia quando è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, vale la relazione $c^2 = a^2 + b^2$
  che permette di ricavare la semidistanza focale c (e quindi le coordinate dei fuochi),
  a partire dai due parametri a, b.

- Inversamente, **quando un problema mi parla di un' iperbole "canonica"**,
  devo pensare ad un'iperbole "riferita ai suoi assi", cioè ad un'iperbole collocata
  in un sistema di riferimento i cui assi cartesiani coincidano con gli assi di simmetria dell'iperbole.

  So che **l'equazione sarà della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$**,

  e precisamente: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se i fuochi sono in orizzontale, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ se i fuochi sono in verticale.

  Si tratterà di determinare i valori delle due costanti a, b (o direttamente: a^2, b^2),
  sfruttando due opportune condizioni che il problema mi fornirà.

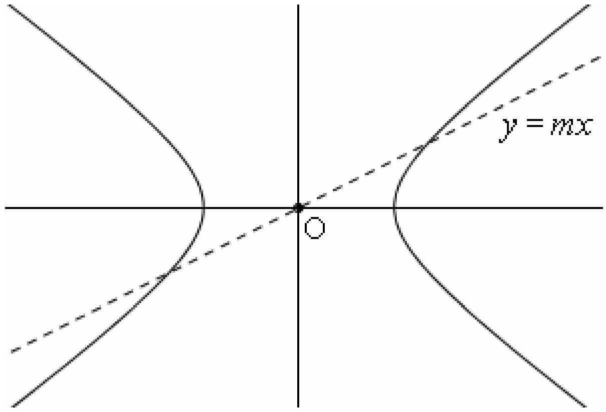
GLI "ASINTOTI" DI UNA CURVA

Avrai notato che, quando ci si allontana dai fuochi,
l'iperbole tende ad attenuare la sua curvatura, assumendo un andamento quasi rettilineo.
In effetti si può dimostrare che esistono due rette, dette "gli asintoti" dell'iperbole,
alle quali la curva si avvicina sempre più, man mano che ci si allontana dai fuochi.
Per darti un'idea preliminare, seppure sommaria, di cosa si intenda, in Matematica, per "asintoto", ti dirò che

**si parla di "asintoto" ogniqualvolta si è in presenza di una retta,
alla quale una curva si avvicina "indefinitamente", si avvicina "di tanto quanto noi vogliamo",
quando il punto sulla curva viene fatto "allontanare indefinitamente", viene fatto "tendere all'infinito".**

L'IPERBOLE POSSIEDE DUE ASINTOTI !

E' possibile dimostrare che un'iperbole è una curva dotata di due asintoti.
A tale scopo, pensiamo l'iperbole collocata in un riferimento cartesiano,
con gli assi scelti in modo da coincidere con gli assi di simmetria dell'iperbole (posizione canonica).
Supponiamo inoltre che i fuochi stiano sull'asse x.



L'equazione della curva sarà allora $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
e il grafico si presenterà come nella figura qui a fianco.
Nella stessa figura è rappresentata anche
una retta per l'origine, di equazione $y = mx$.
Poniamo a sistema tale equazione
con l'equazione dell'iperbole: avremo

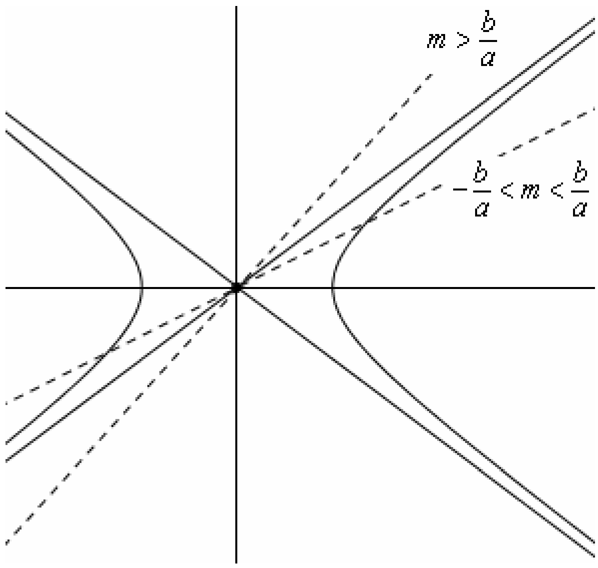
(1) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y = mx \end{cases}$

L'equazione risolvente del sistema è
(2) $\left(b^2-a^2m^2\right)x^2=a^2b^2$
che diventa
(3) $x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}$ sotto la condizione $b^2-a^2m^2\neq 0$ ossia $m\neq\pm\frac{b}{a}$.

Quando $m=\pm\frac{b}{a}$
l'equazione (2) non può essere portata sotto la forma (3), e risulta impossibile (= priva di soluzioni);
… ma l'equazione (2) è impossibile pure se il secondo membro della (3) è negativo.
Ora, si ha $\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}<0$ se e solo se $b^2-a^2m^2<0$ $\left(a^2m^2-b^2>0\right)$ ossia $m<-\frac{b}{a} \vee m>\frac{b}{a}$.

In definitiva:
data l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,
una retta $y = mx$

- NON la interseca se è $m\leq-\frac{b}{a} \vee m\geq\frac{b}{a}$;
- invece la interseca quando $-\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a}$.



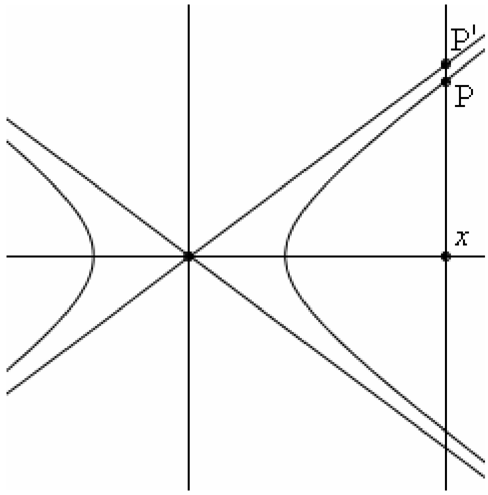
Possiamo anche dire che l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
è tutta contenuta all'interno
della coppia di angoli opposti al vertice
che hanno per lati le due rette $y=-\frac{b}{a}x$ e $y=\frac{b}{a}x$
e sono bisecati dall'asse x.

Le due rette $y=\pm\frac{b}{a}x$ (a tratto continuo nella figura)

sono, fra le rette per l'origine, "le prime a non intersecare l'iperbole" .
Dimostreremo ora che esse fanno da "asintoti obliqui" per l'iperbole,
nel senso sopra specificato: un punto sulla curva "molto lontano" è "vicinissimo" alla retta.

Infatti: esplicitiamo l'equazione della nostra iperbole rispetto a *y*:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2;$$
$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2;$$
$$y^2=\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}\ ;\ \ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$



Noi considereremo innanzitutto quella parte della nostra iperbole, che cade nel primo quadrante, cioè quella parte di iperbole che è individuata dal sistema $\begin{cases} y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ x>0 \end{cases}$

e faremo vedere che ammette come asintoto obliquo la retta

$$y=\frac{b}{a}x.$$

Detto P il punto di ascissa $x>0$ della curva $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$,

e detto P' il punto, avente la stessa ascissa *x*, della retta $y=\frac{b}{a}x$,

ci proponiamo di far vedere che la differenza $y_{\mathrm{P}'}-y_{\mathrm{P}}$ fra le rispettive ordinate
(corrispondente, nella figura, alla lunghezza del segmento PP'), tende a 0 quando *x* tende all'infinito.

$$y_{\mathrm{P}'}-y_{\mathrm{P}}=\mathrm{PP}'=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$
$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Si ha perciò $y_{\mathrm{P}'}-y_{\mathrm{P}}=\mathrm{PP}'=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$; ma ora, se pensiamo di "far tendere *x* a $+\infty$ "
(vale a dire, se pensiamo di assegnare a *x* valori positivi grandi, *molto* grandi, *arbitrariamente* grandi),
il denominatore di questa frazione si farà grandissimo, mentre il numeratore resta costante,
e quindi il valore della frazione diventerà piccolissimo.

