- **PROBLEMI SULLE SIMILITUDINI**

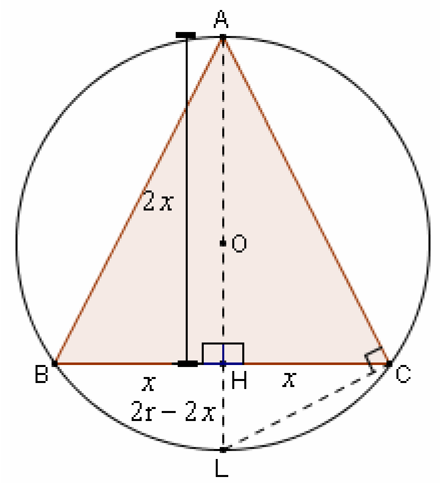
E) Problemi vari sulle similitudini

18) In una circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo isoscele, la cui base BC è uguale all'altezza AH.

I) Trovare la misura di BC=AH

II) Determinare sul segmento AH un punto K in modo che, condotta per K la perpendicolare ad AH, che tagli AB in D, AC in E, e la circonferenza in F (dalla parte di D) e in G (dalla parte di E), sia verificata la relazione $DF + EG = r$

I) *Innanzitutto osserviamo che l'altezza AH del triangolo isoscele ABC passa per il centro O della circonferenza: ciò è intuibile per motivi di simmetria, e può essere dimostrato ricordando che in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base fa anche da mediana, quindi è asse della base; ma in ogni circonferenza, è noto che l'asse di una corda passa sempre per il centro. Indichiamo con L il punto in cui il prolungamento di AH incontra la circonferenza; AL è dunque un diametro.*



Poniamo $BH = HC = x$
da cui:
$BC = AH = 2x$;
$HL = AL - AH = 2r - 2x$.

Congiungiamo C con L e osserviamo che il triangolo ACL è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza, e CH ne è l'altezza relativa all'ipotenusa.
Applicando dunque il 2° Teor. di Euclide possiamo impostare l'equazione risolvente per trovare x.

$$CH^2 = AH \cdot HL;\quad x^2 = 2x(2r-2x);\quad x^2 = 4rx - 4x^2;\quad 5x^2 - 4rx = 0;\quad x(5x-4r) = 0;\quad \boxed{x = 0 \vee x = \frac{4}{5}r}.$$

Il valore x=0 esprime una "soluzione degenere", nella quale il triangolo si ridurrebbe al punto A.
E' vero che anche in questo caso, essendo i lati e l'altezza di questo triangolo puntiforme quattro segmenti nulli, avremmo la base uguale all'altezza come richiede il problema;
tuttavia, è evidente che la "vera" soluzione è $x = \frac{4}{5}r$, a cui corrispondono le misure $\boxed{BC = AH = \frac{8}{5}r}$.

L'equazione risolvente si sarebbe potuta anche impostare senza ricorrere ad Euclide e applicando invece il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo HOC, ottenuto tracciando il raggio OC.

$BH = HC = x$

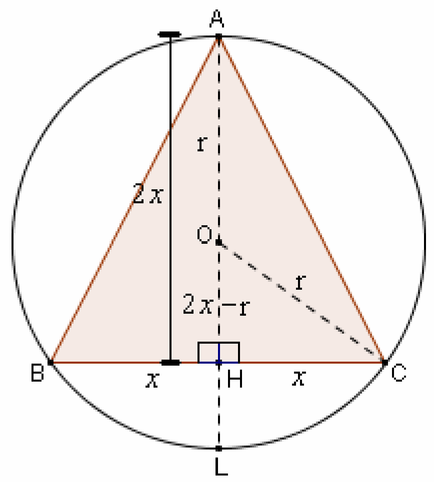
$BC = AH = 2x$

$OH = AH - AO = 2x - r$ (NOTA)

$$HC^2 + OH^2 = OC^2$$
$$x^2 + (2x-r)^2 = r^2$$
$$x^2 + 4x^2 - 4rx \cancel{+r^2} = \cancel{r^2}$$
$$5x^2 - 4rx = 0$$
$$x(5x-4r) = 0$$

