6. NUMERI CON LA VIRGOLA

Tanto per fare un esempio, cosa significa $3,625$? Semplice: $\boxed{3,625 = 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}}$.

Insomma, **un numero con la virgola (si può usare la virgola, oppure, all’anglosassone, il “punto decimale”) equivale ad una somma**: la somma fra un intero e una o più frazioni aventi a denominatore 10, 100, 1000, ecc.

Ma allora … **che dire di quei numeri che presentano, dopo la virgola, infinite cifre?** Ad esempio si ha

$$1,\overline{3} = 1,333333... = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{3}{1000000} + ...$$

leggi: "1 virgola 3 col 3 periodico"

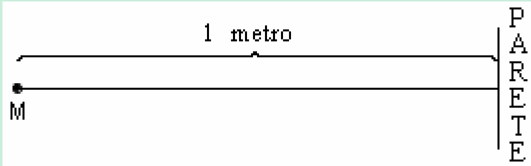
dove i puntini di sospensione indicano che la sequenza non termina, ma al contrario è illimitata; e la situazione non è affatto banale, perché a questo punto **è spontaneo domandarsi:**
ma avrà un senso una somma con infiniti addendi?
… e non dovrebbe, semmai, una tale somma, dare un risultato “infinito”?

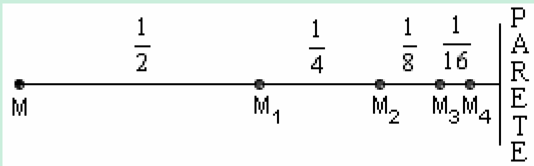
A riflettere su queste tematiche, ci aiuterà una marionetta programmata per muoversi in un modo molto speciale.

Una diabolica marionetta puntiforme M si trova inizialmente alla distanza di 1 metro da una parete.

Improvvisamente, comincia a muoversi a scatti, facendo **uno scatto al secondo,** e **ad ogni scatto percorrendo, in direzione della parete, uno spazio uguale alla META’ della distanza che ancora la separa dalla parete.**

Primo scatto: 1/2 metro. Resta ancora 1/2 metro dalla parete.
Secondo scatto: metà del 1/2 metro restante, cioè 1/4 di metro. Resta ancora 1/4 di metro dalla parete.
Terzo scatto: metà di 1/4 di metro, cioè 1/8 di metro. E così via ...





Dopo 10 "scatti", la marionetta ha percorso un tragitto uguale a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$ di metro; quasi 1 metro, dunque (… e, in effetti, si trova ad appena 1/1024 di metro dalla parete).

Dopo 1000 scatti troveremo la marionetta straordinariamente vicina alla parete, parete che tuttavia non sarà ancora stata raggiunta, proprio perché ad ogni scatto la marionetta percorre **solo la metà** dello spazio che la separava dalla parete prima dell'istante dello scatto. In effetti dopo 1000 scatti la distanza percorsa dalla marionetta è uguale a metri

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^{1000}} = 1 - \frac{1}{2^{1000}} = 1 - \textit{una quantità davvero microscopica !!!}$$

Il movimento non ha una fine.
Però, **per esprimere il fatto che, fotografando la marionetta dopo un numero molto alto di “scatti”, la si trova ad una distanza, dal punto di partenza, ESTREMAMENTE vicina a 1 metro (inferiore a 1 metro soltanto di “un soffio”), è del tutto ragionevole scrivere**

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 1}$$

La marionetta ci ha insegnato che UNA SOMMA DI INFINITI ADDENDI PUO’ AVERE UN SENSO, E NON E’ DETTA CHE ABBIA RISULTATO INFINITO!!!

Ritornando ai nostri numeri con la virgola, **si può dimostrare che una somma come**

$$\mathbf{1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{3}{1000000} + ... = 1,333333...}$$

si comporta come la “somma della marionetta”, cioè è “convergente”
(= **tende ad un valore finito**, precisamente: ad un valore finito compreso fra 1 e 2)

e non “divergente”, come sarebbe invece ad esempio la somma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

♥ **Queste riflessioni ci hanno fatto dunque comprendere il senso di una scrittura come 1,333333… , anche se tale scrittura sottintende una somma di infiniti addendi.**

I numeri con la virgola, detti anche "decimali", si dividono in FINITI e ILLIMITATI; fra questi ultimi distinguiamo i PERIODICI (semplici o misti) e gli ILLIMITATI NON PERIODICI.

