SISTEMI (SECONDA PARTE)

1. SISTEMI IMPOSSIBILI E INDETERMINATI

Osserva bene il seguente sistema: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=14 \end{cases}$

Che ne dici? Non ti sembra che abbia qualcosa di "strano"? …

Se rifletti attentamente, scoprirai che le due equazioni che lo compongono
sono **incompatibili**, sono in contraddizione l'una con l'altra,
e non possono quindi essere verificate "contemporaneamente" (= da una stessa coppia *x*, *y*).
Infatti, $6x+3y$ è il triplo di $2x+y$, mentre 14 NON è il triplo di 10.
Se una data coppia $(x,\ y)$ è tale che per essa risulti $2x+y=10$,
allora per la stessa coppia $(x,\ y)$ varrà l'uguaglianza $6x+3y=3(2x+y)=3\cdot 10=30$
e quindi NON potrà valere la $6x+3y=14$.
Insomma, se una data coppia $(x,\ y)$ verifica la prima equazione del sistema,
allora non potrà mai verificare la seconda.
Non esiste dunque nessuna coppia $(x,\ y)$ che soddisfi simultaneamente
sia l'una che l'altra equazione del sistema.
Quest'ultimo è IMPOSSIBILE (= privo di soluzioni).

L'impossibilità del sistema in esame è legata al fatto che, mentre i coefficienti di *x* e di *y*
nella seconda equazione sono ciascuno il triplo del coefficiente corrispondente nella prima equazione
(6 è il triplo di 2, e 3 è il triplo di 1), invece il termine noto 14 NON è il triplo di 10.

Generalizzando, si riconosce facilmente che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

risulta **IMPOSSIBILE** (= privo di soluzioni) ogniqualvolta accade che

(1) $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}}$

cioè **i coefficienti delle incognite sono proporzionali fra loro, ma non coi termini noti del sistema**.

Invece si può vedere che il sistema seguente: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=30 \end{cases}$

è INDETERMINATO, vale a dire: è verificato da INFINITE coppie $(x,\ y)$. Infatti,
la 2^a equazione non è altro che la 1^a moltiplicata per 3, quindi è sostanzialmente una ripetizione della 1^a.
Ma allora è come se avessimo soltanto l'equazione $2x+y=10$, e **una sola equazione**
(salvo casi eccezionali) non è sufficiente a determinare in modo unico i valori di due incognite.
La "nostra" equazione $2x+y=10$ è verificata, ad esempio, dalla coppia $x=3,\ y=4$;
ma è verificata pure dalle coppie $x=-1,\ y=12;\quad x=1/2,\ y=9;\quad x=8,\ y=-6;$ ecc. ecc. ecc.
Noi possiamo divertirci a costruire tante coppie $(x,\ y)$, soluzioni della $2x+y=10$, quante ne desideriamo.
A tale scopo ci basterà riscrivere la $2x+y=10$ sotto la forma $y=10-2x$:
comprenderemo così che la $2x+y=10$ è verificata da tutte le coppie costruibili
assegnando a *x* un valore a piacere, poi calcolando *y* mediante la formula $y=10-2x$.
Ad esempio, ponendo $x=2$, si ottiene $y=10-2x=10-4=6$:
ecco che la coppia $(2,\ 6)$ è soluzione della nostra equazione.
Ponendo invece $x=-1$, otteniamo $y=10-2x=10+2=12$:
bene, la coppia $(-1,\ 12)$ è un'altra soluzione della nostra equazione.

Il sistema proposto $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 6x+3y=30 \end{cases}$,

che equivale alla sola equazione $2x+y=10$
(perché l'altra, come già osservato, è una "ripetizione" di questa)
ha dunque infinite soluzioni, riassumibili con la scrittura $\begin{cases} x \ \textit{qualsiasi} \\ y=10-2x \end{cases}$.

