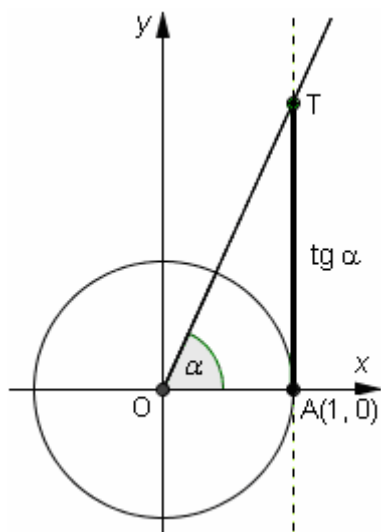


5. TANGENTE DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo il punto A che sta “all’estrema destra”, di coordinate (1,0). Per A tracciamo la retta “verticale”, ossia quella parallela all’asse y, e indichiamo con T il punto di intersezione fra tale retta e il raggio vettore di un dato angolo α (o, eventualmente, il prolungamento del raggio vettore dalla parte dell’origine).

Si dice “tangente di α ” l’ordinata del punto T, ossia la misura (con segno) del segmento AT in figura.

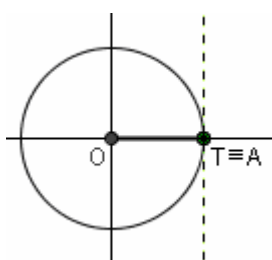


$\text{tg } \alpha = \text{ordinata di T} = \text{misura (con segno) di AT}$

Clicca QUI [⇨](#)
per una bella figura dinamica
(software GeoGebra)
che ti permetterà di osservare
la variazione della tangente goniometrica
al variare dell’angolo.

Per $\alpha = 0^\circ$ (0 radianti)

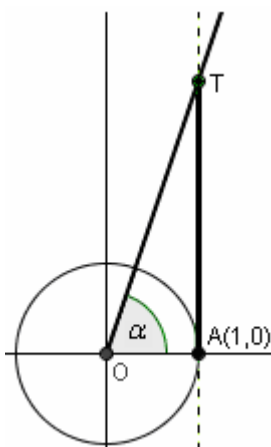
$$\text{tg } \alpha = 0$$



Nel **1° quadrante**, ossia
per $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$),
si ha $\text{tg } \alpha > 0$

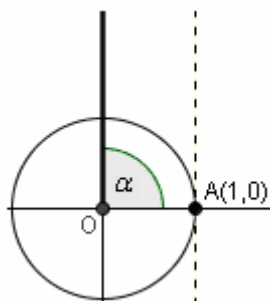
... e quando α si avvicina a 90° ,
mantenendosi però *minore* di 90° ,
 $\text{tg } \alpha$ diventa altissima,
“tende a $+\infty$ ”.

Ad esempio, si ha
 $\text{tg } 89.97^\circ \approx 1909.86$



Per $\alpha = 90^\circ$ ($\pi/2$ radianti)

$\text{tg } \alpha$ NON ESISTE!



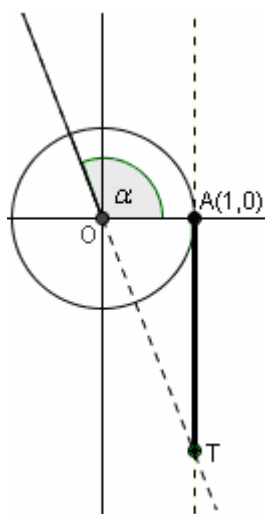
Il raggio vettore, ossia
il secondo lato dell’angolo,
in questo caso coincide col
semiasse delle ordinate positive.
Ma allora il punto T “non si trova”,
perché il raggio vettore
e la retta tratteggiata
sono parallele
e quindi non si incontrano.