❑ Decimali FINITI

$$\boxed{3,625=}\ 3+\frac{6}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}=\frac{3000+600+20+5}{1000}=\boxed{\frac{3625}{1000}}=\frac{\cancel{3625}^{29}}{\cancel{1000}_{8}}=\frac{29}{8}$$

Un decimale finito è trasformabile, molto facilmente, in frazione:

basta scrivere
- **a numeratore, il numero senza la virgola**
- **a denominatore, 1 seguito da tanti 0 quante sono le cifre dopo la virgola**

❑ Decimali PERIODICI

Se un decimale ha, dopo la virgola, un gruppo di cifre che si ripete sempre uguale, illimitatamente, si dice che si tratta di un numero "periodico"
e *la cifra, o il gruppo di cifre, che si ripete*, prende il nome di "PERIODO".
Il periodo è indicato con una soprallineatura, o delimitato da parentesi: $1,\overline{3}$ oppure $1,(3)$.

- **Se il periodo inizia subito dopo la virgola, si parla di periodico "SEMPLICE";**
- **se invece, dopo la virgola e prima del periodo, c'è un gruppo di cifre che *non* si ripete, si parla di periodico "MISTO" e *la cifra, o gruppo di cifre, che sta dopo la virgola e prima del periodo* prende il nome di "ANTIPERIODO".**

Esempi:
$1,\overline{3}=1,333333...$ è un periodico SEMPLICE. Il periodo è 3.
$29,\overline{41}=29,414141...$ è un periodico SEMPLICE. Il periodo è 41.
$29,4\overline{1}=29,411111...$ è un periodico MISTO. Il periodo è 1 e l'antiperiodo è 4.
$1,23\overline{456}=1,23456456456...$ è un periodico MISTO. Il periodo è 456 e l'antiperiodo è 23.

Un decimale periodico SEMPLICE è facilmente trasformabile in frazione.
Nell'esempio qui a fianco, abbiamo preso il numero $1,\overline{3}$, che abbiamo chiamato x.
Dunque $x=1,333333...=1,\overline{3}$.
Ora, se moltiplichiamo questo numero x per 10, otteniamo un nuovo numero, $10x$, che avrà la virgola spostata di un posto verso destra; tale nuovo numero sarà ancora periodico, con lo stesso periodo del numero iniziale!
$10x=13,33333...=13,\overline{3}$

Se a questo punto sottraiamo membro a membro le due uguaglianze precedenti (la 2^a meno la 1^a: se a = b e c = d, evidentemente sarà anche c – a = d – b), visto che i due numeri in gioco hanno le stesse cifre dopo la virgola, per sottrazione le parti decimali si compenseranno e rimarrà soltanto la differenza fra le parti intere:
$10x-x=13,33333...-1,333333...$
$9x=13-1$ (*10 volte un numero meno lo stesso numero dà 9 volte quel numero*)
$9x=12$

Quest'ultima è una semplice equazione ⇨; dividendo ambo i membri per 9 otteniamo
$\frac{\cancel{9}x}{\cancel{9}}=\frac{12}{9}$ cioè, semplificando, $x=\frac{4}{3}$.

Per controllare la correttezza del risultato ottenuto basta eseguire (vedi qui a destra →) la divisione $4:3$ verificando che il suo risultato è proprio $1,333333...$

$$x=1,\overline{3}$$
$$10x=13,\overline{3}$$
$$10x-x=13,\overline{3}-1,\overline{3}$$
$$9x=13-1$$
$$9x=12$$
$$x=\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}}$$

```
4     |3
3      1,333...
10
 9
 10
  9
  10
   9
   1...
```

E S E R C I Z I O

Prova a trasformare in frazione il periodico semplice $2,\overline{405}$ col metodo dell'equazione sopra illustrato.
Per quale potenza di 10 occorre moltiplicare, prima di sottrarre membro a membro?
Ragiona: noi vogliamo che dopo la moltiplicazione, quando si sottrarrà membro a membro, LA SOTTRAZIONE AVVENGA FRA DUE NUMERI CON LA STESSA PARTE DECIMALE, in modo che le due parti decimali uguali si elidano e rimanga una differenza fra interi.
Quindi la potenza di 10 per cui moltiplicare sarà in questo caso … (puoi cliccare qui ⇨ per la correzione)
Alla fine, effettua la verifica, ritornando, tramite divisione, dalla frazione ottenuta al numero decimale.

Con un decimale periodico MISTO si può fare pressappoco la stessa cosa; il procedimento però è più laborioso perché

a) occorre dapprima **moltiplicare per un'opportuna potenza di 10 allo scopo di ricondursi ad un periodico semplice** (nell'esempio qui a destra, moltiplichiamo per 100 perché desideriamo spostare la virgola a destra di 2 posti);

b) dopodiché si effettuerà **una seconda opportuna moltiplicazione in modo che il nuovo numero così ottenuto sia ancora periodico semplice, con lo stesso periodo del precedente** (nell'esempio, moltiplichiamo per 1000 perché desideriamo spostare la virgola a destra di altri 3 posti).

c) Soltanto a questo punto, avendo a disposizione **due numeri con la STESSA parte decimale,** si farà la **sottrazione membro a membro**.

$$x = 1,23\overline{456}$$

$$\text{a) } 100x = 123,\overline{456}$$

$$\text{b) } 100.000x = 123456,\overline{456}$$

$$\text{c) } 100.000x - 100x = 123456,\overline{456} - 123,\overline{456}$$

$$99900x = 123456 - 123$$

$$x = \frac{123456 - 123}{99900}$$

ESERCIZIO (correzione ⇨) Prova a trasformare in frazione il periodico misto $1,2\overline{47}$ col metodo dell'equazione.
Anche qui, alla fine, effettua la verifica, ritornando, tramite divisione, dalla frazione al decimale.

