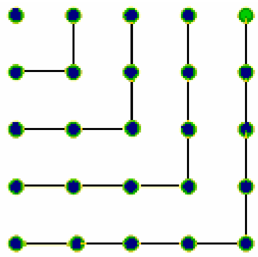
4) Odd Squares

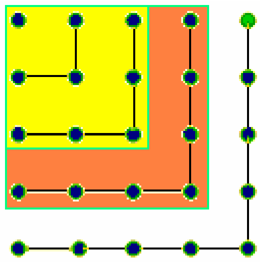
La figura qui a destra illustra la bella formula $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Ora tu utilizza la stessa figura per dimostrare che qualsiasi numero dispari $2n-1$ è sempre esprimibile come differenza di due quadrati.



Seconda richiesta. Questa è più difficile, occorre fare uso della identità $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:
trova una strategia per determinare tutti i possibili modi (ce ne sono ben 4)
in cui il numero 105 si può scrivere come differenza fra i quadrati di due interi positivi.

Ad esempio, il numero dei puntini sulla linea evidenziata nella figura qui a destra (7 puntini) può essere ottenuto come differenza fra il numero dei puntini che stanno all'interno del più grande e del più piccolo fra i due quadrati che abbiamo ritagliato: $7=4^2-3^2$.
Notiamo che 3 e 4 sono i due interi che meglio approssimano, rispettivamente per difetto e per eccesso, la metà di 7 .



In generale, preso un numero dispari $2n-1$, questo potrà sempre essere visto come la differenza fra i quadrati di quei due interi che meglio approssimano, rispettivamente per difetto e per eccesso, la metà di $2n-1$,
ossia la frazione $\frac{2n-1}{2}=\frac{2n}{2}-\frac{1}{2}=n-\frac{1}{2}$. Tali due interi sono $n-1$ e n.

Avremo dunque $2n-1=n^2-(n-1)^2$, identità che abbiamo ricavato per via grafica
ma ora possiamo controllare anche algebricamente se conosciamo la formula per il "quadrato di un binomio".

E veniamo al **secondo quesito**.
Vogliamo trovare tutti i modi in cui 105 si può esprimere come differenza fra i quadrati di due interi positivi.
Uno di questi modi ci è suggerito dalla riflessione precedente!
Consideriamo i due interi che meglio approssimano, per difetto e per eccesso, la metà di 105 (che è poi 52,5):
essi sono 52 e 53 e avremo subito $105=53^2-52^2$.
Ma gli altri modi? Perché il testo del problema ci annuncia che di modi ne esistono ancora altri tre!
Dunque: se 105 è scritto come differenza di due quadrati, si avrà, per due opportuni numeri *a*, *b*, l'uguaglianza $105=a^2-b^2$ che si può riscrivere come $105=(a+b)(a-b)$ dato che è $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
Ma allora gli interi *a*, *b* che stiamo cercando dovranno essere tali che $a+b,\ a-b$, moltiplicati, diano 105.
Ora, essendo $105=3\cdot5\cdot7$, due interi il cui prodotto dà 105 possono essere solo:
105 e 1; 15 e 7; 21 e 5; 35 e 3.
a, *b* dovranno perciò soddisfare le uguaglianze

$$\begin{cases}a+b=105\\a-b=1\end{cases} \quad \textit{oppure} \quad \begin{cases}a+b=15\\a-b=7\end{cases} \quad \textit{oppure} \quad \begin{cases}a+b=21\\a-b=5\end{cases} \quad \textit{oppure} \quad \begin{cases}a+b=35\\a-b=3\end{cases}$$

Anche se non hai mai avuto a che fare con i "sistemi di equazioni",
puoi a questo punto determinare i numeri *a*, *b* nei quattro casi.
Per trovare due numeri conoscendone la somma e la differenza si può, infatti, procedere in diversi modi
e uno di essi, ad esempio, è il seguente: prima sommare e poi sottrarre membro a membro le due uguaglianze.
Ad esempio, i numeri *a*, *b* tali che

$$\begin{cases}a+b=105\\a-b=1\end{cases} \quad \text{si possono trovare addizionando} \quad \begin{array}{l}a\ +b=105\\ a\ -b=1\\ \hline 2a\qquad=106\\ \qquad a=53\end{array} \quad \text{poi sottraendo} \quad \begin{array}{l}a\ +b=105\\ a\ -b=1\\ \hline \quad 2b=104\\ \quad\ \ b=52\end{array}$$

e corrispondono alla coppia 52, 53 già a noi nota;
operando allo stesso modo sugli altri casi si trova $a=11,\ b=4;\ \ a=13,\ b=8;\ \ a=19,\ b=16$.
In definitiva, perciò, le 4 possibilità per esprimere il 105 come differenza dei quadrati di due interi positivi sono:
$105=53^2-52^2=11^2-4^2=13^2-8^2=19^2-16^2$.