

B) PROPRIETA' DELLE POTENZE (♥ paragrafo FONDAMENTALE!!!)

$$1) 5^4 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) \stackrel{\text{proprietà dissociativa}}{=} 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7 \quad \text{Quindi } \boxed{5^4 \cdot 5^3} = 5^7 = \boxed{5^{4+3}}$$

Proprietà ADDITIVA DEGLI ESPONENTI $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la somma degli esponenti.

Dimostrazione (NOTA):

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ fattori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ fattori}} \stackrel{\text{dissociativa}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ fattori}} = a^{m+n}$$

La proprietà continua a valere anche con più di due fattori. Es. $7^5 \cdot 7^2 \cdot 7^3 = 7^{10}$

NOTA
La catena riportata all'inizio non è una vera "dimostrazione" perché si riferisce a un caso specifico: una "dimostrazione" deve invece avere carattere generale.

$$2) 7^6 : 7^2 = \frac{7^6}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} \stackrel{\text{proprietà invariante}}{=} \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 \quad \text{Quindi } \boxed{7^6 : 7^2} = 7^4 = \boxed{7^{6-2}}$$

Proprietà SOTTRATTIVA DEGLI ESPONENTI $a^m : a^n = a^{m-n}$ opp. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m > n)$

Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente la differenza degli esponenti.

$$\text{Dimostrazione: } a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fattori}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori}}} \stackrel{\text{proprietà invariante}}{=} \frac{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ fattori}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m-n \text{ fattori}}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}} = a^{m-n}$$

$$3) (5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 \stackrel{\text{additiva degli esponenti}}{=} 5^{4+4+4} = 5^{12}$$

oppure:

$$(5^4)^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \stackrel{\text{dissociativa}}{=} 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{12}$$

$$\text{Quindi: } \boxed{(5^4)^3} = 5^{12} = \boxed{5^{4 \cdot 3}}$$

Proprietà MOLTIPLICATIVA DEGLI ESPONENTI $(a^m)^n = a^{mn}$

La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base, e per esponente il prodotto degli esponenti.

Dimostrazione 1

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ fattori}} \stackrel{\text{additiva degli esponenti}}{=} a^{\underbrace{m+m+\dots+m}_{n \text{ addendi}}} = a^{m \cdot n}$$

La proprietà si può "iterare"
(= applicare ripetutamente).

$$\text{Es. } \left[(5^2)^3 \right]^2 = 5^{12}$$

Dimostrazione 2

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ fattori}}^n = \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \cdot \dots \cdot (a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ gruppi}} = \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fattori}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fattori}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fattori}} = a^{m \cdot n} \\ & n \text{ gruppi di } m \text{ fattori ciascuno} = m \cdot n \text{ fattori} \end{aligned}$$

$$4) (7 \cdot 5)^3 = (7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 5) \stackrel{\text{dissociativa}}{=} 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \stackrel{\text{commutativa}}{=} 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \stackrel{\text{associativa}}{=} (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 7^3 \cdot 5^3$$

Quindi $(7 \cdot 5)^3 = 7^3 \cdot 5^3$

Proprietà relativa alla POTENZA DI UN PRODOTTO

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ fattori } (a \cdot b)} \stackrel{\text{dissociativa}}{=} \underbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b}_{n \text{ fattori } a, n \text{ fattori } b} = \\ &\stackrel{\text{commutativa}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ fattori } b} \stackrel{\text{associativa}}{=} (\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori } a}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ fattori } b}) = a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

I fattori possono essere anche più di due. Es. $(3 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

$$5) (7 : 5)^3 = \left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7^3}{5^3} = 7^3 : 5^3 \quad \text{Quindi: } (7 : 5)^3 = 7^3 : 5^3$$

Proprietà relativa alla POTENZA DI UN QUOZIENTE

$$(a : b)^n = a^n : b^n \text{ opp. } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore.

$$\text{Dimostrazione: } (a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fattori } a/b}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ fattori } b}} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n$$

6) La proprietà 6) è l'inversa della 4):

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Non c'è quindi bisogno di dimostrazione, perché è già stata dimostrata la 4), che è poi la stessa uguaglianza, seppure scritta al rovescio

IL PRODOTTO DI DUE (o più) POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE

è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il prodotto delle basi.

7) La proprietà 7) è l'inversa della 5):

$$a^n : b^n = (a : b)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

IL QUOZIENTE DI DUE POTENZE CON LO STESSO ESPONENTE

è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente, e per base il quoziente delle basi.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Non c'è nessuna proprietà delle potenze che si possa applicare nel caso di una SOMMA o di una DIFFERENZA di potenze !!!



OCCHIO, quindi, a non applicare ... proprietà inesistenti !!!

$$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$$

$$2^3 + 10^3 = 8 + 1000 = 1008$$

Sarebbe GRAVE ERRORE

svolgere il calcolo diversamente da così !

RISPOSTE AI QUESITI DI PAG. 15 Clicca sulla freccia per la **motivazione delle risposte** ⇨

a) $3^{13} = 1594323$ se le partite sono 13, $3^{14} = 4782969$ se le partite sono 14.

b) $2^8 = 256$ c) $2100000000000000000 \text{ km} = 21 \cdot 10^{18} \text{ km} = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ km}$