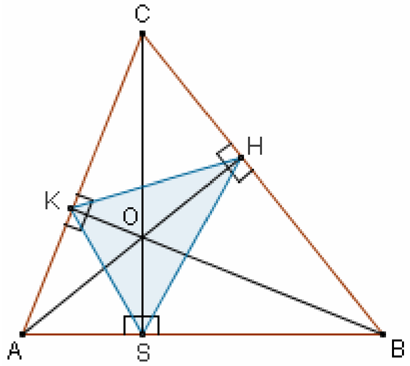
25) In un triangolo ABC, le tre altezze sono AH, BK, CS, l’ortocentro è O.

- **a) Dimostra che il quadrilatero OHCK è inscrivibile in una circonferenza**
- **b) Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscrivibile in una circonferenza**
- **c) I centri di tali due circonferenze stanno in posizioni molto particolari: sapresti specificarle? E giustificare la risposta?**
- **d) Quali altri quadrilateri della figura sono inscrivibili in una circonferenza?**
- **e) Dimostra che le tre altezze AH, BK, CS sono bisettrici degli angoli del triangolo HKS avente per vertici i piedi delle altezze stesse.**



DIM.

a) Dimostra che il quadrilatero OHCK è inscrivibile in una circonferenza

Questo quadrilatero ha due angoli opposti supplementari $\left(C\widehat{K}O + C\widehat{H}O = 90° + 90° = 180°\right)$
e pertanto avrà certamente supplementari anche gli altri due angoli opposti
(la somma di tutti e quattro gli angoli interni, in qualsiasi quadrilatero, vale sempre 360°).
Ma per un teorema noto **ogni quadrilatero con gli angoli opposti supplementari è inscrivibile in una circonferenza.**

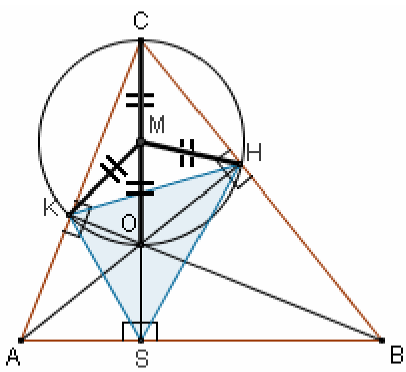
b) Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscrivibile in una circonferenza

Osserviamo i due triangoli rettangoli AKB e AHB, con l’ipotenusa AB in comune.
Un teorema noto ci assicura che **la circonferenza avente per diametro l’ipotenusa di un triangolo rettangolo passa per il vertice dell’angolo retto**.
Ma allora, se consideriamo la circonferenza di diametro AB
(che avrà per centro il punto medio di AB), questa passerà sia per K che per H.
Esiste dunque una circonferenza passante per tutti e quattro i punti A, B, H, K:
il quadrilatero ABHK è inscrivibile.

c) I centri di tali due circonferenze stanno in posizioni molto particolari: sapresti specificarle? E giustificare la risposta?

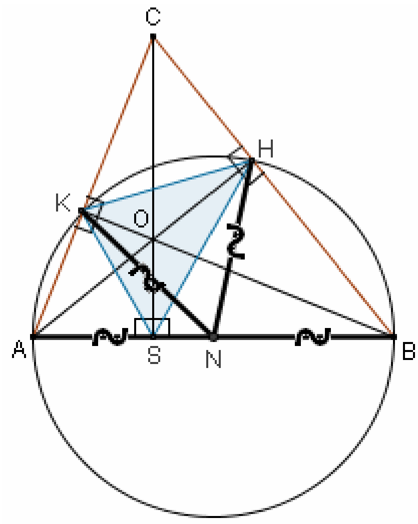
OHCK è formato da due triangoli rettangoli, situati da parte opposta rispetto all’ipotenusa comune:
il centro della circonferenza circoscritta ad OHCK
è dunque il punto medio di quell’ipotenusa comune CO, perché **la circonferenza che ha per diametro l’ipotenusa di un triangolo rettangolo passa per il vertice dell’angolo retto**,
quindi se andiamo a considerare la circonferenza di diametro CO,
avente per centro il punto medio di CO, questa passerà per C, O, H, K
e sarà dunque la circonferenza circoscritta ad OHCK.