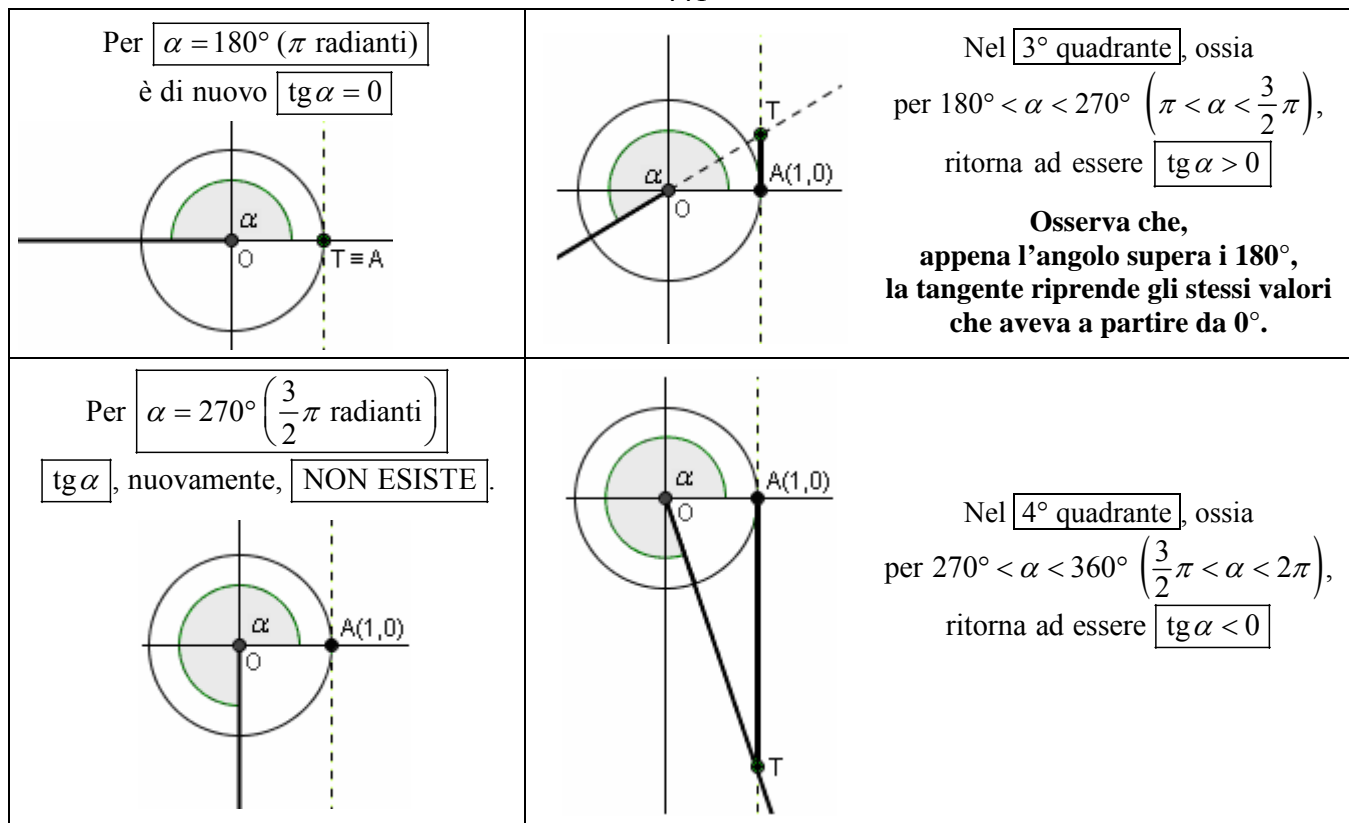
Nel **2° quadrante**, ossia
per $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$),
si ha $\text{tg } \alpha < 0$

Il raggio vettore è una semiretta
immersa nel 2° quadrante,
ma la definizione di tangente goniometrica
prevede che si debba sempre considerare
l’intersezione fra la retta verticale per A
e il raggio vettore o, eventualmente
(come in questo caso), il suo prolungamento.

