28. LUOGHI GEOMETRICI

Si dice "luogo geometrico" l'insieme costituito dai punti (del piano, o dello spazio) che godono di una determinata proprietà geometrica.

In Geometria Analitica, l'equazione di un luogo geometrico si ricava scrivendo l'uguaglianza a cui soddisfano tutti e soli i punti P(x, y) del piano cartesiano, che fanno parte del luogo, e traducendola poi in coordinate.

- *Scrivi l'equazione del luogo dei punti la cui distanza da* $\mathrm{O}(0,0)$ *è doppia della distanza da* $\mathrm{A}(3,0)$

  Il luogo in questione è l'insieme di tutti e soli i punti $\mathrm{P}(x,y)$, tali che $\mathrm{PO}=2\cdot \mathrm{PA}$. Traducendo in coordinate quest'uguaglianza, avremo: $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$; ... $x^2+y^2-8x+12=0$

  Questa equazione individua la circonferenza di centro (4,0) e raggio 2.

- *Scrivi l'eq. del luogo dei punti la cui distanza dalla retta* $4x-3y=0$ *è doppia della distanza dall'asse x.*

  $r:\ 4x-3y=0;\quad asse\ x:\ y=0$

  $\{\mathrm{P}(x,y)/\ d(\mathrm{P},r)=2\cdot d(\mathrm{P}, asse\ x)\}$

  $$\frac{|4x-3y|}{\sqrt{16+9}}=2|y|;\quad |4x-3y|=10|y|;\quad 4x-3y=\pm 10y;\ \left\langle \begin{array}{l} 4x-13y=0 \\ 4x+7y=0 \end{array}\right.$$

  Il luogo in questione è perciò costituito da una coppia di rette.

- *Scrivi l'equazione del luogo dei punti che vedono il segmento* AB, *con* A(1,1) *e* B(3,3), *sotto un angolo retto.*

  RISOLUZIONE 1

  La geometria euclidea ci insegna che il luogo in questione è la circonferenza di diametro AB: è perciò immediato determinare l'equazione richiesta.

  NOTA. E' del tutto spontaneo far rientrare anche i due punti A e B nel luogo, come "posizioni limite". Osserviamo che, a stretto rigore, per tali punti l'angolo in questione è "indeterminato"; e fra i valori dell'indeterminazione c'è anche il valore 90°.

  RISOLUZIONE 2

  Se non si intuisce subito la natura del luogo, si potrà procedere come segue:

  $$\left\{\mathrm{P}(x,y)/\ m_{\mathrm{PA}}=-\frac{1}{m_{\mathrm{PB}}}\right\}\quad \left(\textit{ricordiamo che per il coeff. angolare vale la formula } m=\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

  $$\frac{y-1}{x-1}=-\frac{1}{\frac{y-3}{x-3}};\quad \frac{y-1}{x-1}=-\frac{x-3}{y-3},\ con\ x\neq 3;$$

  $$y^2-3y-y+3=-x^2+3x+x-3,\ con\ x\neq 3,\ x\neq 1,\ y\neq 3$$

  $$x^2+y^2-4x-4y+6=0,\ con\ x\neq 3,\ x\neq 1,\ y\neq 3$$

  L'equazione ricavata è quella di una circonferenza (facile poi controllare che questa circonferenza ha centro nel punto medio di AB e raggio uguale alla metà di AB, quindi risulta avere per diametro AB).

  E' vero tuttavia che le condizioni poste privano la circonferenza in esame di alcuni punti: quelli di ascissa 1 o 3, e quelli di ordinata 3.
  Si tratta dei due punti A e B (del cui "diritto di appartenere al luogo" abbiamo già discusso nella NOTA) e dei due punti S(1,3) e T(3,1).
  Riguardo ad S e T, anch' essi appartengono senza dubbio al nostro luogo, perché:

  - *SA è parallelo all'asse y, SB è parallelo all'asse x quindi* $A\hat{S}B=90°$;
  - *TA è parallelo all'asse x, TB è parallelo all'asse y, quindi* $A\hat{T}B=90°$.

