EQUAZIONI DI 2° GRADO LETTERALI
CORREZIONE DEGLI ESERCIZI “DISPARI”

1)

$$x(x+b)=6b^2$$
$$x^2+bx-6b^2=0$$
$$(x+3b)(x-2b)=0$$
$$x=-3b \ \vee \ x=2b$$

3)

$$(x+a)^2-4(x+a)+3=0$$
$$x^2+2ax+a^2-4x-4a+3=0$$
$$x^2+2ax-4x+a^2-4a+3=0$$
$$x^2+2(a-2)x+(a^2-4a+3)=0$$
$$x_{1,2}=-a+2\pm\sqrt{(a-2)^2-(a^2-4a+3)}=$$
$$=-a+2\pm\sqrt{\cancel{a^2}\cancel{-4a}+4\cancel{-a^2}\cancel{+4a}-3}=$$
$$=-a+2\pm1=\left\langle\begin{array}{l}1-a\\3-a\end{array}\right.$$

oppure:

$$(x+a)^2-4(x+a)+3=0$$
$$x+a=z$$
$$z^2-4z+3=0$$
$$(z-1)(z-3)=0$$
$$z=1 \vee z=3$$
$$x+a=1 \vee x+a=3$$
$$x=1-a \ \vee \ x=3-a$$

5)

$$2ax\left(2\sqrt{3}-3\right)=(x-3a)^2$$
$$4ax\sqrt{3}\cancel{-6ax}=x^2\cancel{-6ax}+9a^2$$
$$x^2-4ax\sqrt{3}+9a^2=0$$
$$x_{1,2}=2a\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2-9a^2}=$$
$$=2a\sqrt{3}\pm\sqrt{12a^2-9a^2}=2a\sqrt{3}\pm\sqrt{3a^2}=$$
$$=2a\sqrt{3}\pm a\sqrt{3}=\left\langle\begin{array}{l}a\sqrt{3}\\3a\sqrt{3}\end{array}\right.$$

7)

$$\left(x+b\right)^2-a\left(a+4b\right)=4a\left(x-a\right)$$

$$x^2+2bx+b^2-a^2-4ab=4ax-4a^2$$

$$x^2+2bx-4ax+3a^2+b^2-4ab=0$$

$$x^2+2x\left(b-2a\right)+\left(3a^2+b^2-4ab\right)=0$$

$$x_{1,2}=-b+2a\pm\sqrt{\cancel{b^2}\cancel{-4ab}+4a^2-3a^2\cancel{-b^2}\cancel{+4ab}}=$$

$$=-b+2a\pm\sqrt{a^2}=-b+2a\pm a=\left\langle\begin{array}{l}a-b\\3a-b\end{array}\right.$$

9)

$$\left(a+1\right)x^2-2\left(a+2\right)x+\left(a+3\right)=0$$

$$x_{1,2}\underset{a\neq-1}{=}\frac{a+2\pm\sqrt{\left(a+2\right)^2-\left(a+1\right)\left(a+3\right)}}{2\left(a+1\right)}=$$

$$=\frac{a+2\pm\sqrt{\cancel{a^2}\cancel{+4a}+4\cancel{-a^2}\cancel{-3a}\cancel{-a}-3}}{2\left(a+1\right)}=$$

$$=\frac{a+2\pm1}{2\left(a+1\right)}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{\cancel{a+1}}{2\left(\cancel{a+1}\right)}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{a+2\pm1}{2\left(a+1\right)}=\dfrac{a+3}{2\left(a+1\right)}\end{array}\right.$$

Con $a=-1$, *l'equazione diventa*

$$-2x+2=0;\quad x=1$$

11)

$$(m-1)x^2-m^2=m^2(x-2);\quad mx^2-x^2-m^2=m^2x-2m^2;\quad mx^2-x^2-m^2x+m^2=0$$

$$(m-1)x^2-m^2x+m^2=0$$

$$x_{1,2}\underset{m\neq1}{=}\frac{m^2\pm\sqrt{m^4-4m^2\left(m-1\right)}}{2(m-1)}=\frac{m^2\pm\sqrt{m^4-4m^3+4m^2}}{2(m-1)}=\frac{m^2\pm\sqrt{\left(m^2-2m\right)^2}}{2(m-1)}=$$

$$=\frac{m^2\pm\left(m^2-2m\right)}{2(m-1)}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{2m}{2(m-1)}=\boxed{\dfrac{m}{m-1}}\\[2ex]\dfrac{2m^2-2m}{2(m-1)}=\dfrac{\cancel{2}m\,\cancel{(m-1)}}{\cancel{2}\,\cancel{(m-1)}}=\boxed{m}\end{array}\right.$$

$\boxed{Con\ m=1}$ *l'eq. si abbassa di grado*: $\quad -x+1=0,\ \boxed{x=1}$

13)

