Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,
i cui elementi sono le coppie di numeri naturali, il secondo dei quali non nullo,
considera la seguente relazione:

$$\mathbf{(a, b)\ R\ (c, d)\ \leftrightarrow\ ad = bc}\,.$$

Dimostra che è di equivalenza.

1)
E' **riflessiva**? $(a, b)\ R\ (a, b)$ qualunque sia (a, b)?

Per definizione $\mathbf{(a, b)\ R\ (c, d)\ \leftrightarrow\ ad = bc}$
("il 1° per il 4° uguale al 2° per il 3°")

quindi
$(a, b)\ R\ (a, b)\ \leftrightarrow\ ab = ba$
e ciò evidentemente si verifica (commutativa del prodotto) qualunque siano a, b.

2)
E' **simmetrica**? $(a, b)\ R\ (c, d) \rightarrow (c, d)\ R\ (a, b)$ qualunque siano (a, b) e (c, d)?

$(a, b)\ R\ (c, d)\ \leftrightarrow\ ad = bc$
$(c, d)\ R\ (a, b)\ \leftrightarrow\ cb = da$ (lo stesso di prima!)
e perciò qualora si abbia $(a, b)\ R\ (c, d)$ si avrà senz'altro pure $(c, d)\ R\ (a, b)$, e viceversa.

Anche in catena:
$(a, b)\ R\ (c, d)\ \leftrightarrow\ ad = bc\ \leftrightarrow\ cb = da\ \leftrightarrow\ (c, d)\ R\ (a, b)$

3)
E' **transitiva**?
Se $(a, b)\ R\ (c, d)$ e $(c, d)\ R\ (e, f)$ allora si avrà certamente anche $(a, b)\ R\ (e, f)$?

$(a, b)\ R\ (c, d)\ \leftrightarrow\ ad = bc$
$(c, d)\ R\ (e, f)\ \leftrightarrow\ cf = de$
e perciò se si ha tanto $(a, b)\ R\ (c, d)$ quanto $(c, d)\ R\ (e, f)$
varranno entrambe le uguaglianze
$ad = bc\ \wedge\ cf = de$
per cui varrà pure l'uguaglianza ottenibile moltiplicandole membro a membro:

$$\begin{gathered} ad = bc \\ cf = de \\ a\cancel{d}\cancel{c}f = b\cancel{c}\cancel{d}e \end{gathered}$$

Ma se
$af = be$
allora
$(a, b)\ R\ (e, f)$
e dunque anche la proprietà transitiva sussiste per questa relazione.