REGOLA DI TRASFORMAZIONE

Dal "metodo dell'equazione" è possibile ricavare una comoda regola pratica per la trasformazione in frazione dei numeri periodici, semplici o misti. La regola è la seguente:

la "frazione generatrice" di un numero decimale periodico si può costruire scrivendo

- **a numeratore, la differenza fra il numero scritto senza la virgola e senza il simbolo di periodo e il numero costituito da "tutte le cifre che stanno prima del periodo";**
- **a denominatore, tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti (se il periodico è misto) da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.**

Esempi: $3,\overline{21} = \frac{321-3}{99}$ $\quad 2,46\overline{8} = \frac{2468-246}{900}$ $\quad 7,2\overline{05} = \frac{7205-72}{990}$ $\quad 10,\overline{180} = \frac{10180-10}{999}$

ESERCIZI SUI NUMERI CON LA VIRGOLA

Determina la frazione generatrice dei seguenti decimali.
E' richiesto, nel caso dei periodici,
di procedere col metodo dell'equazione
(ovvio, puoi poi servirti anche della regola per controllare).

Alla fine, un po' di pratica di calcolo! Esegui la divisione
numeratore:denominatore
per ritornare dalla frazione al decimale.

NOTA
I **numeri con la virgola** sono anche detti "**decimali**".
NEI PAESI ANGLOSASSONI SI USA IL PUNTO AL POSTO DELLA VIRGOLA.

1) $1,25$ 2) $1,\overline{25}$ 3) $1,2\overline{5}$ 4) $0,00\overline{1}$ 5) $0,0\overline{01}$ 6) $0,\overline{001}$ 7) $0,\overline{076923}$

8) $0,\overline{3}$ 9) $0,\overline{03}$ 10) $3,\overline{45}$ 11) $0,34\overline{5}$ 12) $1,\overline{142857}$ 13) $0,875$ 14) $0,01\overline{24}$

RISULTATI
1) $5/4$ 2) $124/99$ 3) $113/90$ 4) $1/900$ 5) $1/990$ 6) $1/999$ 7) $1/13$
8) $1/3$ 9) $1/33$ 10) $38/11$ 11) $311/900$ 12) $8/7$ 13) $7/8$ 14) $41/3300$

FRAZIONI E NUMERI CON LA VIRGOLA

Quando si trasforma una frazione, ridotta ai minimi termini (cioè: semplificata il più possibile), in numero con la virgola, si può dimostrare che il numero decimale ottenuto sarà:
I) finito, se nella scomposizione in fattori primi del denominatore non compaiono fattori diversi da 2 e da 5;
II) periodico semplice, se in tale scomposizione i fattori sono tutti diversi da 2 e da 5;
III) periodico misto nel caso restante, cioè qualora il denominatore abbia fra i suoi fattori primi almeno un fattore uguale a 2 o a 5, e almeno un fattore diverso sia da 2 che da 5.

a) Trasforma le seguenti frazioni in numero con la virgola, dopo aver previsto di che tipo sarà quest'ultimo:

$$\frac{7}{40};\ \frac{1}{24};\ \frac{13}{7};\ \frac{2}{9};\ \frac{14}{125};\ \frac{3}{150};\ \frac{65}{33};\ \frac{1}{14};\ \frac{1}{13};\ \frac{1}{26};\ \frac{1}{8}.$$

b) E viceversa, porta i numeri seguenti sotto forma di frazione, *riduci questa ai minimi termini*, dopodiché constata la validità dei tre punti I), II), III): $8,1\overline{4}$; $8,14$; $8,\overline{14}$; $0,012$; $19,\overline{8}$; $1,2\overline{463}$; $10,35$; $7,\overline{7}$; $2,\overline{09}$; $5,55$

❑ Decimali ILLIMITATI NON PERIODICI

Quando io prendo una frazione
con l'intenzione di eseguire la divisione per trasformarla in decimale,
so già che ciascun "RESTO PARZIALE"
che otterrò nel corso del procedimento
sarà sempre MINORE DEL DIVISORE.

Ad esempio, se mi propongo di trasformare in decimale la frazione 34/13, so già in partenza che i resti parziali che si presenteranno potranno valere: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, oppure 12.

