

- 1) **La somma delle età di due sorelle è 36 anni.
6 anni fa la maggiore aveva età doppia della minore.
Trova le due età attuali.**

Età sorella maggiore = x

Età sorella minore = $36 - x$

Età sorella maggiore 6 anni fa = $x - 6$

Età sorella minore 6 anni fa = $36 - x - 6 = 30 - x$

$$x - 6 = 2(30 - x)$$

$$x - 6 = 60 - 2x$$

$$3x = 66$$

$$x = 22$$

Età sorella maggiore = 22 anni
Età sorella minore = $36 - 22 = 14$ anni

Verifica :

se le età attuali sono 22 e 14 anni,

6 anni fa quali erano?

$22 - 6 = 16$ anni e $14 - 6 = 8$ anni.

E 16 è proprio il doppio di 8, OK.

- 2) **Un problemino di Eulero (1707-1783)**

Un padre lasciò in eredità ai suoi 4 figli un patrimonio complessivo di 8600 sterline.

Secondo il testamento,

al primogenito dovevano andare 100 sterline meno del doppio di ciò che spettava al secondogenito; il secondogenito, a sua volta, avrebbe ereditato 200 sterline in meno rispetto al triplo del terzogenito. E questi (il terzogenito), avrebbe dovuto ricevere 300 sterline in meno rispetto al quadruplo del più giovane.

Si domanda l'ammontare dell'eredità di ciascuno.

Conviene indicare con x l'ammontare in sterline

dell'eredità del QUARTOGENITO. Poi :

$$n^{\circ} \text{ sterline eredità TERZOGENITO} = 4x - 300$$

$$n^{\circ} \text{ sterline eredità SECONDOGENITO} = 3(4x - 300) - 200 \stackrel{\text{NOTA}}{=} 12x - 900 - 200 = 12x - 1100$$

$$n^{\circ} \text{ sterline eredità PRIMOGENITO} = 2(12x - 1100) - 100 \stackrel{\text{NOTA}}{=} 24x - 2200 - 100 = 24x - 2300$$

$$x + (4x - 300) + (12x - 1100) + (24x - 2300) = 8600$$

$$41x - 3700 = 8600$$

$$41x = 12300$$

$$x = 300$$

Dunque :

n° sterline eredità QUARTOGENITO = $x = 300$ sterline
 n° sterline eredità TERZOGENITO = $4x - 300 = 1200 - 300 = 900$ sterline
 n° sterline eredità SECONDOGENITO = $12x - 1100 = 3600 - 1100 = 2500$ sterline
 n° sterline eredità PRIMOGENITO = $24x - 2300 = 7200 - 2300 = 4900$ sterline

NOTA : quando in un problema, dopo aver posto l'incognita x , si esprimono le varie quantità in gioco per mezzo di x , è di solito conveniente svolgere subito le espressioni trovate con l'obiettivo di portarle sotto la forma più semplice, prima di proseguire.

Verifica tu stesso che per i valori trovati sono in effetti soddisfatte tutte le condizioni del problema.

- 3) Si vincono 4 gettoni per ogni risposta giusta, se ne perdono 7 per ogni risposta sbagliata; dopo 30 domande io sto perdendo 89 gettoni. Quante volte ho risposto sbagliato?

$x =$ numero risposte sbagliate

Allora, dato che sono state fatte 30 domande

e quindi sono state date 30 risposte,

numero risposte esatte $= 30 - x$

n° gettoni vinti a seguito delle risposte esatte $= 4(30 - x)$

n° gettoni persi a seguito delle risposte sbagliate $= 7x$

$$4(30 - x) - 7x = -89$$

$$120 - 4x - 7x = -89$$

$$-11x = -209$$

$$x = 19$$

<p>numero risposte sbagliate $= 19$ numero risposte esatte $= 30 - 19 = 11$</p>
--

- 4) Un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$ è tale che:
- se si assegna a x il valore 1, il trinomio assume il valore 0
 - se si assegna a x il valore 2, il trinomio assume il valore 1
 - se si assegna a x il valore 3, il trinomio assume il valore 6.
- Quanto valgono i tre coefficienti a, b, c ?

Il trinomio $ax^2 + bx + c$:

per $x = 1$, assume il valore 0, quindi $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$

per $x = 2$, assume il valore 1, quindi $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1$

per $x = 3$, assume il valore 6, quindi $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 6$.

Abbiamo perciò 3 informazioni sui 3 numeri incogniti a, b, c :
 tre uguaglianze, contenenti a, b e c ,
 di fronte alle quali ci chiediamo per quali valori di a, b e c
 esse sono verificate simultaneamente.

