

43)

$$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0} > 0$$

=0 solo per x=1 =0 solo per x=2

Elevando qualsiasi numero reale al quadrato
(e in un contesto di disuguaglianze e disequazioni
i numeri *complessi* sono *esclusi a priori*)
si ottiene sempre un risultato non negativo, ≥ 0 :
per la precisione

- il risultato dell'elevamento al quadrato è proprio 0 se e solo se è =0 la base,
- altrimenti il risultato sarà >0 .

Allora **una somma di due quadrati è quasi sempre >0 ,
e potrà essere =0 solo ed unicamente nel caso in cui
siano =0 le basi di entrambi i quadrati simultaneamente.**

Nel nostro esercizio ciò non può avvenire, perché

- la prima base si annulla solo quando $x = 1$,
- la seconda solo quando $x = 2$

per cui non esiste nessun valore di x per il quale
le due basi, e quindi i due quadrati, si annullino contemporaneamente.

In definitiva **la nostra disequazione è verificata SEMPRE, $\forall x$.**

44)

$$(x-1)^3 + (x-2)^3 > 0$$

$$(x-1)^3 > -(x-2)^3$$

$$(x-1)^3 > (2-x)^3$$

Ricordiamo che in una disequazione è SEMPRE lecito
estrarre le radici con lo stesso indice DISPARI
di entrambi i membri, indipendentemente dal segno di questi.

Allora:

$$\sqrt[3]{(x-1)^3} > \sqrt[3]{(2-x)^3}$$

$$x-1 > 2-x$$

(sappiamo che con indice dispari
NON va fatto intervenire il valore assoluto nel risultato)

$$2x > 3$$

$$x > \frac{3}{2}$$

45)

$$(x+1)^2 + (x^2-1)^2 \leq 0$$

≥ 0 ≥ 0
=0 solo =0 solo
per $x=-1$ per $x=\pm 1$

Elevando qualsiasi numero reale al quadrato si ottiene sempre un risultato non negativo, ≥ 0 :
precisamente,

- il risultato dell'elevamento al quadrato è proprio 0 se e solo se è =0 la base,
- altrimenti il risultato sarà >0 .

Allora una *somma* di due quadrati non può mai essere <0 (quindi diciamo che la "disequazione col $<$ " è *impossibile*, non ha soluzioni), e potrà essere =0 solo ed unicamente nel caso in cui siano =0 le basi di *entrambi* i quadrati *simultaneamente*.

Nel nostro esercizio

- la prima base, e quindi il primo quadrato, si annulla quando $x = -1$,
- la seconda quando $x = -1 \vee x = 1$

perciò le due basi, e quindi i due quadrati, si annullano contemporaneamente per $x = -1$ e questo valore è dunque l'unica soluzione della disequazione proposta.

54)

$$(4x+1)^4 < 3$$

In una disequazione si possono estrarre le radici con indice PARI dei due membri SOLO nel caso in cui questi siano *entrambi* $\geq 0 \forall x \dots$
... ora, in questo esercizio tale condizione è appunto soddisfatta.

Allora:

$$\sqrt[4]{(4x+1)^4} < \sqrt[4]{3}$$

$$|4x+1| < \sqrt[4]{3} \quad \left(\text{ricordiamo che } \sqrt[4]{a^4} = |a| \right)$$

Ora, il valore assoluto di un numero esprime la distanza dall'origine del punto che, sulla *number line*, corrisponde a quel numero.

E detta p una qualunque costante positiva, si ha perciò

$$|t| < p$$

se e solo se

$$-p < t < p$$

Quindi

$$|4x+1| < \sqrt[4]{3}$$

equivale a

$$-\sqrt[4]{3} < 4x+1 < \sqrt[4]{3}$$

Sottraiamo 1 da tutti gli anelli della catena:

$$-\sqrt[4]{3} - 1 < 4x < \sqrt[4]{3} - 1$$

Dividiamo tutto per 4:

$$\frac{-\sqrt[4]{3}-1}{4} < x < \frac{\sqrt[4]{3}-1}{4}$$
$$\frac{\sqrt[4]{3}+1}{4}$$

55)

$$(1-x)^6 < 64$$

In una disequazione si possono estrarre le radici con indice PARI dei due membri SOLO nel caso in cui questi siano entrambi $\geq 0 \forall x \dots$ ora, in questo esercizio tale condizione è appunto soddisfatta.

Allora:

$$\sqrt[6]{(1-x)^6} < \sqrt[6]{64}$$

$$|1-x| < 2 \quad \left(\text{ricordiamo che } \sqrt[6]{a^6} = |a| \right)$$

$$-2 < 1-x < 2$$

Sottraiamo 1 da tutti gli anelli della catena:

$$-3 < -x < 1$$

Cambiamo segni e verso:

$$3 > x > -1$$

Riscriviamo da destra a sinistra:

$$-1 < x < 3$$

OSSERVAZIONE

I passaggi finali sarebbero stati un poco più brevi se avessimo tenuto conto che

$$|1-x| = |x-1| \quad (\text{due numeri fra loro opposti hanno ugual valore assoluto})$$

Allora la

$$|1-x| < 2$$

avrebbe potuto essere riscritta come

$$|x-1| < 2 \quad (\text{col vantaggio di avere } x \text{ anziché } -x)$$

da cui

$$-2 < x-1 < 2$$

e aggiungendo 1 dappertutto

$$-1 < x < 3$$

56)

$$(4x-3)^4 > 81$$

In una disequazione si possono estrarre le radici con indice PARI dei due membri SOLO nel caso in cui questi siano entrambi $\geq 0 \forall x \dots$ ora, in questo esercizio tale condizione è appunto soddisfatta.

$$\text{Allora: } \sqrt[4]{(4x-3)^4} > \sqrt[4]{81}$$

$$|4x-3| > 3 \quad \left(\text{ricordiamo che } \sqrt[4]{a^4} = |a| \right)$$

Ora, il valore assoluto di un numero esprime la distanza dall'origine del punto che, sulla number line, corrisponde a quel numero.

E detta p una qualunque costante positiva, si ha $|t| > p$ se e solo se $t < -p \vee t > p$

Quindi

$$4x-3 < -3 \vee 4x-3 > 3$$

$$4x < 0 \vee 4x > 6$$

$$x < 0 \vee x > \frac{3}{2}$$