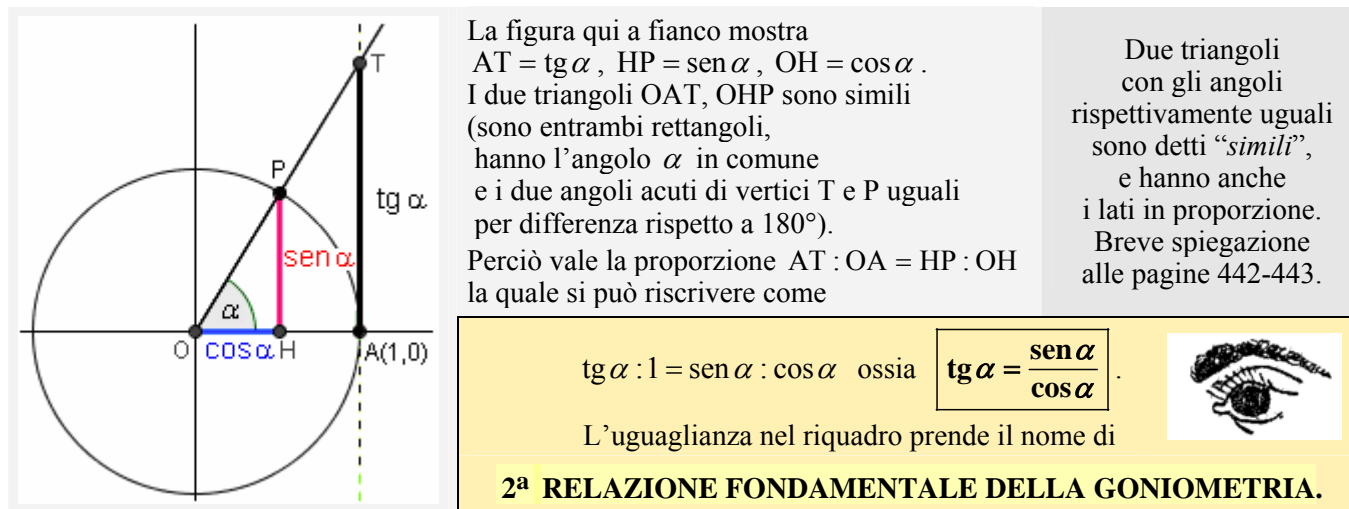
Quando α si avvicina a 90° ,
mantenendosi però *maggiore* di 90°
(ossia: decrescendo),
 $\text{tg } \alpha$ diventa altissima in valore assoluto,
ma negativa in segno:
si dice che “tende a $-\infty$ ”

Ad es., si ha $\text{tg } 90.01^\circ \approx -5729.58$





Quando l'angolo α raggiunge e poi supera i 360° , i valori della tangente “ripartono come se si ripartisse da 0° ”. Ma in fondo vediamo che questo “ricominciare da capo” si ha già quando l'angolo raggiunge e poi supera 180° ! Insomma, **la funzione “tangente” è “periodica di periodo 180° ”**; di questo torneremo a parlare più avanti.



Possiamo a questo punto osservare che la 2ª rel. fondamentale della goniometria è coerente col fatto che

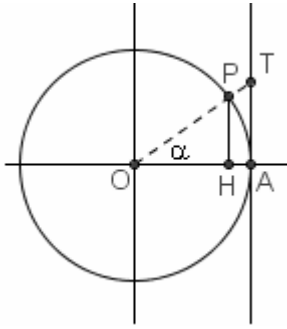
- **la tangente vale 0 per tutti e soli quegli angoli il cui seno è 0**, che sono poi: $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
e, andando fuori dai confini del 1° giro, $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ, 540^\circ + 180^\circ = 720^\circ, \dots$; $-180^\circ, -360^\circ, \dots$;
più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
 $k \cdot 180^\circ$, essendo k un intero relativo ($k \in \mathbb{Z}$);
- **la tangente non esiste (“va all'infinito”) per tutti e soli quegli angoli il cui coseno è 0** cioè $90^\circ, 270^\circ$
e, andando fuori dai confini del 1° giro, $270^\circ + 180^\circ = 450^\circ, 450^\circ + 180^\circ = 630^\circ, \dots$; $-90^\circ, -270^\circ, \dots$
più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
 $90^\circ + k \cdot 180^\circ$, essendo k un intero relativo ($k \in \mathbb{Z}$)