Si esprime questo fatto scrivendo $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{PP}'=\lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0$.

Considerazioni di simmetria ci portano ora a stabilire che ciò che avviene nel 1° quadrante con la retta $y=\frac{b}{a}x$,

avverrà anche nel 3° con la medesima retta, e avverrà pure nel 2° e nel 4°, con la retta $y=-\frac{b}{a}x$.

Abbiamo così provato che le due rette $y=\pm\frac{b}{a}x$ fanno da asintoti obliqui bilaterali

(cioè: sia con $x\to+\infty$ che con $x\to-\infty$) per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Si potrebbe analogamente far vedere che, anche nel caso dei fuochi in verticale (equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$),

le equazioni dei due asintoti sono sempre $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Ricapitolando:

tanto l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ quanto la $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
ammettono come asintoti obliqui bilaterali (cioè: sia "verso destra" che "verso sinistra")
le due rette $y=\pm\frac{b}{a}x$

ECCENTRICITA' DI UN'IPERBOLE

Nell'ellisse, l'eccentricità era un numero, compreso fra 0 e 1,
tanto più grande (= più vicino a 1) quanto più l'ellisse si discostava dalla forma circolare.

Nel caso dell'iperbole, l'eccentricità è invece
un numero maggiore di 1, che è tanto più grande quanto più la "forbice" degli asintoti è divaricata.

Si pone, riguardo all'iperbole, la seguente definizione:

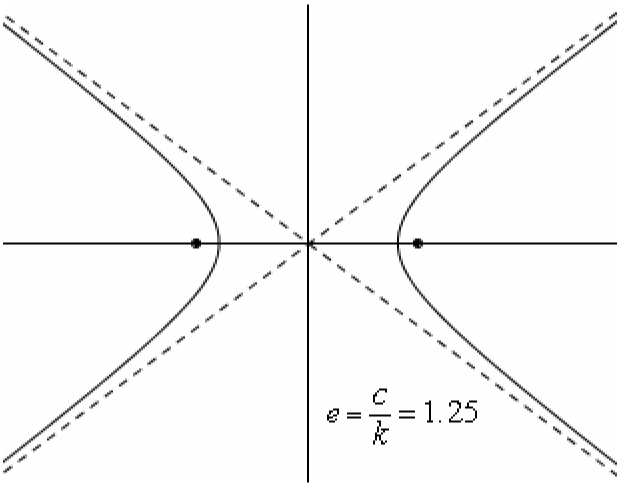
$$e=\frac{\textit{semidistanza focale}}{\textit{semicostante dell'iperbole}}=\frac{\textit{semidistanza focale}}{\textit{semidistanza fra i vertici}}=\frac{c}{k}$$

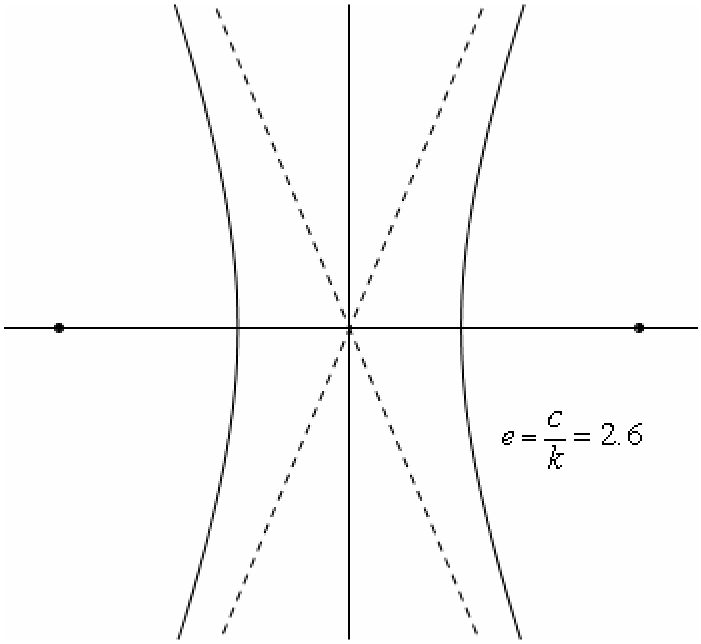
ed **essendo il numeratore maggiore del denominatore** (NOTA)**, sarà certamente $e>1$**.

NOTA: Come sappiamo, la "costante dell'iperbole", ossia la differenza costante di cui parla la definizione, è minore della distanza focale: $2k<2c \;\rightarrow\; k<c$.

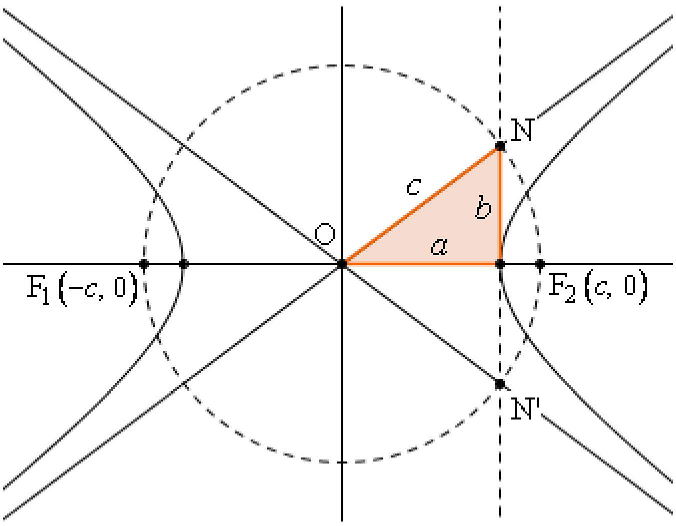
Con riferimento ad un'iperbole canonica, avremo

$$e=\begin{cases}\dfrac{c}{a} & \textit{se i fuochi sono in orizzontale}\\[2mm] \dfrac{c}{b} & \textit{se i fuochi sono in verticale}\end{cases}$$





UNA VISUALIZZAZIONE DELLA RELAZIONE FRA *a, b, c* ;
UN METODO PER DETERMINARE GEOMETRICAMENTE L'INCLINAZIONE DEGLI ASINTOTI



Consideriamo il caso in cui i fuochi siano in orizzontale; un'analoga costruzione si potrebbe effettuare coi fuochi in verticale.

Ricordiamo che $c^2=a^2+b^2$.
Ne consegue che intersecando la circonferenza di centro l'origine e raggio $OF_1=OF_2=c$ con la perpendicolare all'asse x condotta per il vertice $(a,0)$, si ottengono due punti N, N' la cui distanza dall'asse x è un segmento di lunghezza b.
Se a questo punto si tracciano le due rette ON, ON', esse avranno perciò coefficienti angolari b/a e $-b/a$ rispettivamente: saranno dunque gli asintoti dell'iperbole.