$a(ax-2)\cdot\dfrac{x}{x+1}+1=x;\qquad \dfrac{ax(ax-2)}{x+1}+1=x$

$\dfrac{a^2x^2-2ax\cancel{+x}+1}{\cancel{x+1}}=\dfrac{x^2\cancel{+x}}{\cancel{x+1}}\qquad (x\neq -1)$

$a^2x^2-x^2-2ax+1=0;\qquad (a^2-1)x^2-2ax+1=0;\qquad (a+1)(a-1)x^2-2ax+1=0$

$$x_{1,2}\underset{a\neq\pm1}{=}\frac{a\pm\sqrt{a^2-(a+1)(a-1)}}{(a+1)(a-1)}=\frac{a\pm\sqrt{\cancel{a^2}\cancel{-a^2}+1}}{(a+1)(a-1)}=\frac{a\pm1}{(a+1)(a-1)}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{\cancel{a-1}}{(a+1)\cancel{(a-1)}}=\dfrac{1}{a+1}\\[2ex] \dfrac{\cancel{a+1}}{\cancel{(a+1)}(a-1)}=\dfrac{1}{a-1}\end{array}\right.$$

Con $a=1$ *l'equazione diventa*: $-2x+1=0;\quad x=\dfrac{1}{2}$

Con $a=-1$ *l'equazione diventa*: $2x+1=0;\quad x=-\dfrac{1}{2}$

La soluzione $x=\dfrac{1}{a+1}$ *non è accettabile se* $\dfrac{1}{a+1}=-1;\ \ 1=-a-1;\ \ \boxed{a=-2}$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" è $x=\left[\dfrac{1}{a-1}\right]_{a=-2}=\dfrac{1}{-2-1}=-\dfrac{1}{3}$

La soluzione $x=\dfrac{1}{a-1}$ *non è accettabile se* $\dfrac{1}{a-1}=-1;\ \ 1=-a+1;\ \ \boxed{a=0}$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" è $x=\left[\dfrac{1}{a+1}\right]_{a=0}=\dfrac{1}{0+1}=1$

15)

$(k-5)x+\dfrac{k-3}{x}=2(k-4);\qquad (k-5)x^2+k-3=2(k-4)x\quad x\neq 0;\qquad \boxed{(k-5)x^2-2(k-4)x+(k-3)=0}$

$$x_{1,2}\underset{k\neq5}{=}\frac{(k-4)\pm\sqrt{(k-4)^2-(k-5)(k-3)}}{k-5}=\frac{k-4\pm\sqrt{\cancel{k^2}\cancel{-8k}+16\cancel{-k^2}\cancel{+3k}\cancel{+5k}-15}}{k-5}=\frac{k-4\pm1}{k-5}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{\cancel{k-5}}{\cancel{k-5}}=\boxed{1}\\[2ex] \boxed{\dfrac{k-3}{k-5}}\end{array}\right.$$

Con $k=5$*, si ha* $\cancel{0\cdot x^2}-2x+2=0$ *con l'unica soluzione* $x=1$

La soluzione $x=1$ *è sempre accettabile, mentre l'altra soluzione* $x=\dfrac{k-3}{k-5}$

è accettabile purché non sia nulla, ossia con $k\neq 3$*; nel caso particolare* $k=3$ *risulta non accettabile*

17)

$$\frac{x}{2x-3}+3\cdot\frac{h^2}{(x-2)(2x-3)}=2\cdot\frac{h}{x-2}$$

$$\frac{x^2-2x+3h^2}{\cancel{(x-2)(2x-3)}}=\frac{4hx-6h}{\cancel{(x-2)(2x-3)}}\quad x\neq 2,\ x\neq\frac{3}{2}$$

$$x^2-2x-4hx+3h^2+6h=0$$

$$x^2-2x(1+2h)+3h^2+6h=0$$

$$x_{1,2}=1+2h\pm\sqrt{1+4h+4h^2-3h^2-6h}=1+2h\pm\sqrt{h^2-2h+1}=$$

$$=1+2h\pm\sqrt{(h-1)^2}=1+2h\pm(h-1)=\left\langle\begin{matrix}h+2\\3h\end{matrix}\right.$$

$$h+2=2\quad h=0\qquad\qquad h+2=\frac{3}{2}\quad h=-\frac{1}{2}$$

$$3h=2\quad h=\frac{2}{3}\qquad\qquad 3h=\frac{3}{2}\quad h=\frac{1}{2}$$

In definitiva,

con $h=0$ *l'equazione ha una sola soluzione* $(x=0)$

con $h=-\frac{1}{2}$ *l'equazione ha una sola soluzione* $(x=-\frac{3}{2})$

con $h=\frac{2}{3}$ *l'equazione ha una sola soluzione* $(x=\frac{8}{3})$

con $h=\frac{1}{2}$ *l'equazione ha una sola soluzione* $(x=\frac{5}{2})$

mentre con $h\neq 0,\ h\neq\pm\frac{1}{2},\ h\neq\frac{2}{3}$ *le soluzioni sono due*: $x=h+2,\ x=3h$

