PROBLEMI IN PIU' INCOGNITE - SISTEMI DI EQUAZIONI

1. I SISTEMI DI EQUAZIONI E IL METODO DI "SOSTITUZIONE"

❑ PROBLEMA SVOLTO 1

Trovare due numeri interi sapendo che:
- **se si diminuisce il più grande di 4 unità e si aumenta di 3 unità il più piccolo, il prodotto dei due numeri diminuisce di 8 unità;**
- **se si divide la somma dei due numeri per la loro differenza si ottiene quoziente 6 e resto 2.**

E' subito evidente **la grande difficoltà a cui si andrebbe incontro se si cercasse di risolvere con una sola incognita**.
Infatti, riflettiamo: qualunque numero fra i due decidessimo di indicare con *x*, come faremmo poi ad esprimere l'altro numero per mezzo di *x* ? Sarebbe un bel grattacapo!!!

Pertanto **imposteremo questo problema con DUE INCOGNITE anziché con una sola**.

Quando si risolve con più di una incognita (e ciò è opportuno specialmente quando non è facile esprimere tutte le quantità in gioco in funzione di una sola di esse) si scrivono tante equazioni quante sono le incognite poste e le si riunisce entro una "graffa di sistema", che equivale, dal punto di vista logico, a un connettivo "ET".

Risolvere un sistema significa determinare quei valori delle incognite in gioco che soddisfano CONTEMPORANEAMENTE TUTTE le equazioni da cui il sistema è formato.

RISOLUZIONE

x = numero più grande
y = numero più piccolo

$$\boxed{\begin{cases}(x-4)(y+3)=xy-8\\ 6(x-y)+2=x+y\end{cases}}$$

NOTA *a:b dà* 6 *col resto di* 2 *quando* $6b+2=a$ (*e* $2<b$)

Innanzitutto, svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in "**FORMA NORMALE**".
Ciò significa che, in ciascuna equazione, dovremo fare in modo di avere:
- **a primo membro, un termine per ognuna delle incognite poste;**
- **a secondo membro, il termine noto.**

$$\begin{cases}\cancel{xy}+3x-4y-12=\cancel{xy}-8\\ 6x-6y+2=x+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-4y=-8+12\\ 6x-x-6y-y=-2\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}3x-4y=4\\ 5x-7y=-2\end{cases}\quad \textbf{FORMA NORMALE}}$$

A questo punto, possiamo proseguire scegliendo a piacere fra:
1) **il metodo di sostituzione** (*il più semplice e generale*)
2) **il metodo di riduzione** (*molto brillante e divertente*)
3) **il metodo di Cramer** (*basato sui "determinanti", completamente "meccanico"; pagg. 201 … 203*)
4) **il metodo del confronto** (*applicabile solo con 2 equazioni e 2 incognite; vedi pag. 200*)

Occupiamoci innanzitutto del metodo 1).

Il metodo di **SOSTITUZIONE** consiste nell'**isolare un'incognita da una delle due equazioni per sostituire poi** l'espressione così ottenuta **nell'altra equazione, che in tal modo si troverà a contenere un'incognita sola**.

$$\begin{cases} 3x-4y=4 \\ 5x-7y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x=4y+4; \quad x=\dfrac{4y+4}{3} \quad (*) \\ 5\cdot\dfrac{4y+4}{3}-7y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4y+4}{3} \\ \dfrac{20y+20}{3}-7y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4y+4}{3} \\ \dfrac{20y+20-21y}{\cancel{3}}=\dfrac{-6}{\cancel{3}} \ ; \ -y=-26 \ ; \ y=26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=26 \\ x=\dfrac{4y+4}{3}=\dfrac{4\cdot 26+4}{3}=\dfrac{104+4}{3}=\dfrac{108}{3}=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=36 \\ y=26 \end{cases}$$

VERIFICA sul sistema (**):

$$\begin{cases} (36-4)(26+3)=36\cdot 26-8 \\ 6(36-26)+2=36+26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32\cdot 29=936-8 \\ 6\cdot 10+2=62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 928=928 \\ 62=62 \end{cases} \quad OK!!!$$

La VERIFICA direttamente sul *problema*
(che poi è la più completa e “sicura”),
è lasciata al lettore.

(*)
♥ **Teoricamente si può isolare un’incognita qualsiasi da un’equazione qualsiasi, ma nella pratica converrà, per comodità di calcolo, privilegiare l’equazione più semplice e soprattutto il termine col coefficiente più semplice,** perché questo coefficiente è poi destinato a passare a denominatore! … E avere un denominatore piccolo è vantaggioso quando poi lo si manda via.

(**)
♥ La **VERIFICA**, in un sistema, si effettua sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite, i valori rispettivamente trovati.

TUTTE le equazioni devono trasformarsi in uguaglianze vere, altrimenti c’è qualcosa che non va.

Vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**? **DAVVERO UTILISSIMO**?

Falla sempre, questa verifica, alla fine della risoluzione! In questo modo sarai davvero sicuro di aver fatto giusto, oppure scoprirai inequivocabilmente che c’è un errore!!!

❑ PROBLEMA SVOLTO 2

Anna dice al fratello Bruno:
“Il numero dei miei fratelli è uguale al doppio del numero delle mie sorelle”.
E Bruno replica:
“Io, invece, ho tanti fratelli quante sorelle”.
Quanti figli maschi e quante figlie femmine ci sono in famiglia?

$x = numero\ \ figlie\ \ femmine$

$y = numero\ \ figli\ maschi$

$$\begin{cases} y=2(x-1) \\ y-1=x \end{cases}$$

NOTA
Il sistema ottenuto è molto elementare, e con un’equazione già nella forma $y=...$
In casi simili, si potrebbe anche evitare di portare in forma normale; tuttavia, l’abbiamo fatto ugualmente “per buona abitudine”, dato che nella maggioranza dei casi è utilissimo, anche in vista di altri metodi di risoluzione (riduzione, Cramer).

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ -x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=x+1 \\ -2x+x+1=-2; \ -x=-3; \ x=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=3 \\ y=x+1=3+1=4 \end{cases}$$

VERIFICA, direttamente sul problema

$$3\ \ femmine\ e\ 4\ maschi: \quad \underset{\text{ANNA}}{F} \quad F \quad F \quad M \quad M \quad M \quad \underset{\text{BRUNO}}{M}$$

Giusto: Anna può dire che il numero dei suoi fratelli è due volte quello delle sue sorelle ...
... e Bruno ha ragione quando afferma di avere tanti fratelli quante sorelle.