ESEMPI DI ESERCIZI SULL'IPERBOLE CANONICA

- ESEMPIO 1 - *Studia e disegna le iperboli canoniche seguenti*: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

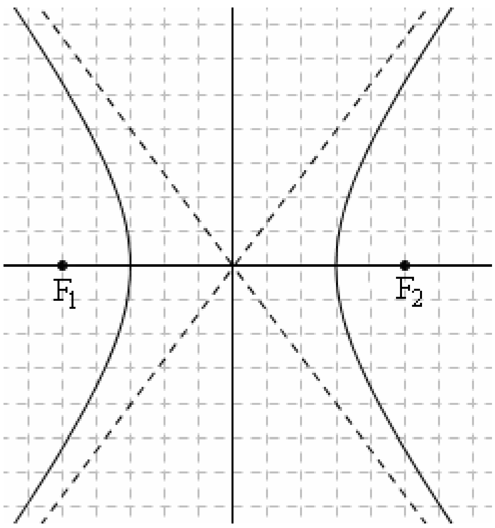
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

$a=3,\ b=4,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$

I fuochi sono in orizzontale perché il 2° membro è $+1$.
Fuochi: $(\pm 5, 0)$. Vertici: $(\pm 3, 0)$.

Asintoti: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$.

Eccentricità: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$



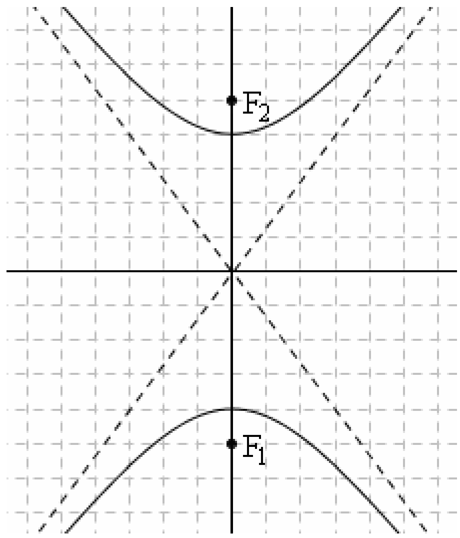
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$$

$a=3,\ b=4,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$

I fuochi sono in verticale perché il 2° membro è -1.
Fuochi: $(0, \pm 5)$. Vertici: $(0, \pm 4)$.

Asintoti: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$.

Eccentricità: $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$



ESEMPIO 2 - *Considera l'iperbole canonica di fuochi* $F_{1,2}=(\pm 13,\ 0)$ *e vertici* $V_{1,2}=(\pm 12,\ 0)$.
Scrivi l'equazione della curva, e determinane gli asintoti e l'eccentricità. Disegno.

I fuochi sono in orizzontale, quindi equazione è della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Abbiamo $c=13$ e $a=12$.

Ricordando che $c^2=a^2+b^2$, si ricava $b^2=25 \to b=5$. L'equazione è perciò $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

Gli asintoti hanno equazioni: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{5}{12}x$. L'eccentricità vale $e=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}$.

ESEMPIO 3 - *Studia e disegna l'iperbole canonica, avente i fuochi sull'asse y, semidistanza focale* 2, *e passante per* $W(1,1)$.

L'equazione, poiché i fuochi sono in verticale, è della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

La condizione di appartenenza del punto W fornisce $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=-1$; si ha poi $a^2+b^2=c^2=4$.

Ponendo a sistema le due condizioni si trova: $a^2=1+\sqrt{5};\ b^2=3-\sqrt{5}$,

per cui l'equazione è $\frac{x^2}{1+\sqrt{5}}-\frac{y^2}{3-\sqrt{5}}=-1$.

Asintoti: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}x=\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\,x=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot x\approx\pm 0{,}49x$

Eccentricità: $e=\frac{c}{b}=\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{3+\sqrt{5}}\approx 2{,}29$

ESEMPIO 4 - *Scrivi l'equazione dell'iperbole canonica coi fuochi sull'asse x, tangente alla retta di equazione* $3x-4y=2$ *e passante per il punto* $\mathrm{A}\left(4,\sqrt{6}\right)$.

L'equazione, poiché i fuochi sono sull'asse *x*, sarà della forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Occorre ora porre 2 condizioni per determinare i valori dei 2 parametri *a*, *b*.

La 1ª condizione può essere il passaggio per il punto $\mathrm{A}\left(4,\sqrt{6}\right)$, che ci fornisce $\frac{16}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1$.

La 2ª condizione è la tangenza rispetto alla retta $3x-4y=2$.

Dovremo mettere a sistema l'equazione dell'iperbole con l'equazione della retta, per poi, nell'equazione risolvente del sistema stesso, porre $\Delta=0$.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ 3x-4y=2\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\frac{3x-2}{4}\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{3x-2}{4}\right)^2}{b^2}=1\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{9x^2-12x+4}{16b^2}=1\qquad 16b^2x^2-9a^2x^2+12a^2x-4a^2=16a^2b^2$$

$$\left(16b^2-9a^2\right)x^2+12a^2x-4a^2\left(1+4b^2\right)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0\quad 36a^4+4a^2\left(1+4b^2\right)\left(16b^2-9a^2\right)=0$$

Semplificando per $4a^2$: $9a^2+\left(1+4b^2\right)\left(16b^2-9a^2\right)=0$

$$\cancel{9a^2}+16b^2\cancel{-9a^2}+64b^4-36a^2b^2=0\qquad 4+16b^2-9a^2=0\qquad 9a^2-16b^2=4$$

Dunque

$$\begin{cases}\frac{16}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1\\ 9a^2-16b^2=4\end{cases};\quad \begin{cases}16b^2-6a^2=a^2b^2\\ 9a^2-16b^2=4\end{cases};\quad \begin{cases}16b^2-6a^2=a^2b^2\\ a^2=\frac{16b^2+4}{9}\end{cases}$$

$$16b^2-6\cdot\frac{16b^2+4}{9}=\frac{16b^2+4}{9}\cdot b^2$$

$$144b^2-96b^2-24=16b^4+4b^2$$

$$16b^4-44b^2+24=0$$

$$4b^4-11b^2+6=0$$

$$4b^4-8b^2-3b^2+6=0$$

$$4b^2\left(b^2-2\right)-3\left(b^2-2\right)=0$$

$$\left(b^2-2\right)\left(4b^2-3\right)=0\qquad b^2=\left\langle\begin{matrix}2\\ \frac{3}{4}\end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases}b^2=2\\ a^2=\frac{16b^2+4}{9}=\frac{32+4}{9}=\frac{36}{9}=4\end{cases}\quad\vee\quad \begin{cases}b^2=\frac{3}{4}\\ a^2=\frac{16\cdot\frac{3}{4}+4}{9}=\frac{12+4}{9}=\frac{16}{9}\end{cases}$$

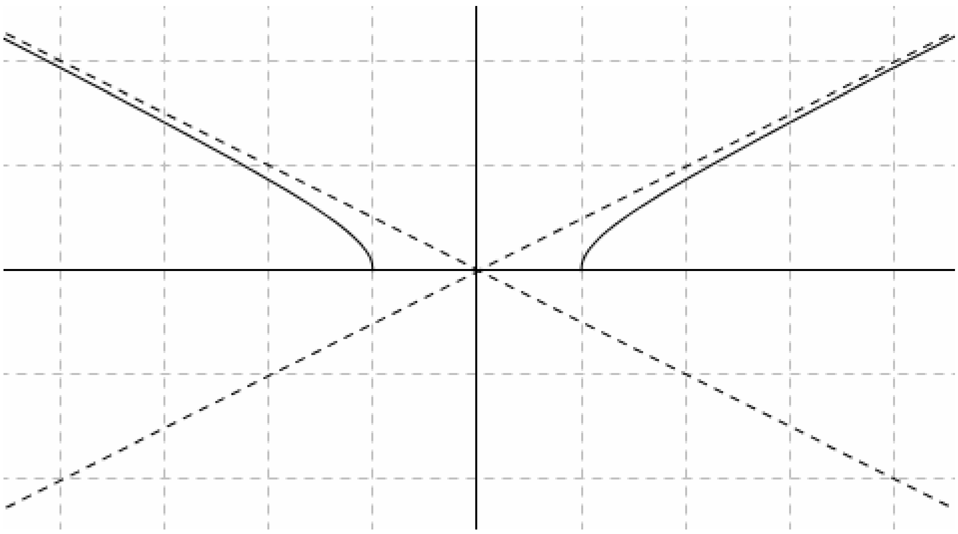
Ci sono pertanto *due* distinte iperboli che risolvono questo problema:

- una ha equazione $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$
- e l'altra ha equazione $\frac{x^2}{\frac{16}{9}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$ o anche $\frac{9}{16}x^2-\frac{4}{3}y^2=1$ o $27x^2-64y^2=48$.