IL TENDERE A INFINITO. Dire, ad es., che **la tangente “va all'infinito a 90° ”**, significa affermare che **quando l'angolo si fa molto vicino a 90° , la rispettiva tangente diventa grandissima in valore assoluto:**

- **per un angolo di pochissimo inferiore a 90°** , ossia **quando l'angolo tende a 90° “per difetto”**
(1° quadrante), **la tangente è grandissima in valore assoluto e positiva (“tende a $+\infty$ ”)**
- **mentre per un angolo appena superiore a 90°** , ossia **quando l'angolo tende a 90° “per eccesso”**
(2° quadrante), **la tangente è grandissima in valore assoluto e negativa (“tende a $-\infty$ ”)**.

ESERCIZI

1)



Sui lati del triangolo OAT nella circonferenza goniometrica in figura,

pianta le seguenti due bandierine: $\boxed{tg \alpha}$ $\boxed{1}$ Invece sui lati di OPH pianta le bandierine: $\boxed{sen \alpha}$ $\boxed{cos \alpha}$ $\boxed{1}$

Ora i due triangoli OHP, OAT sono “simili”: cosa vuol dire?

Scrivi la proporzione fra i loro lati, che porta alla “2^a relazione fondamentale della goniometria”.2) Fra gli angoli compresi fra 0° e 360° ,

- a) quali sono quelli la cui tangente è < 0 ? b) quali quelli la cui tangente non esiste?
 c) quali quelli la cui tangente è uguale a $+1$? d) e a -1 ?

3) Cosa si può dire della tangente degli angoli il cui coseno vale 0?

4) Secondo te, a “occhio” (fai un disegno!), l’angolo acuto la cui tangente goniometrica misura 4 è compreso:

- a) fra 50° e 60° ? b) fra 60° e 70° ? c) fra 70° e 80° ?

Servendoti di una macchinetta calcolatrice, stabilisci la misura di quell’angolo (in gradi e primi), poi trasformala in radianti (approssimando ai centesimi).

5) Disponendo di una macchinetta calcolatrice, calcola $tg 54^\circ$ senza però mai pigiare il tasto tan .6) E’ vero che $tg(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{tg \alpha}$?**RISPOSTE**2) a) sono gli angoli α tali che $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ e $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ b) $90^\circ, 270^\circ$ c) $45^\circ, 225^\circ$ d) $135^\circ, 315^\circ$

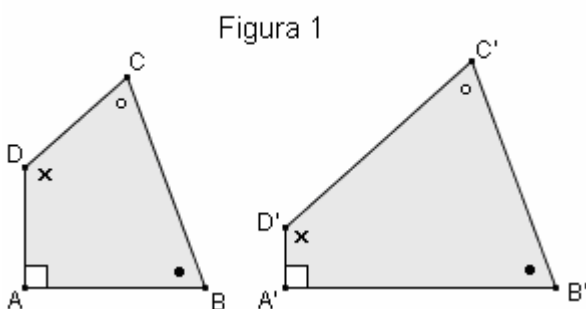
3) Quando il coseno di un angolo vale 0, la tangente di quell’angolo non esiste.

