EQUAZIONI IRRAZIONALI - CORREZIONE

9)

$$\frac{2\sqrt{3-x}+1}{x}=3$$

$$2\sqrt{3-x}+1=3x \quad \left(\begin{array}{c} x\neq 0, \text{ perché moltiplicando per } x \\ \text{il denominatore } x \text{ se n'è andato...}\end{array}\right)$$

$$2\sqrt{3-x}=3x-1 \qquad \left(2\sqrt{3-x}\right)^2=(3x-1)^2 \qquad 4(3-x)=9x^2-6x+1$$

$$12-4x=9x^2-6x+1 \qquad 9x^2-2x-11=0 \qquad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+99}}{9}=\frac{1\pm\sqrt{100}}{9}=\frac{1\pm 10}{9}=\left\langle \begin{array}{l} \cancel{-1} \text{ non acc.} \\ \boxed{\frac{11}{9}} \end{array}\right.$$

10)

$$2\left(2\sqrt{x-1}+1\right)=x \qquad 4\sqrt{x-1}+2=x \qquad 4\sqrt{x-1}=x-2 \qquad \left(4\sqrt{x-1}\right)^2=(x-2)^2$$

$$16(x-1)=x^2-4x+4 \qquad 16x-16=x^2-4x+4$$

$$x^2-20x+20=0 \qquad x_{1,2}=10\pm\sqrt{100-20}=10\pm\sqrt{80}=10\pm\sqrt{16\cdot 5}=10\pm 4\sqrt{5}$$

Controllo di accettabilità:

effettuiamolo sul passaggio $\boxed{4\sqrt{x-1}=x-2}$, *che precede l'elevamento al quadrato.*

Con la sostituzione $x=10-4\sqrt{5}$ *abbiamo*

$$4\sqrt{10-4\sqrt{5}-1}=10-4\sqrt{5}-2$$

da cui si vede subito che il valore non è accettabile, perché il secondo membro è negativo, e una radice quadrata non può avere valore negativo.

Con la sostituzione $x=10+4\sqrt{5}$ *abbiamo*

$$4\sqrt{10+4\sqrt{5}-1}=10+4\sqrt{5}-2$$

$$4\sqrt{9+4\sqrt{5}}=8+4\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}=4\left(2+\sqrt{5}\right) \text{ ok}$$

L'equazione ammette dunque la soluzione $\boxed{x=10+4\sqrt{5}}$

12)

$$\sqrt[3]{x^3-4}+2=x$$

$$\sqrt[3]{x^3-4}=x-2$$

$$\left(\sqrt[3]{x^3-4}\right)^3=(x-2)^3$$

$$\cancel{x^3}-4=\cancel{x^3}-6x^2+12x-8$$

$$6x^2-12x+4=0$$

$$3x^2-6x+2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{3}=\boxed{\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}}$$

Le soluzioni trovate sono certamente accettabili in quanto non abbiamo elevato ad esponente pari, ma dispari.

18)

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$

$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2$

$\cancel{x}\cancel{+1}+x\cancel{-1}+2\sqrt{x^2-1}=\cancel{x}$

$2\sqrt{x^2-1}=-x$

$\left(2\sqrt{x^2-1}\right)^2=(-x)^2$

$4\left(x^2-1\right)=x^2$

$4x^2-4=x^2$

$3x^2=4$

$x^2=\frac{4}{3}$

$x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\cancel{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}}$ *entrambe non accettabili*

26)

$1+3\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{3x^2+1}$

$\left(1+3\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left(2\sqrt{3x^2+1}\right)^2$

$1+9\left(x^2+1\right)+6\sqrt{x^2+1}=4\left(3x^2+1\right)$

$1+9x^2+9+6\sqrt{x^2+1}=12x^2+4$

$\cancel{6}^2\sqrt{x^2+1}=\cancel{3}x^2-\cancel{6}^2$

$\left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left(x^2-2\right)^2$

$4\left(x^2+1\right)=x^4-4x^2+4$

$4x^2\cancel{+4}=x^4-4x^2\cancel{+4}$

$x^4-8x^2=0;\quad x^2\left(x^2-8\right)=0;\quad x^2=0\ \vee\ x^2=8$

$\cancel{x=0}\ \vee\ x=\pm\sqrt{8}=\boxed{\pm2\sqrt{2}}$

non acc.

30)

$\sqrt[3]{x^4+6x^2}=3$

$\left(\sqrt[3]{x^4+6x^2}\right)^3=3^3$

$x^4+6x^2=27$

$x^4+6x^2-27=0$

$\left(x^2+9\right)\left(x^2-3\right)=0$

$x^2+9=0$ *impossibile*

$x^2-3=0$

$x^2=3$

$\boxed{x=\pm\sqrt{3}}$ *certamente accettabili* (*esponente dispari*)

32)

$\sqrt[4]{x}-\sqrt{2x-1}=0$

$\sqrt[4]{x}=\sqrt{2x-1}$

$\left(\sqrt[4]{x}\right)^4=\left(\sqrt{2x-1}\right)^4$

$x=(2x-1)^2$

$x=4x^2-4x+1;\quad 4x^2-5x+1=0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{5\pm3}{8}=\begin{cases}\cancel{\frac{1}{4}} & \textit{non acc.}\\ \boxed{1}\end{cases}$