ESEMPIO 5 - *Considera la curva di equazione* $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$.
Determinane le caratteristiche, disegnala,
e scrivi l'equazione della retta che è ad essa tangente nel punto di ascissa -3.

$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$$
$$2y=\sqrt{x^2-1}$$
$$4y^2=x^2-1 \quad \left(\boxed{y\ge 0}\right)$$
$$4y^2-x^2=-1; \qquad x^2-4y^2=1, \qquad x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$

Si tratta perciò della metà superiore ($y\ge 0$) di un'iperbole coi fuochi sull'asse *x*.
I vertici di questa iperbole hanno coordinate $V_{1,2}=(\pm a,\ 0)=(\pm 1,\ 0)$,
i fuochi $F_{1,2}=(\pm c,\ 0)=\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)=\left(\pm\sqrt{1+\frac{1}{4}},\ 0\right)=\left(\pm\sqrt{\frac{5}{4}},\ 0\right)=\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$;
gli asintoti hanno equazioni $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\frac{1}{2}}{1}x=\pm\frac{1}{2}x$,
l'eccentricità è $\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
La figura è la seguente:



Il punto di ascissa -3 ha ordinata $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}=\frac{\sqrt{(-3)^2-1}}{2}=\frac{\sqrt{9-1}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$
ed è dunque $\left(-3,\sqrt{2}\right)$.
Trattandosi di un punto che appartiene alla curva, l'equazione della retta tangente si può scrivere applicando la comoda "REGOLA DEGLI SDOPPIAMENTI", la quale afferma che l'equazione della retta tangente a una curva di 2° grado γ nel suo punto (x_0, y_0) si può ottenere effettuando, nell'equazione $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, le sostituzioni

$$x^2\to x_0x \qquad y^2\to y_0y \qquad xy\to\frac{y_0x+x_0y}{2} \qquad x\to\frac{x_0+x}{2} \qquad y\to\frac{y_0+y}{2}.$$

Nel nostro caso l'equazione è $x^2-4y^2=1$ ed è $(x_0,y_0)=\left(-3,\sqrt{2}\right)$, per cui si avrà
$t:\ -3x-4\cdot\sqrt{2}y=1$ o anche $t:\ 3x+4y\sqrt{2}+1=0$.

IPERBOLE TRASLATA

Se consideriamo un'iperbole, che sia collocata nel piano cartesiano in modo da essere **traslata** rispetto alla posizione canonica, questa iperbole avrà il suo centro di simmetria in un punto $P_0(x_0, y_0)$ anziché nell'origine, ma avrà pur sempre gli assi di simmetria, uno orizzontale e l'altro verticale.

L'equazione di un'iperbole "traslata", di centro (x_0, y_0), è

$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1}$ (+1 se i fuochi sono in orizzontale, -1 se sono in verticale).

- E' chiaro che **l'iperbole traslata "eredita" tutte le caratteristiche dell'iperbole canonica**. In particolare:
  - **la costante dell'iperbole** (= la differenza costante di cui parla la definizione, la quale, è sempre importante ricordarlo, coincide anche con la distanza tra i due vertici) **è $2a$ se i fuochi sono in orizzontale, $2b$ se i fuochi sono in verticale**
  - Vale la relazione $\boxed{c^2=a^2+b^2}$, essendo c la semidistanza focale;
  - I **coefficienti angolari degli asintoti** sono $\boxed{\pm\frac{b}{a}}$.

    Occhio, però: **anche gli asintoti sono traslati**! Essi non si incrociano più nell'origine, bensì nel punto (x_0, y_0) che fa da centro di simmetria per la curva.

    Le equazioni degli asintoti sono perciò $\boxed{y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)}$

ESEMPIO - Scrivi l'equazione dell'iperbole traslata di fuochi $F_1(-1,1)$; $F_2(-1,7)$ e costante 2. Disegna la curva.

$c=3,\ b=1 \rightarrow a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Il centro ha coordinate $(-1, 4)$ e perciò l'equazione è $\frac{(x+1)^2}{8}-(y-4)^2=-1$.

Gli asintoti hanno coeff. ang. $\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\approx\pm 0{,}35$ ed equazioni $y-4=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(x+1)$

DIETRO-FRONT: DALL'EQUAZIONE ALLA CURVA

- Prendendo l'equazione dell'iperbole traslata di centro (x_0, y_0) e liberandola dai denominatori, si ottiene un'equazione dalla forma: $\boxed{mx^2+ny^2+px+qy+r=0}$ con ***m* ed *n* DISCORDI**.
- Viceversa, un'equazione che si presenta sotto la forma $mx^2+ny^2+px+qy+r=0$ con m, n DISCORDI, può essere SEMPRE ricondotta, col "**metodo del completamento dei quadrati**", ad una delle tre forme

  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=+1;\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1;\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0$

  e quindi rappresenta SEMPRE:
  - un'iperbole traslata (coi fuochi che potranno essere in orizzontale, o in verticale);
  - oppure, qualora il secondo membro risulti essere 0, una coppia di rette.

  In quest'ultimo caso si pensa ad una **iperbole degenere nei suoi asintoti.**

  NOTA
  Ricorderai che un'equazione della stessa forma $mx^2+ny^2+px+qy+r=0$, ma con m, n CONCORDI, poteva rappresentare, a seconda dei casi, un'ellisse, oppure un luogo puntiforme, oppure il luogo vuoto.

ESEMPIO - *Studiare la curva di equazione* $x^2-4y^2+24y-32=0$

L'equazione è di 2° grado in x, y, e manca del "termine rettangolare";
i coefficienti di x^2, y^2 sono discordi;
essa rappresenterà allora un'iperbole traslata, eventualmente degenere nei suoi asintoti.
Avremo:

$x^2-4(y^2-6y)-32=0;\quad x^2-4(y^2-6y+9-9)-32=0;\quad x^2-4(y-3)^2+36-32=0;$

$x^2-4(y-3)^2=-4$ e finalmente $\frac{x^2}{4}-(y-3)^2=-1$: iperbole di centro $C(0,3)$.

Il secondo membro è -1, quindi i fuochi sono in verticale.
$a^2=4,\ b^2=1 \rightarrow c^2=a^2+b^2=5$.
La costante dell'iperbole è $2b=2$.
I fuochi hanno coordinate $(0, 3-\sqrt{5})$; $(0, 3+\sqrt{5})$ e i vertici sono $(0, 2)$; $(0, 4)$.

ESEMPI DI ESERCIZI SULL'IPERBOLE TRASLATA

1) *Scrivi l'equazione del LUOGO dei punti* $\mathrm{P}(x,\ y)$ *del piano cartesiano per i quali è costante, e unitaria, la differenza delle distanze dai due punti* $\mathrm{A}(-2,\ 5)$ *e* $\mathrm{B}(4,\ 5)$.
Si tratta evidentemente di una iperbole; determina il centro, i vertici, gli asintoti, l'eccentricità della curva.