Il fatto che OHCK ammetta una circonferenza circoscritta e che questa abbia per centro il punto medio di CO si può provare anche col ragionamento seguente: è noto che ***la mediana relativa all’ipotenusa, in un triangolo rettangolo, è uguale a metà dell’ipotenusa stessa****, quindi se noi andiamo a congiungere il punto medio M di CO con i due punti K e H, otterremo in definitiva quattro segmenti, MK, MH, MO ed MC, tutti uguali fra loro perché tutti uguali alla metà di CO. Dunque puntando il compasso in M con apertura, ad esempio, MO, la circonferenza tracciata passerà, oltre che per O, anche per H, C e K.*



Anche all'interno di ABHK possiamo osservare due triangoli rettangoli,
situati questa volta dalla stessa parte rispetto all'ipotenusa comune:
il centro della circonferenza circoscritta ad ABHK
è dunque il punto medio di quell'ipotenusa comune AB, perché **la circonferenza avente per diametro l'ipotenusa di un triangolo rettangolo passa per il vertice dell'angolo retto**,
e di conseguenza la circonferenza di diametro AB, con centro nel punto medio di AB,
passerà per A, B, H, K.

Come prima, c'è anche un modo alternativo di dimostrare che ABHK ammette una circonferenza circoscritta, la quale ha per centro il punto medio di AB. Congiungendo il punto medio N di AB con i due punti K e H, avremo NA=NB=NH=NK perché ***in ogni triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa****, e perciò la circonferenza di centro N e raggio, ad esempio, NA, passa per tutti e quattro i punti A, B, H, K.*

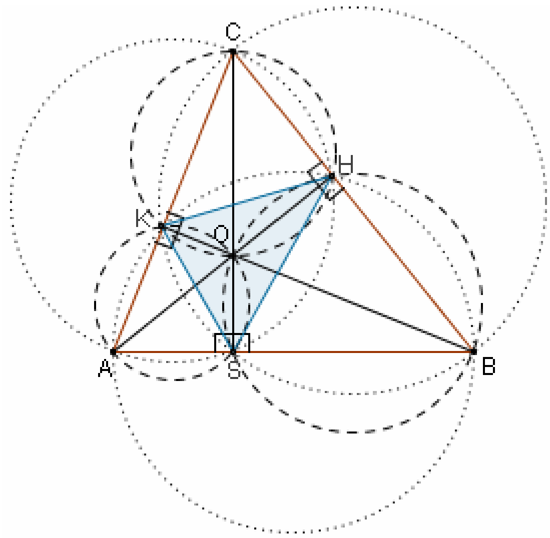


d) Quali altri quadrilateri della figura sono inscrivibili in una circonferenza?

Si tratta di

a) tutti i **quadrilateri** che sono "**analoghi ad OHCK**", in quanto sono formati da due triangoli rettangoli disposti da parti opposte rispetto all'ipotenusa comune: **OKAS, OHBS**;

b) e tutti i **quadrilateri** che sono "**analoghi ad ABHK**", in quanto hanno per vertici i vertici di due triangoli rettangoli disposti dalla stessa parte rispetto all'ipotenusa comune: **ACHS, BCKS**.



e) Dimostra che le tre altezze AH, BK, CS sono bisettrici degli angoli del triangolo HKS avente per vertici i piedi delle altezze stesse.

Occorre, per dimostrare questa non facile tesi, considerare opportune **coppie di circonferenze circoscritte**, ed applicare il teorema secondo cui **angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco sono uguali**.

Ad esempio, per far vedere che $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$,
si considera la circonferenza circoscritta ad OHCK
per dedurre che $\widehat{H}_1 = \widehat{C}_3$ (insistono entrambi su $\overset{\frown}{KO}$),
poi la circonferenza circoscritta ad ACHS
per dedurre che $\widehat{H}_2 = \widehat{C}_3$ (insistono entrambi su $\overset{\frown}{AS}$).
Segue $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ per la proprietà transitiva.

Analogamente si può procedere per gli angoli di vertici K ed S.