Questo si vede a partire dalla circonferenza goniometrica, o anche dalla 2^a Relazione Fondamentale: essa ci dice che $tg \alpha = sen \alpha / cos \alpha$, e quando il denominatore è 0 una frazione non è definita.4) c) $\approx 75^\circ 58'$; ≈ 1.33 radianti 5) Basta fare $sen 54^\circ / cos 54^\circ$. Si ottiene ≈ 1.376 6) Sì, è vero. $tg(90^\circ - \alpha) = sen(90^\circ - \alpha) / cos(90^\circ - \alpha) = cos \alpha / sen \alpha = 1 / (sen \alpha / cos \alpha) = 1 / tg \alpha$ **6. POLIGONI SIMILI (CENNI)****Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono “simili” se sono uno l’ingrandimento dell’altro.**

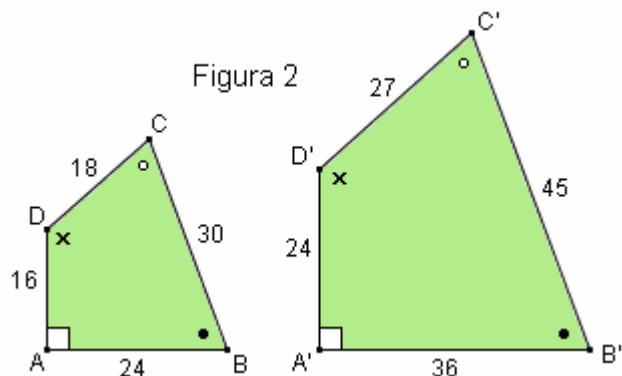
Se ti sforzi di disegnare due poligoni, ad esempio due quadrilateri,

in modo che **uno di essi appaia come l’ingrandimento dell’altro**, ti renderai conto che dovrai innanzitutto disegnarli con **gli angoli rispettivamente uguali**; ... ma ciò **non sarà sufficiente**: ci vorrà qualcosa in più, e precisamente dovrai fare in modo che **i lati siano in proporzione**.

I due poligoni della figura sottostante hanno gli angoli rispettivamente uguali. Eppure, evidentemente, NON sono “uno l’ingrandimento dell’altro”...



... Invece i due poligoni di quest’altra figura, oltre ad avere gli angoli rispettivamente uguali, hanno pure i lati proporzionali, perché ciascun lato del primo poligono è i 2/3 del lato che gli corrisponde nel secondo poligono. In questa Figura 2, i due poligoni in gioco appaiono “uno l’ingrandimento dell’altro”.



Dire che “hanno i lati corrispondenti proporzionali” significa dire che il rapporto fra due lati corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di lati corrispondenti.

Con riferimento alla *Figura 2*, $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$.

Tale rapporto costante si dice “**rapporto di similitudine**”.

Ad esempio, in *Figura 2*, il rapporto di similitudine dei due quadrilateri ABCD, A'B'C'D' (presi in quest'ordine), è 2/3 (prendendoli invece nell'ordine opposto, il rapporto di similitudine sarebbe 3/2)

□ TRIANGOLI SIMILI

Abbiamo visto che due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli risp. uguali e i lati corrisp. proporzionali.

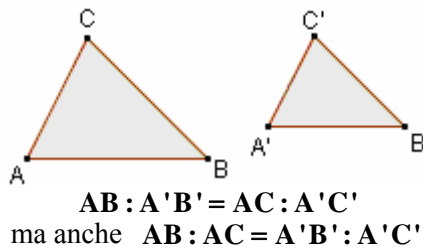
Nel caso dei triangoli, tuttavia, **questa definizione si rivela sovrabbondante**, perché si può dimostrare che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora hanno SENZ'ALTRO anche i lati corrispondenti proporzionali; cosa che invece non necessariamente accade per i poligoni con più di 3 lati.

Questo enunciato (di cui non diamo qui la dimostrazione) prende il nome di “Primo Criterio di Similitudine”.

TEOREMA (1° Criterio di similitudine) - Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono simili, cioè hanno anche i lati corrispondenti proporzionali.

LA PROPORZIONALITA' SI PUO' “VEDERE” IN DUE MODI

Se abbiamo due triangoli simili, l'affermazione che “i lati corrispondenti sono proporzionali” può essere interpretata indifferentemente in due modi, che si equivalgono perfettamente fra loro.



Le due proporzioni qui a fianco sono equivalenti: si possono ricavare l'una dall'altra applicando la proprietà del permutare i medi.