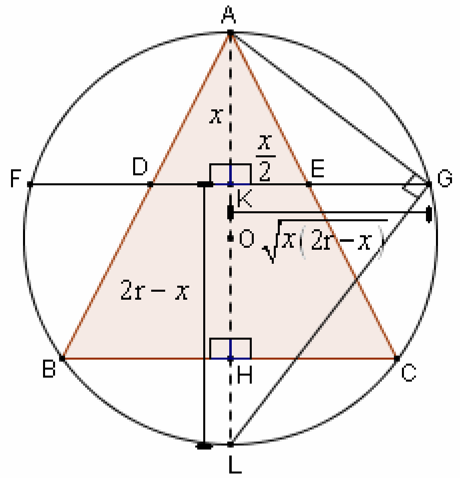
$x = \frac{4}{5}r$ (mentre $x = 0$ viene subito esclusa, perchè abbiamo impostato supponendo l'altezza maggiore del raggio)

NOTA
Osserviamo che così scrivendo diamo già per scontato che sia 2x>r; in effetti, affinché base e altezza di ABC siano uguali si vede subito "a occhio", escludendo il caso degenere del triangolo puntiforme, che l'altezza e la base uguali devono essere maggiori del raggio.



II) $\mathrm{AK} = x \to \mathrm{KL} = 2\mathrm{r} - x$

$\mathrm{KG} = \sqrt{\mathrm{AK}\cdot\mathrm{KL}} = \sqrt{x\cdot(2\mathrm{r}-x)}$
(Euclide 2°, AGL)



Ora $\mathrm{KE} = \frac{x}{2}$,

perché, così come nel triangolo AHC
la base è metà dell'altezza,
altrettanto avverrà in AKE
che è simile ad AHC.
Allora

$\mathrm{EG} = \mathrm{DF} = \mathrm{KG} - \mathrm{KE} = \sqrt{x\cdot(2\mathrm{r}-x)} - \frac{x}{2}$.

Equazione risolvente:

$\mathrm{DF} + \mathrm{EG} = \mathrm{r}$

$2\mathrm{EG} = \mathrm{r}$

$2\left(\sqrt{x\cdot(2\mathrm{r}-x)} - \frac{x}{2}\right) = \mathrm{r}$

$2\sqrt{x\cdot(2\mathrm{r}-x)} - x = \mathrm{r}; \quad 2\sqrt{x\cdot(2\mathrm{r}-x)} = x + \mathrm{r};$

$4x\cdot(2\mathrm{r}-x) = (x+\mathrm{r})^2; \quad 8\mathrm{r}x - 4x^2 = x^2 + 2\mathrm{r}x + \mathrm{r}^2;$

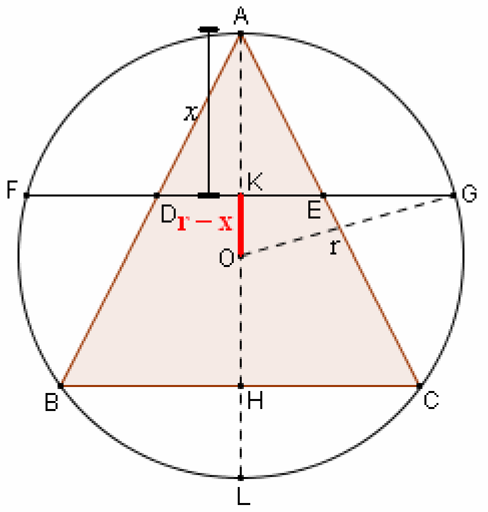
$-5x^2 + 6\mathrm{r}x - \mathrm{r}^2 = 0; \quad 5x^2 - 6\mathrm{r}x + \mathrm{r}^2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3\mathrm{r} \pm \sqrt{9\mathrm{r}^2 - 5\mathrm{r}^2}}{5} = \frac{3\mathrm{r} \pm \sqrt{4\mathrm{r}^2}}{5} = \frac{3\mathrm{r} \pm 2\mathrm{r}}{5} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{5}\mathrm{r} \\ \mathrm{r} \end{array} \right.$$

