17. COMPLEMENTI SUI PRODOTTI NOTEVOLI

Ti presento in questo paragrafo qualche approfondimento interessante.

A. Possiamo "ritrovare" la nota formula per il **quadrato di un trinomio** anche procedendo come segue:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Analogamente, si potrà scrivere, per il **quadrato di un quadrinomio**:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b)+(c+d)]^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

oppure, in alternativa:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+2ad+2bd+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

❑ **Esercizio 1.** *Ricostruisci la formula per il quadrato di un polinomio di 5 termini scrivendo:*

$$(a+b+d+c+e)^2=[(a+b+c)+(d+e)]^2$$

Correzione ⇨

B. Un prodotto come $(a+b+c)(a-b-c)$, se svolto "normalmente", porterebbe a ottenere 9 termini.
In alternativa, possiamo fare così:

$$(a+b+c)(a-b-c)=[a+(b+c)][a-(b+c)]=$$
$$=a^2-(b+c)^2=$$
$$=a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-b^2-2bc-c^2$$

Nel passaggio $a-b-c=a-(b+c)$, si dice che "si è messo in evidenza il segno $-$ ".

" **METTERE IN EVIDENZA IL SEGNO $-$** "
significa prendere un **POLINOMIO**
e riscriverlo come **$-($POLINOMIO COI SEGNI CAMBIATI$)$**

Altri esempi:

$$4a^2-3a-2=-(-4a^2+3a+2) \qquad -x^3+x^2y-xy^2+y^3=-(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$$

Ed ecco ancora un caso in cui "mettere in evidenza il segno $-$ " si rivela utile ai fini del calcolo:

$$(x^3+x^2-2x+4)(x^3-x^2+2x+4)=(x^3+4+x^2-2x)(x^3+4-x^2+2x)=$$
$$=[(x^3+4)+(x^2-2x)][(x^3+4)-(x^2-2x)]=$$
$$=(x^3+4)^2-(x^2-2x)^2=$$
$$=x^6+8x^3+16-(x^4-4x^3+4x^2)=$$
$$=x^6+8x^3+16-x^4+4x^3-4x^2=x^6-x^4+12x^3-4x^2+16$$

❑ **Esercizio 2** **Correzione** ⇨

Svolgi i seguenti prodotti nel modo ottimale:

$(3x+2y+z)(3x-2y-z)$ $\quad (3x+2y-z)(3x-2y+z)$ $\quad (a+b+c+d)(a-b-c-d)$

$(3x+2y+z)(3x+2y-z)$ $\quad (3x+2y+z)(3x-2y+z)$ $\quad (a+b+c+d)(a+b+c-d)$

C. La formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, se viene riscritta da destra verso sinistra, diventa

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Ma quest'ultima uguaglianza ci dice che
"una differenza di quadrati è uguale alla somma delle basi, moltiplicato la loro differenza"

Questo fatto
(che sarà fondamentale tener presente nel capitolo
dedicato alla scomposizione in fattori di un polinomio),
può rivelarsi **molto utile ai fini del calcolo rapido**.

Ad esempio, se in un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 52 e un cateto 48,
per il Teorema di Pitagora (vedi pag. 214) l'altro cateto misurerà

$$\sqrt{52^2-48^2}\ .$$

A questo punto, anziché metterci a svolgere i quadrati, potremmo scrivere

$$\sqrt{52^2-48^2}=\sqrt{(52+48)(52-48)}=\sqrt{100\cdot 4}=\sqrt{400}=20$$

❑ **Esercizio 3** **Correzione** ⇨
Svolgi i seguenti calcoli nel modo più efficace:

45^2-35^2 $\quad 46^2-36^2$ $\quad 99^2-98^2$ $\quad 67^2-33^2$ $\quad 156^2-144^2$

RICAPITOLAZIONE DEI PRINCIPALI "PRODOTTI NOTEVOLI"

POTENZE DI UN BINOMIO (A PARTIRE DAL QUADRATO)

$$(a+b)^2=a^2+\mathbf{2}ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+\mathbf{3}a^2b+\mathbf{3}ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+\mathbf{4}a^3b+\mathbf{6}a^2b^2+\mathbf{4}ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+\mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2+\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+\mathbf{6}a^5b+\mathbf{15}a^4b^2+\mathbf{20}a^3b^3+\mathbf{15}a^2b^4+\mathbf{6}ab^5+b^6$$
$$(a+b)^7=a^7+\mathbf{7}a^6b+\mathbf{21}a^5b^2+\mathbf{35}a^4b^3+\mathbf{35}a^3b^4+\mathbf{21}a^2b^5+\mathbf{7}ab^6+b^7$$

...

I coefficienti
possono essere determinati
tramite il
Triangolo di Tartaglia

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
.................
```

nel quale
i coefficienti non laterali
sono ciascuno la somma
dei due che lo sovrastano

SOMMA DI DUE TERMINI MOLTIPLICATO
LA LORO DIFFERENZA

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

riassumibile nell'importante "slogan" :

"La somma di due termini, moltiplicata per la loro differenza,
è uguale alla DIFFERENZA DEI QUADRATI"

QUADRATO DI UN POLINOMIO
(A COMINCIARE DAL TRINOMIO)

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$
$$(a+b+c+d+e)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab+2ac+2ad+2ae+2bc+2bd+2be+2cd+2ce+2de$$

...

Per svolgere il quadrato di un polinomio, si fa
1) il QUADRATO DI CIASCUN TERMINE
2) il DOPPIO PRODOTTO DI CIASCUN TERMINE PER CIASCUNO DEI SUCCESSIVI