  Perché dunque i nostri passaggi algebrici hanno portato ad estrometterli?
  Ciò è avvenuto per il fatto che, quando si utilizzano i coefficienti angolari, restano tagliate inesorabilmente fuori le rette parallele all'asse y; e SA, TB sono per l'appunto tali.
  Perciò il procedimento da noi seguito era fatalmente "destinato" ad escludere alcuni punti, che invece appartengono a pieno diritto al luogo in questione.
  Pertanto "a posteriori", riconoscendo che anche S e T fanno parte del luogo, semplicemente ignoreremo le condizioni poste, e diremo che il luogo cercato è la circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-4y+6=0$
  NESSUN PUNTO ESCLUSO.

RISOLUZIONE 3
Alla stessa equazione avremmo potuto pervenire anche con un altro metodo.
Il luogo dei punti $P(x, y)$ per i quali $A\hat{P}B = 90°$
può essere pensato come il luogo dei punti $P(x, y)$ per cui il triangolo APB è rettangolo in P.
Ma se un triangolo è rettangolo, allora in esso la somma dei quadrati dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa; e viceversa, se in un triangolo la somma dei quadrati di due lati è uguale al quadrato del lato rimanente, allora il triangolo è rettangolo, con l'angolo retto che è opposto all'ultimo lato menzionato (Teorema di Pitagora e suo inverso).
In definitiva, $P(x, y)$ appartiene al nostro luogo se e solo se

$$PA^2 + PB^2 = AB^2$$
$$\left[(x-1)^2 + (y-1)^2\right] + \left[(x-3)^2 + (y-3)^2\right] = (3-1)^2 + (3-1)^2$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UN LUOGO GEOMETRICO

Consideriamo le seguenti equazioni, in cui i valori di *x* e di *y* vengono fatti dipendere da un parametro *t*:

$$\boxed{\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = 1 - t \end{cases}, \ con\ t \in \mathbb{R}}$$

Se noi facciamo variare *t*, varierà in corrispondenza la coppia (x, y); ad esempio:

$$t = 0 \to \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} (3,1) \qquad t = 1 \to \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} (4,0) \qquad t = \frac{1}{2} \to \begin{cases} x = 13/4 \\ y = 1/2 \end{cases} \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{2}\right) \qquad \ldots$$

Le equazioni considerate individuano perciò un luogo di punti sul piano cartesiano:
al variare di *t* in $\mathbb{R}$, il punto $(x, y) = (t^2 + 3,\ 1 - t)$ "si muove" sul piano cartesiano, descrivendo una curva.

Ci chiediamo ora:
è possibile passare dalle equazioni parametriche alla ordinaria equazione cartesiana F(*x*, *y*) = 0 del luogo?

Sì, e molto facilmente.
Basta infatti **isolare il parametro in una delle due equazioni, e poi andare a sostituire nell'altra.**

$$\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = 1 - t \end{cases} \quad \to \quad \begin{matrix} t = 1 - y \\ x = (1-y)^2 + 3 \end{matrix} \quad \ldots \quad \boxed{x = y^2 - 2y + 4} \quad \textit{equazione cartesiana del luogo}$$

Esempio
Scrivere l'equazione del luogo descritto dai baricentri dei triangoli ABP, *essendo:*
$A(3,0);\ \ B(6,0);\ \ P$ *un punto della retta* $y = 2x$

Indichiamo le coordinate di P con $(\alpha, 2\alpha)$. Avremo:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3 + 6 + \alpha}{3} = \frac{9 + \alpha}{3}; \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{0 + 0 + 2\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3}$$

quindi: $\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{9+\alpha}{3} \\ y = \dfrac{2\alpha}{3} \end{cases}}$ che sono le equazioni *parametriche* del luogo considerato.

Passiamo ora all'equazione *cartesiana*: $\alpha = \dfrac{3y}{2}; \quad x = \dfrac{9 + \frac{3y}{2}}{3} \quad \ldots \quad \boxed{y = 2x - 6}$

Attività
Con GeoGebra, utilizzando lo strumento "Luogo", costruisci il luogo dei baricentri dei triangoli ABP.

Esercizio 1
Determinare il luogo dei punti di intersezione delle rette di equazioni:
$r_1:\ 3x + y + 2k - 1 = 0,\ \ r_2:\ x - y - k = 0$
al variare del parametro k *in* $\mathbb{R}$ *(soluzione:* $y = 5x - 1$*)*

Esercizio 2
Scrivere l'equazione del luogo (già da noi in precedenza considerato) dei punti che vedono il segmento AB, con A(1,1) e B(3,3), sotto un angolo retto, interpretandolo come luogo dei punti di intersezione di due rette r ed s, passanti rispettivamente per A e per B, e perpendicolari fra loro.