

4. PROPORZIONALITA' RISPETTO AL QUADRATO, E RISPETTO ALL'INVERSO DEL QUADRATO

Se lasciamo cadere un sassolino nel fiume da un viadotto molto alto, la legge che regola la caduta dei gravi ci dice che il sasso percorrerà uno spazio s dato da

$$s = 4,9 \cdot t^2 \quad (\text{spazio } s \text{ misurato in metri, tempo } t \text{ misurato in secondi): \text{quindi}}$$

dopo 1 secondo dall'inizio della caduta il sasso avrà percorso in discesa un tratto di $4,9 \cdot 1^2 = 4,9$ metri

dopo 2 secondi dall'inizio della caduta avrà percorso $4,9 \cdot 2^2 = 19,6$ metri

dopo 3 secondi avrà percorso $4,9 \cdot 3^2 = 44,1$ metri

eccetera.

Pertanto

se il tempo di caduta raddoppia, la distanza percorsa dall'oggetto è il quadruplo,

se il tempo di caduta triplica, la distanza percorsa risulta moltiplicata per 9, ecc.

Quando la legge che lega due grandezze x, y è della forma

$$y = kx^2$$

si dice che y è **DIRETTAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO** di x .

La legge di attrazione gravitazionale afferma che due masse m_1, m_2 esercitano sempre l'una sull'altra una forza di reciproca attrazione la cui intensità è data da

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

essendo G una costante della natura detta "costante di gravitazione universale", ed essendo d la distanza delle due masse.

Pertanto se la distanza raddoppia, la forza attrattiva si riduce alla quarta parte, se la distanza triplica, la forza attrattiva si riduce a 1/9 di quella iniziale, ecc.

La legge che lega F a d è quindi della forma $F = \frac{k}{d^2}$

Quando la legge che lega due grandezze x, y è della forma

$$y = \frac{k}{x^2} = k \cdot \frac{1}{x^2}$$

si dice che y è **INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO** di x
(= **PROPORZIONALE ALL'INVERSO DEL QUADRATO** di x).

ESEMPI (SUI VARI TIPI DI PROPORZIONALITA')

- Lo spazio s percorso da un corpo che, inizialmente fermo, viene lasciato cadere a terra per effetto della forza peso, è *direttamente proporzionale al quadrato* del tempo t di caduta, secondo la relazione

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

(g è costante: è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, uguale a $\approx 9,8$ m/s per ogni secondo).

Più in generale, qualunque corpo soggetto ad una forza costante F subisce una accelerazione costante a e se inizialmente (istante $t = 0$) era fermo, comincia a muoversi secondo la legge

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

- L'energia cinetica (= dovuta al movimento) di un corpo di massa m , che si muove con velocità v , è

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{NOTA: per indicare l'energia cinetica si possono utilizzare i simboli } E_c, E_k, K)$$

e risulta perciò *direttamente proporzionale al quadrato* della velocità.

- Una molla che sia stata allungata o compressa di una certa lunghezza x ha “immagazzinato energia”, ed è in grado di compiere un lavoro uguale al lavoro che è stato necessario per comprimerla o allungarla. Detta k la “costante elastica” della molla, l’energia potenziale elastica posseduta dalla molla dopo la deformazione è data da
- $$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{NOTA: per indicare l'energia potenziale (= legata alla posizione) sono utilizzati sia il simbolo } E_p \text{ che il simbolo } U, \text{ ma } U \text{ è più frequente}$$
- ed è perciò *direttamente proporzionale al quadrato* di x .
- La forza di attrazione gravitazionale fra due masse m_1 e m_2 è regolata dalla legge
- $$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad \text{dove } G \text{ è una costante della natura detta “costante di gravitazione universale”,}$$
- ed è quindi *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza d .
- Similmente, la forza di attrazione o repulsione fra due cariche elettriche Q_1 e Q_2 è regolata dalla legge
- $$F = \frac{kQ_1Q_2}{d^2}$$
- dove k è una costante che dipende dal mezzo in cui le due cariche sono immerse (il vuoto, l’aria, ecc.). Quindi l’intensità di tale forza è *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza d delle cariche.
- L’intensità di un suono che è stato prodotto da una sorgente puntiforme è *inversamente proporzionale al quadrato* della distanza R dalla sorgente, secondo la formula
- $$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$
- dove P è una costante (“potenza”, ovvero energia emessa nell’unità di tempo, dalla sorgente sonora).
- Se un solido viene ingrandito, o rimpicciolito, di un dato “fattore di scala”, il volume cambia in modo *direttamente proporzionale al cubo* del fattore di scala: ad esempio,
- se le misure lineari vengono moltiplicate per 2, il volume risulta moltiplicato per 8;
 - se le misure lineari vengono moltiplicate per 3, il volume risulta moltiplicato per 27.
- $$V_2 = V_1 \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right)^3$$
- Terza legge di Keplero: i quadrati dei periodi T di rivoluzione dei pianeti sono *direttamente proporzionali ai cubi* dei semiassi maggiori d delle loro orbite.
- $$T^2 = kd^3 \quad \text{o} \quad \frac{T^2}{d^3} = k$$
- Il periodo T di un pendolo (= il tempo occorrente al pendolo per compiere un’oscillazione completa) è *direttamente proporzionale alla radice quadrata* della sua lunghezza ℓ : vale infatti la relazione
- $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{g}} \quad \text{dove } g \text{ è costante, essendo l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre.}$$
- La prima legge di Ohm, scritta nella forma
- $$I = \frac{V}{R},$$
- afferma che l’intensità I della corrente elettrica che percorre un filo conduttore di data resistenza R è *direttamente proporzionale* alla differenza di potenziale V applicata agli estremi del filo. Se invece si pensa fissata la differenza di potenziale, l’intensità I di corrente è *inversamente proporzionale* alla resistenza R del filo. La “resistenza” misura la difficoltà che la corrente incontra nel fluire attraverso il filo.
- Per un filo conduttore di sezione S costante, il valore R della resistenza è *direttamente proporzionale* alla lunghezza ℓ . Se invece è ℓ che resta costante, R è *inversamente proporzionale* alla sezione S . La relazione $R = \rho \frac{\ell}{S}$ è detta “seconda legge di Ohm”.
- La costante ρ si chiama “resistività”; dipende dal materiale di cui è fatto il filo (e dalla temperatura).