♪ Si può dire che il rapporto tra due lati corrispondenti è costante, cioè che

“un lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente, come un altro lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente”

$$AB : A'B' = AC : A'C' \quad AB : A'B' = BC : B'C' \quad AC : A'C' = BC : B'C'$$

♪ ... e si può anche dire che il rapporto di due lati del 1° triangolo è uguale al rapporto dei due lati corrispondenti del 2° triangolo (presi nello stesso ordine), cioè che

“un lato (del 1° triangolo) sta ad un altro lato (sempre del 1° triangolo) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo”

$$AB : AC = A'B' : A'C' \quad AB : BC = A'B' : B'C' \quad AC : BC = A'C' : B'C'$$

E' chiaro che ciascuno è liberissimo di “vedere”, di esprimere, la similitudine, nel modo che preferisce!

Il 1° Criterio di Similitudine è un teorema che si applica con **grandissima frequenza** negli esercizi.

Osserviamo fra l'altro che si può subito concludere che due triangoli dati sono simili

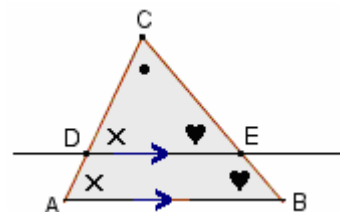
anche soltanto sapendo che hanno **DUE angoli rispettivamente uguali**,

perché allora (per differenza rispetto a 180°) saranno certo uguali anche gli angoli rimanenti.

COROLLARIO del 1° Criterio di similitudine
Una retta parallela ad un lato di un triangolo stacca da questo un triangolo simile al dato

“Corollario” = affermazione che è conseguenza immediata di un'altra

Figura qui a fianco: basta tener presente che, quando si hanno due parallele con trasversale, gli angoli corrispondenti sono uguali ...



TEOREMA (2° Criterio di similitudine)

Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora sono simili

Quindi possiamo ad es. dire che sono simili due triangoli ABC e PQR tali che: $\hat{A} = \hat{P}$, $AB = 5PQ$, $AC = 5PR$

TEOREMA (3° Criterio di similitudine)

Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, allora sono simili

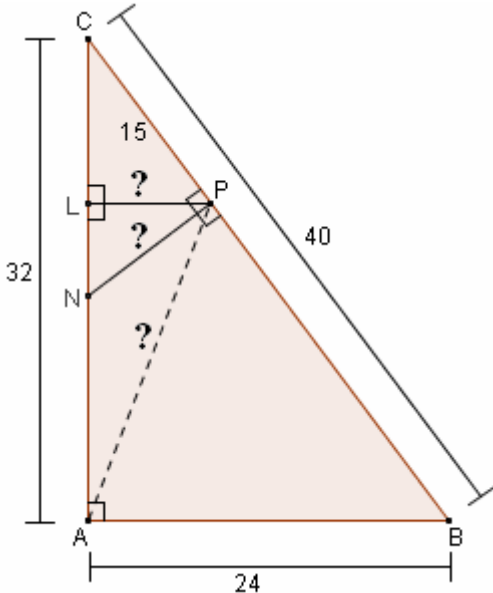
Ad es., se i lati di ABC misurano 6, 8 e 12 e quelli di DEF misurano 9, 12 e 18 (una volta e mezza), allora ABC e DEF sono simili. Se noi raddoppiamo, o triplichiamo, o dimezziamo, o riduciamo alla 3^a parte, ... , insomma: moltiplichiamo per uno stesso numero $k > 0$, tutti e tre i lati di un triangolo, otterremo in questo modo un triangolo che sarà sicuramente simile a quello di partenza.

PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI: UN ESEMPIO SVOLTO

In un triangolo rettangolo ABC i due cateti AB e AC misurano rispettivamente 24 cm e 32 cm. Sull'ipotenusa BC si prende un segmento CP = 15 cm e per P si tracciano:

- la perpendicolare ad AC, fino ad incontrare AC in L
- e la perpendicolare a BC, fino ad incontrare AC in N.