1° MODO

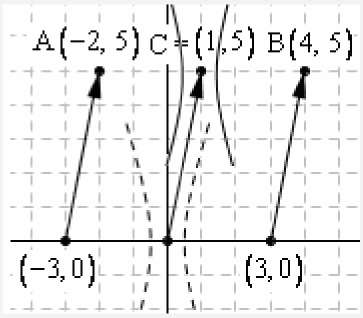
I due fuochi sono in orizzontale, hanno distanza 6, sono simmetrici rispetto al punto $(1,\ 5)$;
possiamo allora pensare di ottenere la nostra iperbole traslando a destra di 1 e in alto di 5
l'iperbole di fuochi orizzontali $(\pm c, 0)=(\pm 3, 0)$ e costante $2k=2a=1$.

Avremo dunque $c=3$ $(c^2=9)$, $a=\frac{1}{2}\left(a^2=\frac{1}{4}\right)$ da cui subito $b^2=c^2-a^2=9-\frac{1}{4}=\frac{35}{4}$.

L'equazione dell'iperbole canonica da cui ricaveremo per traslazione la "nostra" è dunque $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{35}{4}}=1$.

L'iperbole richiesta è in definitiva

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-5)^2}{\frac{35}{4}}=1}$$



Il suo centro è $\boxed{(1,\ 5)}$;

i vertici dell'iperbole canonica corrispondente sono $\left(\pm\frac{1}{2},\ 0\right)$

quindi i vertici della "nostra" saranno $\left(\pm\frac{1}{2}+1,\ 5\right)$ ossia $\boxed{\left(\frac{1}{2},\ 5\right)}$ e $\boxed{\left(\frac{3}{2},\ 5\right)}$.

Gli asintoti dell'iperbole canonica corrispondente sono $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{35}/2}{1/2}x=\pm x\sqrt{35}$

quindi gli asintoti della "nostra" iperbole saranno $\boxed{y-5=\pm\sqrt{35}(x-1)}$

L'eccentricità, per entrambe le iperboli, è $\boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{3}{1/2}=6}$

2° MODO

Possiamo pensare di trasferirci, provvisoriamente,
nel riferimento cartesiano $O'XY$ rispetto alla quale la "nostra" iperbole è in posizione canonica,
scriverne l'equazione e infine ritornare al sistema di riferimento Oxy di partenza.

In $O'XY$ le coordinate dei fuochi sono

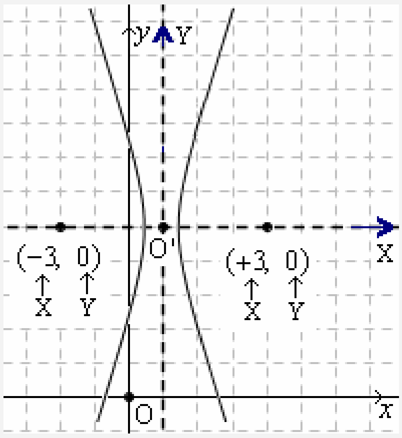
$$\underset{\mathrm{X}}{\uparrow}\!\!\!\!\!\!(-3,\ \ \underset{\mathrm{Y}}{\uparrow}\!\!\!\!0)\ \text{ e }\ (\underset{\mathrm{X}}{+3},\ \underset{\mathrm{Y}}{0})$$

per cui è $c=3$ e l'equazione, tenuto conto che

$$2k=1=2a\ \rightarrow\ a=\frac{1}{2},\ a^2=\frac{1}{4}$$

$$a^2+b^2=c^2\ \rightarrow\ b^2=c^2-a^2=9-\frac{1}{4}=\frac{35}{4},$$

sarà $\boxed{\frac{X^2}{\frac{1}{4}}-\frac{Y^2}{\frac{35}{4}}=1}$



Ora, le equazioni del cambiamento di riferimento sono $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y-5\end{cases}$

per cui avremo in definitiva $\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-5)^2}{\frac{35}{4}}=1}$

3° MODO

Più laborioso sarebbe stato procedere scrivendo direttamente l'equazione del luogo geometrico …

$$\mathrm{P}(x,\,y)\quad \mathrm{A}(-2,\,5)\quad \mathrm{B}(4,\,5)$$

$$\left|\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}\right|=1$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=\pm1$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}=\pm1+\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$$

$$(x+2)^2\cancel{+(y-5)^2}=1+(x-4)^2\cancel{+(y-5)^2}\pm2\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$$

$$\cancel{x^2}+4x+4=1+\cancel{x^2}-8x+16\pm2\sqrt{x^2-8x+16+y^2-10y+25}$$

$$\pm2\sqrt{x^2-8x+y^2-10y+41}=13-12x$$

$$4\left(x^2-8x+y^2-10y+41\right)=(13-12x)^2$$

$$4x^2-32x+4y^2-40y+164=169-312x+144x^2$$

$$140x^2-280x-4y^2+40y+5=0$$

$$140\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2-10y\right)+5=0$$

$$140\left(x^2-2x+1\right)-140-4\left(y^2-10y+25\right)+100+5=0$$

$$140(x-1)^2-4(y-5)^2-35=0$$

$$140(x-1)^2-4(y-5)^2=35$$

$$\frac{\overset{4}{\cancel{140}}(x-1)^2}{\cancel{35}}-\frac{4(y-5)^2}{35}=1$$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-5)^2}{\frac{35}{4}}=1}$$

2) *Se si sottopone l'iperbole* γ *di equazione* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ *alla traslazione di vettore* $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$, *essendo* $\vec{i},\ \vec{j}$ *i versori degli assi cartesiani, qual è l'equazione della curva così ottenuta?*

La traslazione considerata ha equazioni $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-2 \end{cases}$ e, come è noto,

per scrivere l'equazione della curva immagine occorre

1) invertire le equazioni della trasformazione
2) sostituire nell'equazione della curva
3) sopprimere gli apici.

Perciò:

$$\begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'+2 \end{cases}\qquad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1\ \to\ \frac{(x'-3)^2}{4}-\frac{(y'+2)^2}{3}=1\ \to\ \underbrace{\boxed{\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{3}=1}}_{\gamma',\ immagine\ di\ \gamma}$$

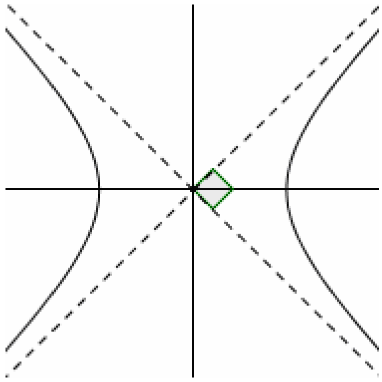
D'altronde, si poteva giungere all'equazione nel riquadro anche più rapidamente,
se si teneva presente che una traslazione di vettore $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$
è una traslazione a destra di 3 unità e in basso di 2 unità, per cui
(effetto "bastian contrario": ce ne siamo occupati quando abbiamo parlato di "manipolazioni di grafici")
si può ottenere semplicemente sostituendo, nell'equazione della curva,
$x-3$ al posto di x e $y+2$ al posto di y.

Ancora: la traslazione in esame porta l'origine $\mathrm{O}(0,0)$, che è il centro dell'iperbole γ, nel punto $(3,-2)$, che sarà il centro dell'iperbole immagine γ' … da cui *immediatamente* l'equazione di quest'ultima.

IPERBOLE EQUILATERA

Un'iperbole si dice "equilatera" quando i suoi asintoti sono perpendicolari fra loro.
Dato che un'iperbole è individuata dalla sua costante $2k$ e dalla sua distanza focale $2c$,
la perpendicolarità degli asintoti dipenderà dal verificarsi di un'opportuna relazione fra k e c.
Ci domandiamo quale sia tale relazione.