Per i resti parziali via via generati nell'algoritmo di divisione
(*algoritmo* = procedimento per risolvere un problema tramite un numero finito di passi: clicca sulla freccia ⇨ per approfondimenti)
c'è quindi solo UN NUMERO LIMITATO DI POSSIBILITA'.
E di conseguenza
i resti parziali che si presenteranno non potranno essere tutti diversi fra loro:

- o accadrà di trovare come resto 0 (e allora la divisione avrà termine),
- oppure, qualora ciò non avvenga,
  prima o poi sarà OBBLIGATO a ripetersi
  un resto che era già uscito in precedenza.

Si verificherà, insomma**, sicuramente o l'una o l'altra fra due eventualità:**

I) esce come resto 0; allora il procedimento si arresta,
la divisione è terminata, ecco un bel decimale FINITO;

II) si ripresenta un resto che si era già presentato prima;
e allora nel quoziente torneranno a ripetersi le stesse cifre
che erano uscite a partire dalla comparsa precedente di quel resto.
Il decimale ottenuto è PERIODICO.

34 | 13
26   2,6153...
$\boxed{8}0$
78
$\boxed{2}0$
13
$\boxed{7}0$
65
$\boxed{5}0$
39
$\boxed{11}0$
......

Fino a questo punto
i "resti parziali"
sono stati:
8, 2, 7, 5, 11
Vuoi andare avanti tu?
Prima o poi
PER FORZA dovrà
ripresentarsi un resto
già visto prima …!!!
(oppure,
comparire il resto 0).

Ricapitolando: una FRAZIONE genera sempre un numero DECIMALE che è

- **FINITO,**
- **oppure è PERIODICO;**

… una frazione non potrà MAI essere equivalente ad un decimale ILLIMITATO NON PERIODICO.

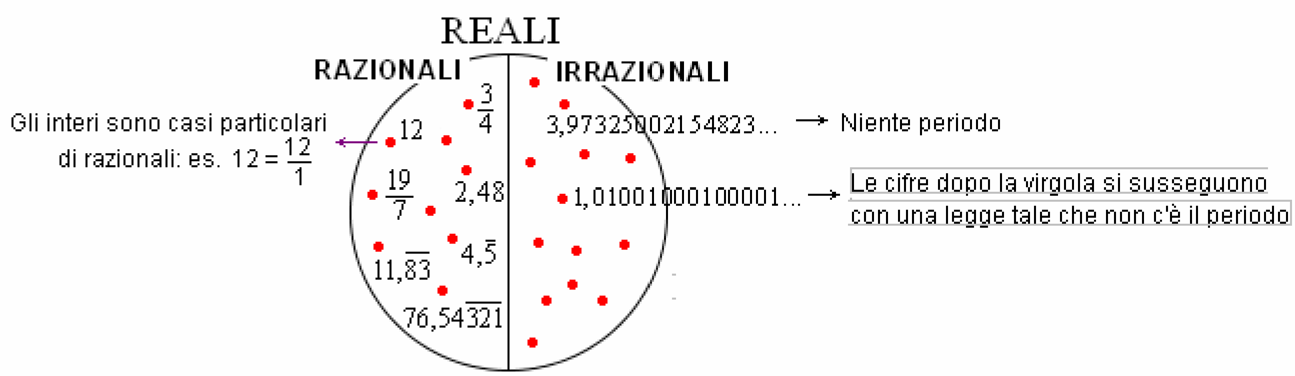
Ne consegue un fatto rilevante:
♥ **I DECIMALI ILLIMITATI NON PERIODICI NON SONO TRASFORMABILI IN FRAZIONE !!!**

♥ **ESISTONO perciò NUMERI CHE NON E' POSSIBILE ESPRIMERE**
SOTTO FORMA DI FRAZIONE (= RAPPORTO, QUOZIENTE FRA DUE INTERI).
ESSI VENGONO CHIAMATI NUMERI "IRRAZIONALI", mentre
QUELLI frazionari o comunque TRASFORMABILI IN FRAZIONE SONO DETTI "RAZIONALI".
L'aggettivo "razionale" deriva dal latino "*ratio*" = (in senso matematico) "rapporto", "quoziente".

DEFINIZIONE - Un numero è detto

- **"RAZIONALE" se è esprimibile come frazione, ossia come "ratio", "rapporto", fra due interi;**
- **"IRRAZIONALE" in caso contrario.**

♥ **L'insieme di TUTTI i numeri, RAZIONALI E IRRAZIONALI, è detto "insieme dei numeri REALI"** ⇨



ESERCIZIO - Prova a trasformare in frazione, con l'apposita regola oppure col metodo dell'equazione, il numero periodico $0,\overline{9} = 0,99999\ldots$. Che numero ottieni? Sorpresa!!! Come spieghi il risultato? ⇨