Quanto misurano i tre segmenti PL, PN, PA?



$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$AB = 24 \text{ cm}$$

$$AC = 32 \text{ cm}$$

$$CP = 15 \text{ cm}$$

$$PL \perp AC$$

$$PN \perp BC$$

$$PL = ?$$

$$PN = ?$$

$$PA = ?$$

Ripasso

PROPRIETA' FONDAMENTALE
DELLE PROPORZIONI:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$$

“In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;

E, VICEVERSA,

se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di uno stesso prodotto”.

Conseguenza:

se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;

se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

$$\text{Esempio } 25 : x = 20 : 12 \quad x = \frac{25 \cdot 12}{20} = 15$$

$$BC \stackrel{\text{Pitagora}}{=} \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$

LPC ~ ABC (rettangoli, \widehat{C} in comune)

$PL : AB = PC : BC$
(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

$$PL : 24 = 15 : 40$$

$$\boxed{PL} = \frac{24^3 \cdot 15^3}{40^3} = \boxed{9 \text{ cm}}$$

oppure $PL : PC = AB : BC$
(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

$$PL : 15 = 24 : 40$$

$$\boxed{PL} = \frac{15^3 \cdot 24^3}{40^3} = \boxed{9 \text{ cm}}$$

PNC ~ ABC (rettangoli, \widehat{C} in comune)

$PN : AB = PC : AC$
(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

$$PN : 24 = 15 : 32$$

$$\boxed{PN} = \frac{24^3 \cdot 15}{32^3} = \boxed{\frac{45}{4} \text{ cm}}$$

oppure $PN : PC = AB : AC$
(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

$$PN : 15 = 24 : 32$$

$$\boxed{PN} = \frac{15 \cdot 24^3}{32^3} = \boxed{\frac{45}{4} \text{ cm}}$$

Per quanto riguarda PA, lo ricaveremo con Pitagora su APL, dopo aver calcolato AL:

$$CL = \sqrt{PC^2 - PL^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm} \quad AL = AC - CL = 32 - 12 = 20 \text{ cm}$$

$$\boxed{PA} = \sqrt{AL^2 + PL^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{400 + 81} = \boxed{\sqrt{481} \text{ cm}}$$

**Il simbolo
“simile con”
è un serpente:**

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PL ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

In due triangoli simili, due lati si corrispondono se stanno opposti ad angoli uguali (o allo stesso angolo)

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PN ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

Nel passaggio da un triangolo a un altro simile, LE AREE stanno fra loro come i QUADRATI di due lati omologhi (= corrispondenti).

Ad esempio: *Ogni lato raddoppia?* Allora

- anche IL PERIMETRO *raddoppierà*,
- ciascuna ALTEZZA *raddoppierà*,
- ma l'AREA *diventerà il quadruplo*.

Se poi il lato triplica, l'area diventa 9 volte tanto (= subisce una moltiplicazione per $3^2 = 9$), ecc.

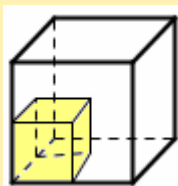
Questo vale, più in generale, per tutte le FIGURE PIANE sottoposte a DILATAZIONE O CONTRAZIONE: **nel passaggio da una figura piana ad un'altra che ne sia la dilatazione o la contrazione "in scala", LE AREE STANNO FRA LORO COME IL QUADRATO DEL RAPPORTO DI SCALA.**

Nello SPAZIO TRIDIMENSIONALE,

avviene qualcosa del genere ma coi VOLUMI e coi CUBI anziché con le aree e coi quadrati.

Nel passaggio da una figura solida a un'altra che ne sia la DILATAZIONE o la CONTRAZIONE "in scala", I VOLUMI STANNO FRA LORO COME IL CUBO DEL RAPPORTO DI SCALA.

