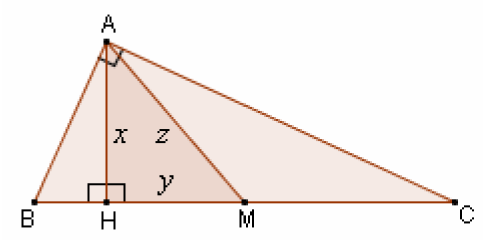
❑ PROBLEMI GEOMETRICI RISOLUBILI TRAMITE UN SISTEMA DI EQUAZIONI

12) Determinare i lati di un triangolo ABC rettangolo in A sapendo che, dette AH e AM l'altezza e la mediana relative all'ipotenusa, il perimetro e l'area del triangolo AHM sono rispettivamente di cm 56 e di cm² 84.



$B\widehat{A}C = 90°$

$AH \perp BC, \quad BM = MC$

$2p(AHM) = 56\text{ cm} \quad S(AHM) = 84\text{ cm}^2$

$AB? \quad AC = ? \quad BC = ?$

Innanzitutto poniamo $AH = x, \;\; HM = y, \;\; AM = z$ e determiniamo x, y, z col sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 56 \\ \dfrac{xy}{2} = 84 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

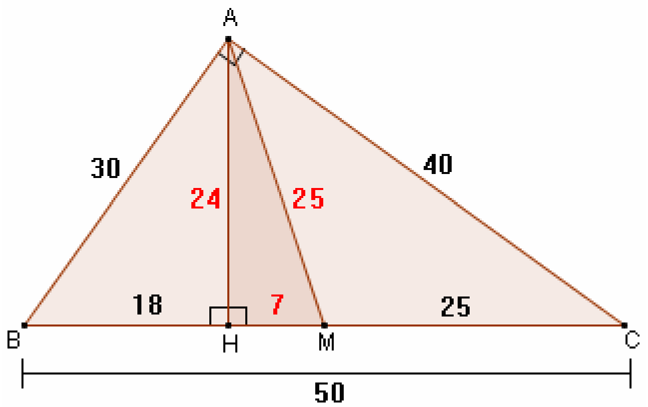
$$\begin{cases} x + y = 56 - z \\ xy = 168 \\ (x+y)^2 - 2xy = z^2; \quad (56-z)^2 - 336 = z^2; \quad 3136 - 112z + \cancel{z^2} - 336 = \cancel{z^2}; \quad 2800 - 112z = 0; \quad z = 25 \end{cases}$$

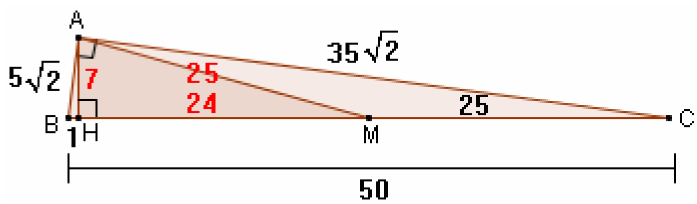
$$\begin{cases} x + y = 56 - 25 = 31 \\ xy = 168 \\ z = 25 \end{cases}$$

$$t^2 - 31t + 168 = 0; \; t_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{961-672}}{2} = \frac{31 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{31 \pm 17}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 7 \\ 24 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 24 \\ z = 25 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 24 \\ y = 7 \\ z = 25 \end{cases}$$

… e a questo punto il problema SI SDOPPIA!





Se
$AH = 24\text{ cm} \quad HM = 7\text{ cm} \quad AM = 25\text{ cm}$
allora

$BM = MC = AM = 25\text{ cm}$
(in un tr. rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa)

$BH = BM - HM = 25 - 7 = 18\text{ cm}$

$HC = HM + MC = 7 + 25 = 32\text{ cm}$

$BC = 25 + 25 = 50\text{ cm}$, dopodiché

$AB = 30\text{ cm}, \;\; AC = 40\text{ cm}$
(con Pitagora o Euclide)

Se
$AH = 7\text{ cm} \quad HM = 24\text{ cm} \quad AM = 25\text{ cm}$
allora

$BM = MC = AM = 25\text{ cm}$
(in un tr. rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa)

$BH = BM - HM = 25 - 24 = 1\text{ cm}$

$HC = HM + MC = 24 + 25 = 49\text{ cm}$

$BC = 25 + 25 = 50\text{ cm}$,

$AB = 5\sqrt{2}\text{ cm}, \;\; AC = 35\sqrt{2}\text{ cm}$
(con Pitagora o Euclide)