19)

$$\frac{x}{x-q}+\frac{q^2-3}{x^2-3qx+2q^2}=\frac{2}{2q-x}$$

$$\frac{x}{x-q}+\frac{q^2-3}{(x-q)(x-2q)}=-\frac{2}{x-2q}$$

$$\frac{x^2-2qx+q^2-3}{\cancel{(x-q)(x-2q)}}=\frac{-2x+2q}{\cancel{(x-q)(x-2q)}}\quad x\neq q,\ x\neq 2q$$

$$x^2-2qx+2x+q^2-2q-3=0$$

$$x^2-2x(q-1)+q^2-2q-3=0$$

$$x_{1,2}=q-1\pm\sqrt{(q-1)^2-(q^2-2q-3)}=q-1\pm\sqrt{\cancel{q^2}\cancel{-2q}+1\cancel{-q^2}\cancel{+2q}+3}=q-1\pm 2=\left\langle\begin{matrix}q-3\\q+1\end{matrix}\right.$$

$q-3=q$ *imposs.*

$q-3=2q\quad q=-3$

$q+1=q$ *imposs.*

$q+1=2q\quad q=1$

Con $q\neq -3,\ q\neq 1$: $x=q-3,\ x=q+1$

Con $q=-3$ *una sola soluzione* $(x=-2)$

Con $q=1$ *una sola soluzione* $(x=-2)$

21)

$$1+\frac{3a+1}{a(x-3)}+\frac{2x^2(a-1)}{(x-3)^2}+\frac{4}{a(x-3)^2}=0$$

$$\frac{a(x-3)^2+(3a+1)(x-3)+2ax^2(a-1)+4}{\cancel{a(x-3)^2}}=0 \quad (a\neq 0, \quad x\neq 3)$$

$$\underline{ax^2}\,\underline{\underline{-6ax}}\cancel{+9a}\,\underline{\underline{+3ax}}\cancel{-9a}+x-3+2a^2x^2\underline{-2ax^2}+4=0$$

$$2a^2x^2-ax^2-3ax+x+1=0$$

$$a(2a-1)x^2-(3a-1)x+1=0$$

$$x_{1,2}\underset{\substack{a\neq 0,\\ a\neq\frac{1}{2}}}{=}\frac{3a-1\pm\sqrt{(3a-1)^2-4a(2a-1)}}{2a(2a-1)}=$$

$$=\frac{3a-1\pm\sqrt{9a^2-6a+1-8a^2+4a}}{2a(2a-1)}=$$

$$=\frac{3a-1\pm\sqrt{a^2-2a+1}}{2a(2a-1)}=$$

$$=\frac{3a-1\pm\sqrt{(a-1)^2}}{2a(2a-1)}=$$

$$=\frac{3a-1\pm(a-1)}{2a(2a-1)}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{3a\cancel{-1}-a\cancel{+1}}{2a(2a-1)}=\dfrac{\cancel{2a}}{\cancel{2a}(2a-1)}=\dfrac{1}{2a-1}\\[2ex] \dfrac{3a-1+a-1}{2a(2a-1)}=\dfrac{4a-2}{2a(2a-1)}=\dfrac{\cancel{2}\cancel{(2a-1)}}{\cancel{2}a\cancel{(2a-1)}}=\dfrac{1}{a}\end{array}\right.$$

Con $a=0$ *l'equazione diventerebbe priva di significato*

Con $a=\frac{1}{2}$ *l'equazione diventa:* $-\left(\frac{3}{2}-1\right)x+1=0; \quad -\frac{1}{2}x+1=0; \quad x=2$

La soluzione $x=\frac{1}{2a-1}$ *risulta non accettabile se*

$$\frac{1}{2a-1}=3; \quad 1=6a-3; \quad -6a=-4; \quad 6a=4; \quad a=\frac{2}{3}$$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" vale $x=\left[\frac{1}{a}\right]_{a=\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

La soluzione $x=\frac{1}{a}$ *risulta non accettabile se*

$$\frac{1}{a}=3; \quad 1=3a; \quad a=\frac{1}{3}$$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" vale $x=\left[\frac{1}{2a-1}\right]_{a=\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}-1}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-3$