entrambe accettabili, sia geometricamente che algebricamente

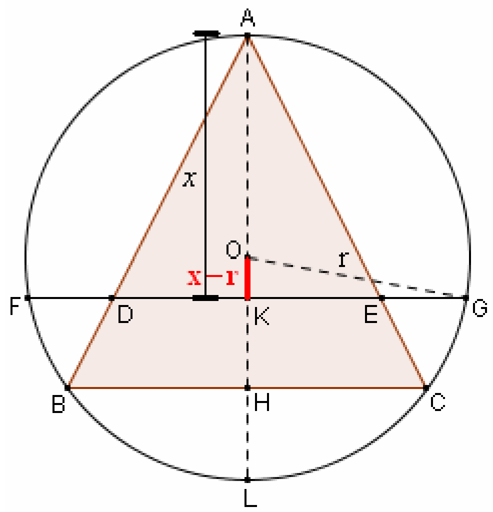
OSSERVAZIONE

Utilizzando Pitagora su OKG, anziché Euclide, **per esprimere KG in funzione di x**, sorgerebbe un **problemino interessante riguardante il segmento OK**.



Prendendo K fra A e O, è

$\mathrm{OK} = \mathrm{r} - x$



… mentre se prendiamo K fra O ed H, avremo

$\mathrm{OK} = x - \mathrm{r}$

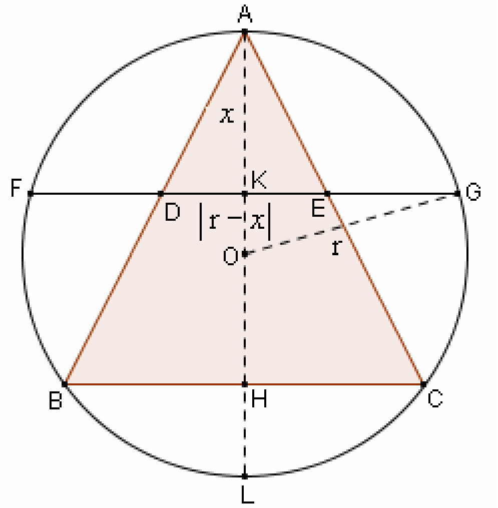
Si deve allora, nella risoluzione, distinguere i due casi?

Non è necessario!

Infatti, a ben guardare, per esprimere OK si dovrebbe prendere

- l'espressione $\mathrm{r}-x$, nel caso in cui $\mathrm{r}>x$
- l'espressione $x-\mathrm{r}$, nel caso in cui $x>\mathrm{r}$.

Ma allora basterà prendere una qualsiasi fra le due espressioni,
ad esempio $\mathrm{r}-x$,
e, nel caso in cui il risultato della sottrazione sia negativo (perché $x>\mathrm{r}$),
sostituirla con $x-\mathrm{r}$ che è poi *l'opposto* del numero $\mathrm{r}-x$ …
e ciò equivale a prendere
IL VALORE ASSOLUTO dell'espressione $\mathrm{r}-x$.
In definitiva, **se vogliamo un'espressione valida in entrambi i casi,**
questa espressione sarà $|\mathbf{r}-x|$ (o anche, indifferentemente, $|x-\mathbf{r}|$):



Va detto che quando poi l'espressione in gioco viene utilizzata
nell'applicazione del Teorema di Pitagora,
il valore assoluto non dà alcun fastidio perché

$|\mathbf{r}-x|^2=(\mathbf{r}-x)^2$:

il quadrato del valore assoluto di un numero, è sempre uguale al quadrato del numero stesso (qualunque sia il segno di questo).

Ricapitoliamo:

$\mathrm{AK}=x$

$\mathrm{OK}=|\mathrm{r}-x|=|x-\mathrm{r}|$

$\mathrm{KG}=\sqrt{\mathrm{OG}^2-\mathrm{OK}^2}=\sqrt{\mathrm{r}^2-|\mathrm{r}-x|^2}=\sqrt{\mathrm{r}^2-(\mathrm{r}-x)^2}=\sqrt{\cancel{\mathrm{r}^2}-\cancel{\mathrm{r}^2}+2\mathrm{r}x-x^2}$

$\mathrm{DF}=\mathrm{EG}=\mathrm{KG}-\mathrm{KE}=\sqrt{2\mathrm{r}x-x^2}-\dfrac{x}{2}$ (la stessa espressione ottenuta col metodo precedente!)

ecc. ecc.