Notiamo bene che **le soluzioni sono infinite, ma non qualsiasi**:
infatti, per scrivere una coppia-soluzione, è vero che noi possiamo fissare *x* a nostro piacere,
ma poi non potremo abbinare al valore di *x* scelto un valore di *y* arbitrario,
bensì dovremo calcolare *y* proprio mediante la formula specifica $y=10-2x$.

Generalizzando quanto detto, comprendiamo che un sistema della forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

è certamente **INDETERMINATO** (= dotato di infinite soluzioni) nel caso si abbia

(2) $\boxed{\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}}$ (**coefficienti delle incognite proporzionali fra loro E coi termini noti**).

Attenzione però**: le condizioni (1), (2)**
non sono le uniche circostanze sotto le quali un sistema può risultare impossibile o indeterminato.

Consideriamo infatti ad esempio il caso seguente:

$$\begin{cases} 0\cdot x+y=4 \\ 0\cdot x+2y=8 \end{cases}$$

E' evidente che il sistema in esame è indeterminato:
si osserva che è verificato da tutte le infinite coppie $(x,\ y)$ con x qualsiasi, $y=4$,
tuttavia i suoi coefficienti NON soddisfano alla condizione (2):
infatti lo zero a denominatore non ha significato.

Ancora: se prendiamo il sistema

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 3(x-2y)+2(x+y+2)=5x-4(y-3) \end{cases}$$

e svolgiamo i calcoli nella seconda equazione, troveremo $\cancel{3x}\ \cancel{-6y}\ \cancel{+2x}\ \cancel{+2y}+4=\cancel{5x}\ \cancel{-4y}+12$
e vedremo così che tale equazione è IMPOSSIBILE, cioè non è verificata da nessuna coppia $(x,\ y)$.
Pertanto non può esistere, a maggior ragione, nessuna coppia $(x,\ y)$
che verifichi sia l'una che l'altra equazione del sistema proposto: questo è dunque IMPOSSIBILE.

Se invece avessimo una situazione come la seguente:

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 2(x+y+1)=3x-(x-2y-2) \end{cases}$$

ci troveremmo di fronte ad una seconda equazione indeterminata, ossia verificata da *qualsiasi* coppia $(x,\ y)$.
Ma un'equazione indeterminata è come se non ci fosse, perché non pone alcun vincolo ad x e y.
Rimane solo la prima equazione, e, come abbiamo già visto, una sola equazione in due incognite
non individua queste in modo univoco, ma lascia aperte infinite possibilità.

Il nostro sistema è verificato dalle infinite coppie $(x,\ y)$ con $\begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y=\dfrac{x-4}{3} \end{cases}$ ed è perciò INDETERMINATO.

Senza pretendere affatto di esaurire l'argomento
(la teoria dei sistemi "lineari" ossia di 1° grado, che è coronata dal grande Teorema di Rouché-Capelli
di cui ci occuperemo in un capitolo del Volume 2, non è semplicissima),
ci limitiamo qui solo a un paio di indicazioni generali:

- **Un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è "determinato", cioè ha regolarmente una e una sola soluzione (NOTA), se e solo se il determinante (pag. 201) dei coefficienti delle incognite, quello che nella regola di Cramer (pag. 202) è indicato con D, è diverso da zero. Quando invece tale determinante è uguale a zero, allora si ha un caso "speciale", che potrà essere di impossibilità o di indeterminazione (bisognerà valutare di volta in volta).**

NOTA: l'aggettivo "**determinato/a**", riferito a un sistema o a una singola equazione, significa:
"**dotato/a di un numero *finito e non nullo* di soluzioni**".
Quando il sistema, o l'equazione, è di 1° grado, nel caso ciò avvenga la soluzione è *unica*.

- **Per scoprire se un sistema di 1° grado a n equazioni ed n incognite è determinato, indeterminato o impossibile si può dunque calcolarne il determinante D. Oppure, in alternativa, si può procedere, coi metodi di sostituzione o di riduzione, fino a giungere ad una equazione in una sola incognita: si tratta poi di risolvere questa e di trarre le conclusioni opportune.**

Gli ESERCIZI su questo paragrafo si trovano a pag. 410.