23)

$$m+2\frac{m^2-x}{x-m}-\frac{m}{x}\cdot\frac{3x+m}{x-m}=0; \qquad m+\frac{2m^2-2x}{x-m}-\frac{3mx+m^2}{x(x-m)}=0$$

$$\frac{mx(x-m)+x(2m^2-2x)-(3mx+m^2)}{x(x-m)}=0;$$

$$\frac{mx^2-m^2x+2m^2x-2x^2-3mx-m^2}{\cancel{x(x-m)}}=0 \qquad (x\neq 0,\ \ x\neq m)$$

$$mx^2-2x^2+m^2x-3mx-m^2=0$$

$$(m-2)x^2+m(m-3)x-m^2=0$$

$$x_{1,2}\underset{m\neq 2}{=}\frac{-m(m-3)\pm\sqrt{\left[m(m-3)\right]^2+4m^2(m-2)}}{2(m-2)}=\frac{-m(m-3)\pm\sqrt{m^2(m^2-6m+9)+4m^3-8m^2}}{2(m-2)}=$$

$$=\frac{-m(m-3)\pm\sqrt{m^4-6m^3+9m^2+4m^3-8m^2}}{2(m-2)}=\frac{-m(m-3)\pm\sqrt{m^4-2m^3+m^2}}{2(m-2)}=$$

$$=\frac{-m(m-3)\pm\sqrt{(m^2-m)^2}}{2(m-2)}=\frac{-m^2+3m\pm(m^2-m)}{2(m-2)}=$$

$$=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-m^2+3m-m^2+m}{2(m-2)}=\dfrac{-2m^2+4m}{\cancel{2}(m-2)}=\dfrac{-\cancel{2}m\,\cancel{(m-2)}}{\cancel{2}\,\cancel{(m-2)}}=-m\\[2ex]\dfrac{\cancel{-m^2}+3m\cancel{+m^2}-m}{2(m-2)}=\dfrac{\cancel{2}m}{\cancel{2}(m-2)}=\dfrac{m}{m-2}\end{array}\right.$$

Se $m=2$ *l'equazione diventa*: $(2-2)x^2+2(2-3)x-2^2=0; \quad -2x-4=0; \quad 2x+4=0; \quad x=-2$

La soluzione $x=-m$ *non è accettabile se*

$-m=0; \quad m=0$ *oppure* $-m=m; \quad 2m=0; \quad m=0$

La soluzione $x=\dfrac{m}{m-2}$ *non è accettabile se*

$\dfrac{m}{m-2}=0; \quad m=0$ *oppure*

$\dfrac{m}{m-2}=m; \quad m=m^2-2m; \quad -m^2+3m=0; \quad m^2-3m=0; \quad m(m-3)=0; \quad m=0 \vee m=3$

Ricapitolando:

con $m=2$ *si ha* 1 *sola soluzione*: $x=-2$

con $m=3$ *si ha* 1 *sola soluzione*: $x=\left[-m\right]_{m=3}=-3$

con $m=0$ *l'equazione è impossibile* ($x_1=x_2=0$ *non accettabile*)

25)

$$p(p+1)\left(x^2-1\right)+(2p+1)x=0; \quad \left(p^2+p\right)\left(x^2-1\right)+2px+x=0$$

$$p^2x^2-p^2+px^2-p+2px+x=0; \quad p^2x^2+px^2+2px+x-p^2-p=0$$

$$\boxed{p(p+1)x^2+(2p+1)x-p(p+1)=0}$$

$$x_{1,2} \underset{\substack{p\neq 0\\ p\neq -1}}{=} \frac{-2p-1\pm\sqrt{(2p+1)^2+4p^2(p+1)^2}}{2p(p+1)}=\frac{-2p-1\pm\sqrt{4p^2+4p+1+4p^4+8p^3+4p^2}}{2p(p+1)}=$$

$$=\frac{-2p-1\pm\sqrt{4p^4+8p^3+8p^2+4p+1}}{2p(p+1)}=\frac{-2p-1\pm\sqrt{4p^4+4p^2+1+8p^3+4p^2+4p}}{2p(p+1)}=$$

$$=\frac{-2p-1\pm\sqrt{\left(2p^2+2p+1\right)^2}}{2p(p+1)}=\frac{-2p-1\pm\left(2p^2+2p+1\right)}{2p(p+1)}$$

$$x_1=\frac{-2p-1-2p^2-2p-1}{2p(p+1)}=\frac{-2p^2-4p-2}{2p(p+1)}=\frac{-\cancel{2}\left(p^2+2p+1\right)}{\cancel{2}p(p+1)}=-\frac{(p+1)^{\cancel{2}}}{p\cancel{(p+1)}}=\boxed{-\frac{p+1}{p}}$$

$$x_2=\frac{\cancel{-2p}\cancel{-1}+2p^2\cancel{+2p}\cancel{+1}}{2p(p+1)}=\frac{\cancel{2}p^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{p}(p+1)}=\boxed{\frac{p}{p+1}}$$

$Con\ \ p=0\ l'equazione\ diventa: x=0$

$Con\ \ p=-1\ l'equazione\ diventa: -x=0,\ x=0$