Ma ciò significa risolvere il seguente SISTEMA
 che ha per incognite a, b, c :

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) - (1) & \left\{ \begin{aligned} 3a + b &= 1 \\ (3) - (2) & \left\{ \begin{aligned} 5a + b &= 5 \\ (1) & \left\{ \begin{aligned} a + b + c &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) - (1) & \left\{ \begin{aligned} 2a &= 4; \quad \boxed{a = 2} \\ (1) & \left\{ \begin{aligned} 3a + b &= 1; \quad 6 + b = 1; \quad \boxed{b = -5} \\ (1) & \left\{ \begin{aligned} a + b + c &= 0; \quad 2 - 5 + c = 0; \quad \boxed{c = 3} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

- 5) **Un commerciante si reca successivamente a Lucca, poi a Firenze e infine a Pisa. In ogni città prima raddoppia i soldi con cui arriva, poi spende per la locanda 12 denari. Se alla fine si ritrova senza denari, con quanti denari aveva iniziato il suo giro? (Soluzione frazionaria; il problema è tratto dal Liber Abaci di Leonardo Pisano, pubblicato nel 1202).**

$x = n^\circ$ denari posseduti inizialmente

$2x - 12 = n^\circ$ denari posseduti dopo il soggiorno a Lucca

$2(2x - 12) - 12 = 4x - 24 - 12 = 4x - 36 = n^\circ$ denari posseduti dopo il soggiorno a Firenze

$2(4x - 36) - 12 = 8x - 72 - 12 = 8x - 84 = n^\circ$ denari posseduti dopo il soggiorno a Pisa

$$8x - 84 = 0$$

$$2x = 21$$

$$x = \frac{21}{2}$$

Il commerciante possedeva dunque inizialmente $\frac{21}{2}$ denari, ossia 10 denari e mezzo.

Facciamo la verifica.

Quest'uomo parte da casa con 10 denari e mezzo.

Si reca a Lucca e commerciando raddoppia il suo avere, portandosi quindi a 21 denari, ma poi ne spende 12 per il conto della locanda e se ne va dunque da Lucca con 9 denari.

Firenze: raddoppio a 18 denari, spesa di 12 denari per la locanda, rimangono 6 denari.

Pisa: raddoppio a 12 denari, spesa di 12 denari per la locanda, rimangono 0 denari: giusto!

- 6) **Un aeroplano percorre un tragitto di 390 km in 30 minuti in condizioni di vento contrario, poi torna indietro, sempre in presenza del medesimo vento, che però in questo caso gioca a favore, e ci impiega 26 minuti soltanto. Si chiede di determinare**
- la velocità che avrebbe l'aereo, in assenza di vento
 - la velocità del vento

Usiamo la lettera a per indicare

la velocità incognita dell'aereo, espressa in km al minuto, in assenza di vento,

la lettera v per indicare la velocità incognita del vento, espressa sempre in km al minuto.

Vento contrario :

l'aereo viaggia ad $a - v$ km al minuto (e ci mette 30 minuti per percorrere i 390 km);

$$\text{quindi } a - v = \frac{390}{30} = 13$$

Vento a favore :

l'aereo viaggia ad $a + v$ km al minuto (e ci mette 26 minuti per percorrere i 390 km);

$$\text{quindi } a + v = \frac{390}{26} = 15.$$

Avremo dunque

$$\begin{cases} a - v = 13 \\ a + v = 15 \end{cases}$$

$$(1) + (2) \begin{cases} 2a = 28; & a = 14 \end{cases}$$

$$(2) - (1) \begin{cases} 2v = 2; & v = 1 \end{cases}$$

L'aereo, in assenza di vento, ha perciò una velocità di 14 km al minuto, ossia $14 \cdot 60 = 840$ km all'ora; mentre la velocità del vento è di 1 km al minuto, 60 km all'ora.

- 7) **Se di una scalinata io ne percorro la metà più 4 gradini, poi la metà di ciò che resta più 8 gradini, e a quel punto mi rimane ancora la quinta parte dell'intera scalinata, sapresti dirmi di quanti gradini è composta la lunga scalinata?**

n = numero totale gradini scalinata

$$\text{numero gradini prima tappa} = \frac{1}{2}n + 4$$

$$\text{numero gradini restanti dopo la prima tappa} = n - \left(\frac{1}{2}n + 4\right) = n - \frac{1}{2}n - 4 = \frac{1}{2}n - 4$$

$$\text{numero gradini seconda tappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n - 4\right) + 8 = \frac{1}{4}n - 2 + 8 = \frac{1}{4}n + 6$$

$$\text{numero gradini terza tappa} = \frac{1}{5}n$$

$$\left(\frac{1}{2}n + 4\right) + \left(\frac{1}{4}n + 6\right) + \frac{1}{5}n = n$$

$$\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{5}n - n = -4 - 6$$

$$\frac{10 + 5 + 4 - 20}{20}n = -10$$

$$-\frac{1}{20}n = -10$$

$$\boxed{n = 200}$$

- 8) **Trovare un intero di 2 cifre, sapendo che è uguale a 15 volte la cifra delle unità, e che scambiandone le cifre diminuisce di 18 unità.**

Un intero di due cifre [ab] risulta uguale a $10a + b$!

Ad esempio, l'intero 47 è uguale (4 è la cifra delle decine, 7 quella delle unità) a $4 \cdot 10 + 7$.