Per rispondere, potremmo studiare la nostra iperbole pensandola collocata in un riferimento cartesiano, rispetto al quale la sua posizione sia "canonica".
Supponiamo inoltre, per maggiore consuetudine, che i fuochi siano in orizzontale.



In tal caso l'equazione è $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Ma noi sappiamo che gli asintoti hanno equazioni $y=\pm\frac{b}{a}x$;

pertanto essi saranno perpendicolari quando il coefficiente angolare $\frac{b}{a}$

sarà tale da determinare un angolo di 45° con l'asse x: $\frac{b}{a}=1,\ b=a$.

Abbiamo così scoperto che nel caso di un'iperbole canonica, la condizione affinché sia equilatera è espressa da $b=a$ (è evidente che lo stesso vale pure per l'iperbole traslata).
Essendo poi $c^2=a^2+b^2$, si ha che tale condizione $b=a$ equivale alla condizione $c^2=2a^2$ ossia $c=a\sqrt{2}$.
Questi risultati si estendono anche al caso dei fuochi in verticale,
essendo anche qui $\pm\frac{b}{a}$ i coefficienti angolari degli asintoti.

Un'iperbole canonica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ è "equilatera" (cioè: ha gli asintoti perpendicolari)
se e solo se $b=a$ o, equivalentemente, $c=a\sqrt{2}\ \left(=b\sqrt{2}\right)$;
in altre parole, quando la sua equazione si presenta sotto la forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=\pm 1 \quad \left(x^2-y^2=\pm a^2\right)$

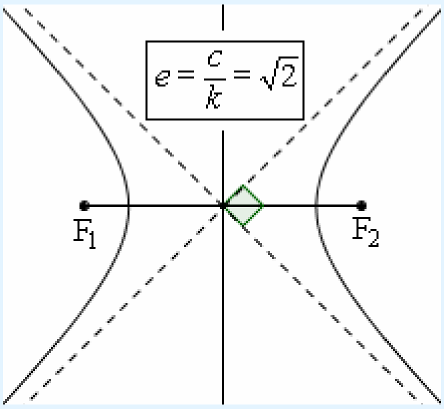
Sappiamo che la costante dell'iperbole, ossia la differenza costante $2k$ di cui parla la definizione,
vale $2a$ per l'iperbole canonica coi fuochi in orizzontale, $2b$ per l'iperbole canonica coi fuochi in verticale.
Allora la condizione $b=a$, equivalente a $c=a\sqrt{2}$, equivale pure a $c=k\sqrt{2}$.
E questa condizione prescinde dal fatto di pensare o meno la curva nell'ambito di un riferimento cartesiano.

In definitiva, abbiamo scoperto che

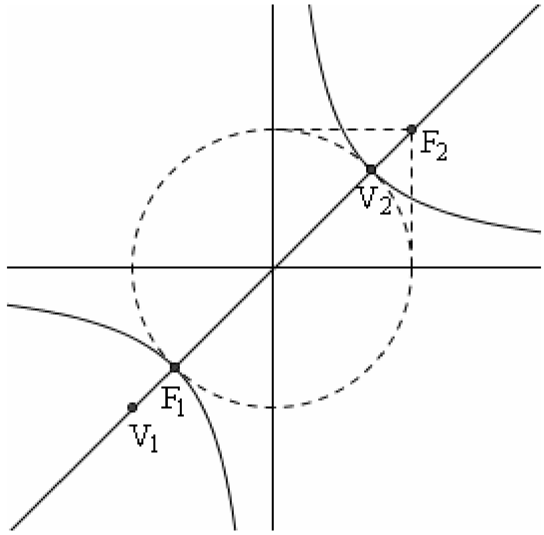
un'iperbole, considerata indipendentemente dal fatto
di essere inserita o meno in un riferimento cartesiano,
è equilatera se e solo se fra la sua semidistanza focale c e la sua "semicostante" k sussiste la relazione

$\boxed{c=k\sqrt{2}}$; il che si verifica se e solo se risulta $\boxed{e=\frac{c}{k}=\sqrt{2}}$

Insomma, la perpendicolarità degli asintoti si ha quando il valore dell'eccentricità è $\sqrt{2}$.



IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AI SUOI ASINTOTI



Dunque un'iperbole si dice "equilatera"
se e solo se i suoi asintoti sono perpendicolari,
il che avviene se e solo se fra la semicostante k dell'iperbole
e la sua semidistanza focale c sussiste la relazione $c = k\sqrt{2}$.

Se gli asintoti sono perpendicolari fra loro,
potremmo approfittarne per scegliere gli asintoti stessi
come assi del riferimento cartesiano,
nel quale studiare l'iperbole.

Che equazione assumerebbe la curva in questo caso?

E' molto facile rispondere.

I fuochi e i vertici starebbero
sulla bisettrice del primo e terzo quadrante,
oppure, in alternativa,
sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

- Supponiamo dapprima che i fuochi stiano sulla $y = x$.
  Allora, affinché si possa indicare sempre con c la semidistanza focale, assegneremo ai fuochi coordinate
  $\left(\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{c}{\sqrt{2}}, -\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$
  Traducendo in coordinate la condizione
  $$\left|\mathrm{PF}_1 - \mathrm{PF}_2\right| = 2k = 2 \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{c}{\cancel{\sqrt{2}}} = c\sqrt{2},$$
  otterremo, fatti i vari calcoli, l'equazione
  $$xy = \frac{c^2}{4}.$$
  Ponendo a questo punto $\frac{c^2}{4} = p$, l'equazione assumerà la forma
  $$xy = p \quad (p > 0).$$
- Se invece i fuochi stanno sulla $y = -x$, avremo
  $$\mathrm{F}_{1,2} = \left(\pm\frac{c}{\sqrt{2}}, \mp\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$
  e, fatti i calcoli, perverremo all'equazione
  $$xy = -\frac{c^2}{4};$$
  dopodiché, posto ancora $\frac{c^2}{4} = p$, otterremo
  $$xy = -p \quad (p > 0)$$

In definitiva:

L'equazione di un'iperbole equilatera (= con asintoti perpendicolari), riferita ai suoi asintoti, ossia inserita in un riferimento cartesiano i cui assi coincidano con gli asintoti dell'iperbole stessa, è della forma
$$\boldsymbol{xy = h}$$
- Nel caso $h > 0$, la curva è contenuta nel 1° e 3° quadrante;
- Nel caso $h < 0$, la curva è contenuta nel 2° e 4° quadrante.

Osservando che $xy = h$ può essere scritta come $y = \frac{h}{x}$,

si vede che la curva risulta essere il grafico della
FUNZIONE DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA.

ESERCIZIO: E' data la curva di equazione: $y = -\frac{6}{x}$.

a) Disegnala b) Trovane vertici e fuochi.

LA FUNZIONE OMOGRAFICA

Viene così chiamata una funzione della forma $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ **,**

purché il suo grafico non si riduca a una retta; purché, quindi:

- sia $\boxed{c \neq 0}$;
- sia $\boxed{ad-bc \neq 0}$; infatti, se la quantità $ad-bc$ è nulla, allora (vedi NOTA) il grafico degenera nuovamente in una retta (precisamente, in una retta "col buco").