33)

$\sqrt[6]{x}=10-\sqrt{x}$

$\sqrt[6]{x}=t\rightarrow\sqrt{x}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=t^3$

$t=10-t^3$

$t^3+t-10=0$

Ruffini, per la scomposizione: $P(2)=0$

... $(t-2)\left(t^2+2t+5\right)=0\qquad t=2\ \vee\ t^2+2t+5=0$

impossibile $(\Delta<0)$

$\sqrt[6]{x}=2\rightarrow\boxed{x=2^6=64}$ *accettabile*

34)

$$\sqrt[8]{x}+\sqrt{x}=2\sqrt[4]{x}$$

$$\boxed{\sqrt[8]{x}=t} \to \begin{matrix} \left(\sqrt[8]{x}\right)^2=t^2,\ \sqrt[4]{x}=t^2 \\ \left(\sqrt[8]{x}\right)^4=t^4,\ \sqrt{x}=t^4 \end{matrix}$$

$$t+t^4=2t^2$$

$$t^4-2t^2+t=0$$

$$t\left(t^3-2t+1\right)=0$$

$$\boxed{t=0}$$

$$t^3-2t+1=0 \quad P(1)=0 \quad (t-1)\left(t^2+t-1\right)=0$$

$$\boxed{t=1},\ \boxed{t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$$

$$\sqrt[8]{x}=0\to\boxed{x=0}\ \ acc.$$

$$\sqrt[8]{x}=1\to\boxed{x=1}\ \ acc.$$

$\sqrt[8]{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *impossibile: una radice ottava non può avere valore negativo*

$$\sqrt[8]{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\to\boxed{x=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8}$$

accettabile, perché l'uguaglianza

$$\sqrt[8]{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8}=2\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8}$$

è vera, come si vede dai seguenti passaggi:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\left(\sqrt{5}\right)^4-4\cdot\left(\sqrt{5}\right)^3+6\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2-4\cdot\sqrt{5}+1}{16}=2\cdot\frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{25-20\sqrt{5}+30-4\sqrt{5}+1}{16}=\cancel{2}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{\cancel{4}_{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\cancel{56}^{7}-\cancel{24}^{3}\sqrt{5}}{\cancel{16}_{2}}=\frac{6-2\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1+7-3\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{2},\ ok$$

La verifica di accettabilità, a ben guardare, non era necessaria!
Infatti l'equazione data $\sqrt[8]{x}+\sqrt{x}=2\sqrt[4]{x}$ *coincide con l'equazione*
$t+t^4=2t^2$*, avendo posto* $\sqrt[8]{x}=t$.
Quindi le soluzioni dell'equazione $\sqrt[8]{x}+\sqrt{x}=2\sqrt[4]{x}$
sono esattamente quei valori di x *per cui vale l'uguaglianza* $\sqrt[8]{x}=t$,
essendo t *una soluzione della* $t+t^4=2t^2$:
ma affinché un'uguaglianza del tipo $\sqrt[8]{x}=t$ *possa,*
per un opportuno valore di x*, avere senso,*
occorre e basta che t *sia* ≥ 0.

55)

$$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{5\sqrt{x}+1}{x-1} \qquad \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{5\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\sqrt{x}}{\cancel{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}}=\frac{5\sqrt{x}+1}{\cancel{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}} \quad \textit{condizione}: x\neq 1\,(\textit{NOTA})$$

NOTA

$\sqrt{x}+1\neq 0 \quad \sqrt{x}\neq -1$ *è sempre verificata* (*una radice quadrata non può avere risultato negativo*)

$\sqrt{x}-1\neq 0 \quad \sqrt{x}\neq 1 \quad x\neq 1$

$$x+2\sqrt{x}\cancel{+\sqrt{x}}+2+x\cancel{-\sqrt{x}}=5\sqrt{x}+1 \qquad -3\sqrt{x}=-1-2x \quad 3\sqrt{x}=1+2x \quad \left(3\sqrt{x}\right)^2=(1+2x)^2$$

$$9x=1+4x+4x^2 \quad 4x^2-5x+1=0 \quad 4x^2-4x-x+1=0 \quad 4x(x-1)-(x-1)=0$$

$$(x-1)(4x-1)=0 \qquad \underbrace{\cancel{x=1}}_{\textit{non acc.}} \;\vee\; \boxed{x=1/4}$$

73)

$$\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}=3$$

$$\left(\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}\right)^3=3^3$$

$$\left(\sqrt[3]{6+x}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{6+x}\right)^2\cdot\sqrt[3]{3-x}+3\cdot\sqrt[3]{6+x}\cdot\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3=27$$

$$6\cancel{+x}+3\cdot\sqrt[3]{6+x}\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}\right)}_{=3}+3\cancel{-x}=27$$

$$6+9\cdot\sqrt[3]{6+x}\cdot\sqrt[3]{3-x}+3=27$$

$$9\cdot\sqrt[3]{6+x}\cdot\sqrt[3]{3-x}=18$$

$$\sqrt[3]{6+x}\cdot\sqrt[3]{3-x}=2$$

$$\left(6+x\right)\left(3-x\right)=8$$

$$18-6x+3x-x^2=8$$

$$-x^2-3x+10=0$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$x=-5 \vee x=2$$