Quindi, se a è la cifra delle decine e b quella delle unità del numero che ci è richiesto di trovare, avremo:

$$10a + b = 15b$$

e simultaneamente

$$10b + a = 10a + b - 18.$$

Ma domandarsi quali sono i valori delle lettere

per i quali sono verificate contemporaneamente due (o più) condizioni, equivale a fare IL SISTEMA fra le condizioni stesse! Dunque

$$\begin{cases} 10a + b = 15b \\ 10b + a = 10a + b - 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a - 14b = 0 \\ -9a + 9b = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 7b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b + 2 \\ 5(b + 2) - 7b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b + 2 \\ 5b + 10 - 7b = 0; -2b = -10; b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 \\ a = b + 2 = 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 \\ a = b + 2 = 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} a = 7 \\ b = 5 \end{cases}}$$

... e il numero è $\boxed{75}$, che in effetti, scambiando le cifre, diventa 57 diminuendo quindi di 18 unità.

9)

I due podisti Aldo e Bruno corrono a due velocità costanti, ma diverse fra loro (Aldo è più veloce), su di un circuito di 360 metri.

Determinare le loro velocità in m al secondo e anche in km all'ora, sapendo che

- se marciano in direzioni opposte, si incontrano ogni 40 secondi,
- mentre se marciano nella stessa direzione, Aldo, ogni volta che supera Bruno, ci mette 6 minuti a raggiungerlo nuovamente.

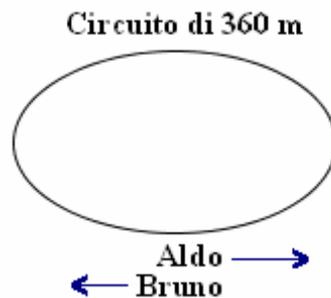
a = velocità di Aldo in metri al secondo

b = velocità di Bruno in metri al secondo.

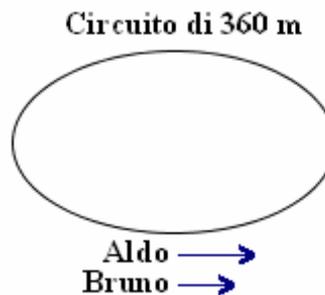
Quindi

Aldo in ogni secondo della sua corsa percorre a metri,
Bruno in ogni secondo della sua corsa percorre b metri.

Quando i due corrono in direzioni opposte, sul circuito di 360 metri, si incontrano ogni 40 secondi; ma ciò significa che la somma del percorso di Aldo in 40 secondi (che è poi $40 \cdot a$ metri) più il percorso di Bruno in 40 secondi (che è poi $40 \cdot b$ metri) dà 360 metri e quindi che $40a + 40b = 360$.



Quando i due corrono nella stessa direzione, sul circuito di 360 metri, Aldo (il più veloce), ogni volta che supera Bruno, ci mette 6 minuti a raggiungerlo nuovamente; ma ciò significa che la differenza fra il percorso (più lungo) di Aldo in 6 minuti (ossia 360 secondi) e il percorso (più corto) di Bruno in 6 minuti (ossia 360 secondi) dà 360 metri e quindi che $360a - 360b = 360$.



Allora avremo il sistema

$$\begin{cases} 40a + 40b = 360 \\ 360a - 360b = 360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$(1) + (2) \begin{cases} 2a = 10; a = 5 \end{cases}$$

$$(1) - (2) \begin{cases} 2b = 8; b = 4 \end{cases}$$

In definitiva,

Aldo va a 5 m al secondo, quindi in un'ora (3600 secondi) percorre $3600 \times 5 = 18000$ metri = 18 km e quindi viaggia a 18 km/h;

Bruno va a 4 m al secondo, quindi in un'ora (3600 secondi) percorre $3600 \times 4 = 14400$ m = 14,4 km e quindi viaggia a 14,4 km/h.

10)

Ho in tasca 43 monete, parte da 10, parte da 20, e parte da 50 centesimi.

Il totale equivale a 9 euro,

e il numero delle monete da 20 centesimi è $\frac{3}{4}$ di quello delle monete da 10.

Quante sono le monete da 10, quante quelle da 20, e quante quelle da 50?"

$x =$ numero monete da 10 centesimi

$y =$ numero monete da 20 centesimi

$z =$ numero monete da 50 centesimi

$$\begin{cases} x + y + z = 43 \\ 10x + 20y + 50z = 900 \quad (9 \text{ euro} = 900 \text{ centesimi}) \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 43 \\ 10x + 20y + 50z = 900 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 43 \\ x + 2y + 5z = 90 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x + \frac{3}{4}x + z = 43 \\ x + \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{4}2}x + 5z = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 4x + 3x + 4z = 172 \\ 2x + 3x + 10z = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 7x + 4z = 172 \\ 5x + 10z = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 7x + 4z = 172 \\ x + 2z = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x = 36 - 2z \\ 7(36 - 2z) + 4z = 172; \quad 252 - 14z + 4z = 172; \quad -10z = -80; \quad z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x} = 36 - 2z = 36 - 2 \cdot 8 = 36 - 16 = \boxed{20} \\ \boxed{y} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \cdot 20 = \boxed{15} \\ \boxed{z} = 8 \end{cases}$$