NOTA

Supponiamo che nella funzione $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (già stiamo supponendo $c \neq 0$) si abbia $ad-bc=0$.
Allora è $ad=bc$.
Ma il verificarsi della condizione $ad=bc$ implica la possibilità di semplificare la funzione. Infatti:

- Se d è diverso da zero, allora vale la proporzione $a:c=b:d$
  e perciò esiste una costante λ tale che $a=\lambda c \wedge b=\lambda d$.
  Di conseguenza la frazione $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ è semplificabile:
  $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\lambda cx+\lambda d}{cx+d}=\dfrac{\lambda(cx+d)}{cx+d}=\lambda \quad \left(\textit{con la condizione } \; cx+d \neq 0, \; \textit{cioè } \; x \neq -\dfrac{d}{c}\right).$
  La funzione considerata rappresenta una "retta con buco".
- Se $d=0$, dovrà essere $bc=0$ e quindi, essendo $c \neq 0$, ne risulterà $b=0$: dunque la frazione assumerà la forma $\dfrac{ax}{cx}$ cioè si avrà $y=\dfrac{ax}{cx}=\dfrac{a}{c}$ $\quad$ (*con la condizione* $x \neq 0$). Retta con buco.

Il dominio (= l'insieme dei valori di *x* per cui esiste il corrispondente valore di *y*) di una funzione omografica NON è tutto $\mathbb{R}$:
infatti, per la presenza del denominatore $cx+d$, la *y* è calcolabile soltanto se è $cx+d \neq 0$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$.

Quando prendiamo *x* molto vicino al valore $-\dfrac{d}{c}$, il denominatore della frazione è molto vicino a zero,

mentre il numeratore assume un valore molto vicino ad $a \cdot \left(-\dfrac{d}{c}\right)+b=\dfrac{-ad+bc}{c}=-\dfrac{ad-bc}{c} \neq 0$.
Ma una frazione in cui il denominatore è piccolissimo rispetto al numeratore, ha un valore grandissimo:
ad esempio, $\dfrac{3}{0,000001}=1000000$.

Possiamo sintetizzare tutto il discorso nella scrittura $\boxed{\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}} \dfrac{ax+b}{cx+d}=\infty}$.

Pertanto **la retta** $\boxed{\boldsymbol{x=-\dfrac{d}{c}}}$ **fa da "asintoto verticale" per la funzione.**

E' interessante anche il comportamento della *y* quando *x* si fa, in valore assoluto, grandissimo (tende a infinito):

è infatti $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(a+\dfrac{b}{x}\right)}{\cancel{x}\left(c+\dfrac{d}{x}\right)}=\dfrac{a}{c}}$

(i fattori *x* si semplificano; le frazioni *b/x* e *d/x* tendono a 0 quando *x* tende a ∞)

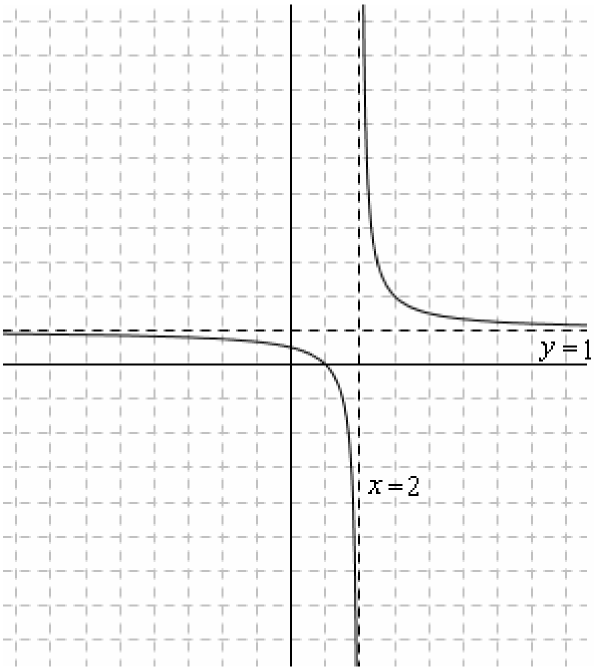
Quindi, quando *x* tende a $+\infty$, oppure a $-\infty$, la *y* corrispondente tende al valore $\dfrac{a}{c}$:

ciò significa che **la retta** $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$ **fa da "asintoto orizzontale" per la funzione.**

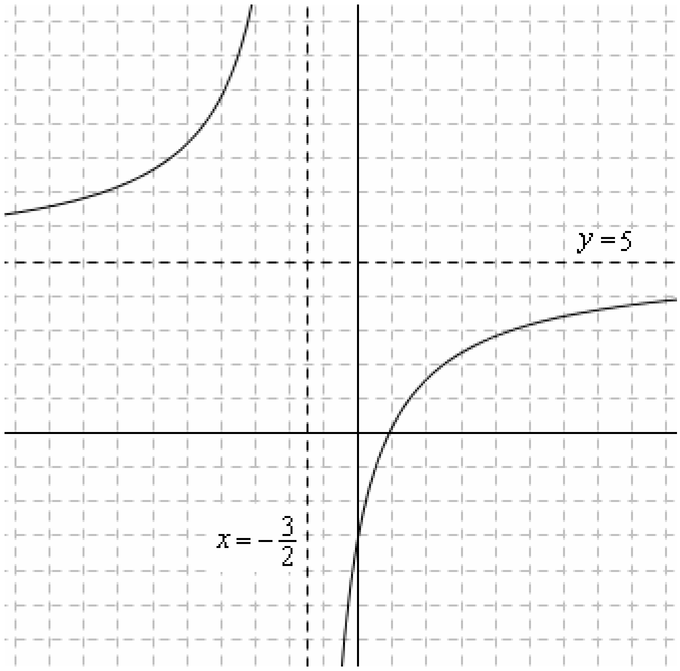
Riassumendo, la funzione omografica $\boxed{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ ha sempre **due asintoti:**

- uno **verticale**, di equazione $\boxed{x = -\dfrac{d}{c}}$
- l'altro **orizzontale**, di equazione $\boxed{y = \dfrac{a}{c}}$

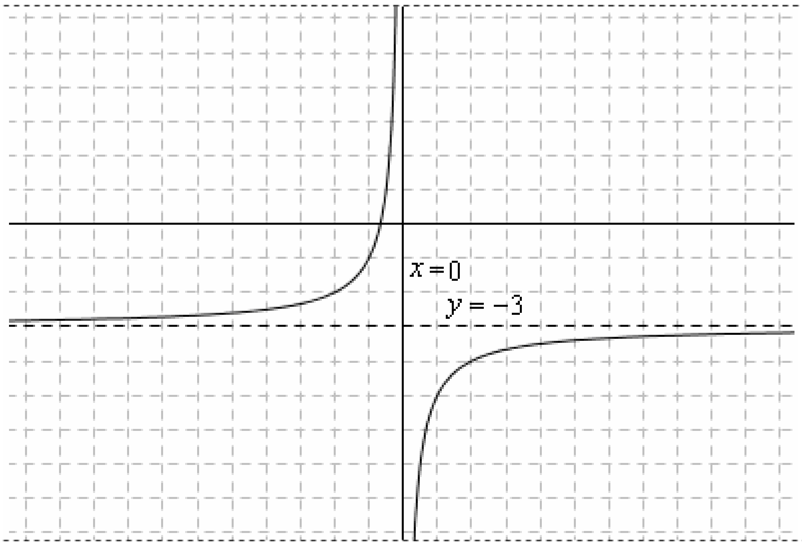
$y = \dfrac{x-1}{x-2}$



$y = \dfrac{10x-9}{2x+3}$



$y = \dfrac{-3x-2}{x}$



Le figure di questa pagina mostrano che il grafico di una funzione omografica presenta **un'evidente somiglianza con quello dell' "iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti"** $\boldsymbol{y = \dfrac{h}{x}}$.

In effetti, si può dimostrare che

ogni funzione omografica è interpretabile come un'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, TRASLATA.