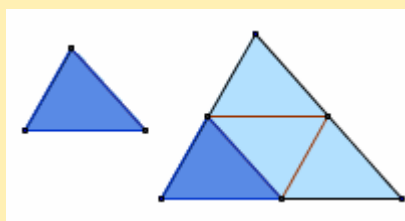
Se un solido subisce, ad es., una dilatazione in modo che ogni misura lineare raddoppi, il suo volume diventerà 8 volte tanto.



Il cubo di lato doppio richiede 8 cubetti piccoli per essere riempito. Quindi il suo volume è 8 volte il volume del cubetto piccolo.

♥ *Spigoli doppi? Volume moltiplicato per 8!*

♥ *Lati doppi? Area quadrupla!*



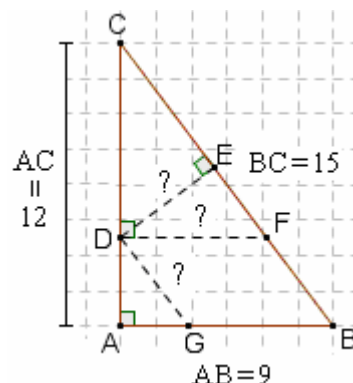
ESERCIZI (le risposte sono a pag. 450)

1) Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha i lati di 9 cm, 12 cm, 15 cm.

Da un punto D preso sul cateto maggiore AC, in modo che $DC = 2AD$, si tracciano:

- la perpendicolare DE a BC;
- la parallela DF ad AB;
- la parallela DG a BC.

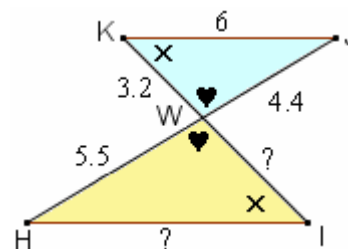
Determinare le misure dei tre segmenti DE, DF, DG.



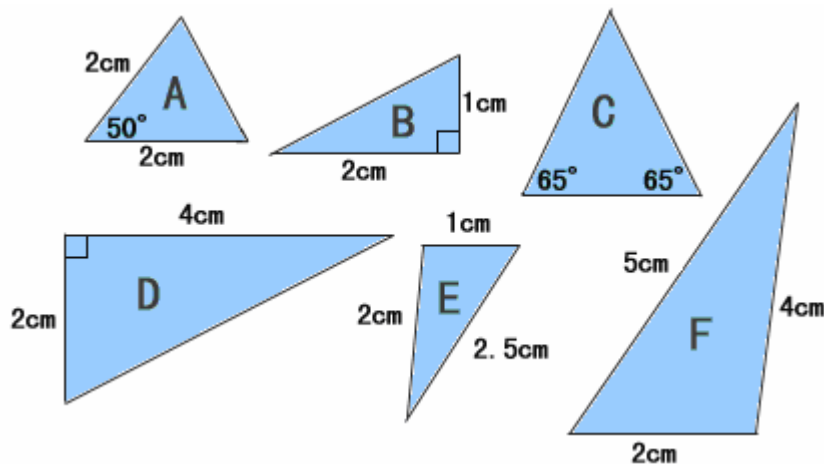
2) La figura mostra due triangoli KWJ, IWH i quali, per avere due angoli rispettivamente uguali, avranno (per diff. rispetto a 180°) uguale anche l'angolo rimanente e perciò saranno simili.

Del triangolo KWJ sono note (e indicate in figura) le misure di tutti e tre i lati; del triangolo IWH si sa solo che $HW = 5.5$

- Determina i due lati rimanenti del secondo triangolo
- Per quale numero si deve moltiplicare l'area del triangolo più piccolo, se si vuole ottenere quella del triangolo più grande?



3) Ci sono triangoli simili in figura? (da <http://www.ies.co.jp/math/>)



4) $A'B'C'$ è l'ombra di ABC. Se $LA = 3$ e $AA' = 1$, qual è il rapporto fra il perimetro di $A'B'C'$ e quello di ABC? E qual è il rapporto fra le aree?