I vertici di questa iperbole si potranno facilmente determinare intersecando la curva con una bisettrice degli asintoti; i fuochi, ricordando che la loro distanza dal centro è uguale alla distanza dal centro dei vertici, moltiplicata per $\sqrt{2}$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA:
"OGNI FUNZIONE OMOGRAFICA È INTERPRETABILE COME UN'IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AI PROPRI ASINTOTI, TRASLATA"

Consideriamo una funzione omografica $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

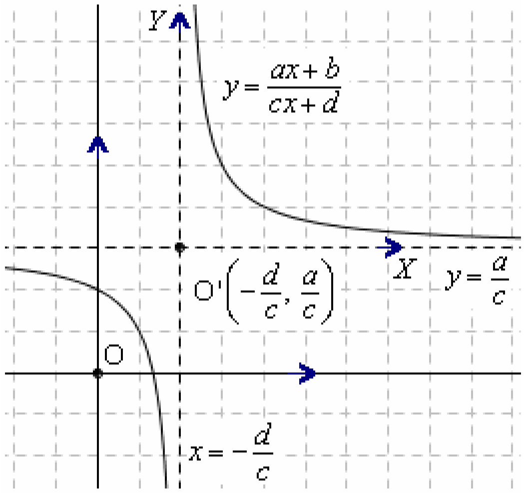
Vogliamo far vedere che il suo grafico è ottenibile per traslazione a partire da una curva della forma $y=\dfrac{h}{x}$.

POSSIAMO PROCEDERE IN DUE MODI

- 1° MODO: MEDIANTE UNA TRASLAZIONE DEL RIFERIMENTO

Poniamoci nel riferimento cartesiano $XO'Y$,
traslato rispetto a quello iniziale,
avente l'origine nel punto $O'\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$.

Che equazione assumerà la nostra curva in tale nuovo riferimento?



Le equazioni del cambiamento di riferimento sono:

$$\begin{cases} X=x+\dfrac{d}{c} \\ Y=y-\dfrac{a}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=X-\dfrac{d}{c} \\ y=Y+\dfrac{a}{c} \end{cases}.$$

Dunque avremo:

$$Y+\frac{a}{c}=\frac{a(X-d/c)+b}{c(X-d/c)+d}; \quad Y=\frac{aX-ad/c+b}{cX\cancel{-d}\cancel{+d}}-\frac{a}{c};$$

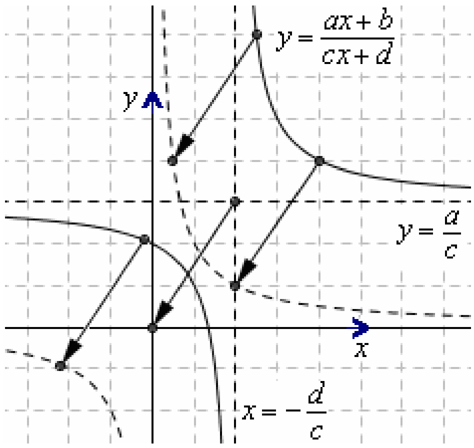
$$Y=\frac{\cancel{aX}-ad/c+b\cancel{-aX}}{cX}; \quad \boxed{Y=-\frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{X}}$$

Quindi, in effetti, "vista" in un opportuno riferimento, traslato rispetto a quello iniziale, la nostra curva risulta essere un'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti (equazione della forma: *ordinata = costante / ascissa*)

- 2° MODO: MEDIANTE UNA TRASLAZIONE DELLA CURVA

Sottoponiamo la curva $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$
alla traslazione di vettore $\vec{v}$ di componenti $\left(\dfrac{d}{c},-\dfrac{a}{c}\right)$.

Tale vettore di traslazione è stato, ovviamente, scelto in modo che il punto di intersezione fra i due asintoti della funzione omografica considerata, venga trasportato nell'origine.



Che equazione assumerà la curva dopo la traslazione?
Sappiamo che per traslare una curva di equazione $F(x,\ y)=0$,
basta considerare le componenti $v_1,\ v_2$ del vettore di traslazione e sostituire, nell'equazione della curva,
$x-v_1$ al posto di *x* e $y-v_2$ al posto di *y*.

Ora, presa l'equazione $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, se andiamo a sostituire $x-\dfrac{d}{c}$ al posto di *x*, e $y+\dfrac{a}{c}$ al posto di *y*,

otterremo, dopo qualche passaggio, $\boxed{y=-\dfrac{\frac{ad-bc}{c^2}}{x}}$.

Di conseguenza, un'opportuna traslazione porta la curva a coincidere con un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti (equazione della forma: *ordinata = costante / ascissa*).
Se ora noi immaginiamo di prendere questa iperbole e sottoporla alla traslazione di vettore opposto, otterremo proprio la nostra curva iniziale; e ciò dimostra, appunto, che la curva da noi considerata è un'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, e poi traslata.

UNA PROVA FINALE SULL'ELLISSE E SULL'IPERBOLE

1) Scrivi l'equazione dell'ellisse canonica tale che la retta $5x+12y-60=0$ attraversi l'asse *x* in un suo fuoco e l'asse *y* in un suo vertice.

2) Scrivi l'equazione dell'ellisse canonica passante per $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e tale che il rettangolo ad essa circoscritto abbia area 8.

3) Scrivi le equazioni degli asintoti e determina l'eccentricità dell'iperbole di equazione $4x^2-y^2-16x+17=0$.

4) Scrivi l'equazione dell'iperbole canonica coi fuochi sull'asse *x*, avente asintoti di equazioni $y=\pm 2x$ e tale che l'area del triangolo individuato dagli asintoti e dalla tangente in un vertice valga 8 .

5) Traccia il grafico della funzione
$$y=\frac{2x}{x+|x-1|}$$

6) Scrivi l'equazione del luogo dei punti per i quali la distanza dal punto $K(-1,0)$ è la metà della distanza dalla retta $x=-4$, verificando che si tratta di un'ellisse con eccentricità ½ .

7) Verifica che la distanza di un fuoco dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, da un asintoto, vale *b*.

8) Verifica che il lato del quadrato coi lati paralleli agli assi e i quattro vertici sull'iperbole
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
vale
$$\frac{2ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$$
(supponi $b>a$, altrimenti il quadrato in questione non esisterebbe)

9) Calcola l'area del triangolo che la retta tangente alla curva $xy=-6$ nel suo punto di ascissa 2, determina con gli assi cartesiani.

9') Generalizzazione:
calcola l'area del triangolo che la retta tangente alla curva $xy=k$ nel suo generico punto di coordinate $(t,...)$ determina con gli assi cartesiani: troverai un valore costante, indipendente da *t*.

10) Giustifica la seguente affermazione:
"Dati su di un piano un punto fissato A e una circonferenza fissata γ , alla quale A sia esterno, il luogo dei centri P delle circonferenze passanti per A e tangenti a γ è un'iperbole".

SOLUZIONI

1) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

2) $9x^2+4y^2=12$ oppure $x^2+4y^2=4$

3) $y=\pm 2x\mp 4$; $e=\sqrt{5}/2$

4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

6) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

9) $S=12$ 9') $S=2|k|$

10) Detto C il centro della circonferenza γ , T il punto di tangenza, si ha:
Se $\mathrm{PC}>\mathrm{PA}$: $\mathrm{PC}-\mathrm{PA}=(\mathrm{PT}+\mathrm{TC})-\mathrm{PA}=\mathrm{PT}+\mathrm{TC}-\mathrm{PT}=\mathrm{TC}=r=COSTANTE$
Se $\mathrm{PA}>\mathrm{PC}$: $\mathrm{PA}-\mathrm{PC}=\mathrm{PA}-(\mathrm{PT}-\mathrm{CT})=\mathrm{PT}-\mathrm{PT}+\mathrm{CT}=\mathrm{CT}=r=COSTANTE$