NUMERI CON LA VIRGOLA IN BASE DIVERSA DA DIECI

Così come, in base DIECI, le cifre rappresentano

- prima della virgola, da destra a sinistra: le unità, le decine, le centinaia, le migliaia …
- e a partire dalla virgola, da sinistra a destra: i decimi, i centesimi, i millesimi …

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 7 & 8 & 4 & , & 3 & 5 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cdot 10^3 & \cdot 10^2 & \cdot 10^1 & \cdot 10^0 & & \cdot 10^{-1} & \cdot 10^{-2} & \cdot 10^{-3} \end{array}$$

altrettanto in base TRE si ha, ad esempio,

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & , & 2 & 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cdot 3^3 & \cdot 3^2 & \cdot 3^1 & \cdot 3^0 & & \cdot 3^{-1} & \cdot 3^{-2} & \cdot 3^{-3} \end{array}$$

e in base DUE si ha, ad esempio,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & , & 0 & 1 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cdot 2^3 & \cdot 2^2 & \cdot 2^1 & \cdot 2^0 & & \cdot 2^{-1} & \cdot 2^{-2} & \cdot 2^{-3} \end{array}$$

Quindi:

$$(101,101)_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} =$$
$$= 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot \frac{1}{2} + 0\cdot \frac{1}{4} + 1\cdot \frac{1}{8} = 5 + \frac{5}{8}$$

$$(12400,43)_5 = 1\cdot 5^4 + 2\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 + 4\cdot 5^{-1} + 3\cdot 5^{-2} =$$
$$= 1\cdot 625 + 2\cdot 125 + 4\cdot 25 + 0\cdot 5 + 0\cdot 1 + 4\cdot \frac{1}{5} + 3\cdot \frac{1}{25} = 975 + \frac{23}{25}$$

eccetera eccetera.

Come trasformare un numero con la virgola,
scritto in base dieci,
in un'altra base diversa da dieci?

Pensiamo, per fissare le idee, a una trasformazione in cui la base finale sia CINQUE.

Sia $(523,7)_{10}$ il numero assegnato.

Potremmo innanzitutto vederlo come somma della sua parte intera + la sua parte dopo la virgola:
$(523,7)_{10} = (523)_{10} + (0,7)_{10}$

Ora, per quanto riguarda la parte intera sappiamo bene come operare:
$(523)_{10} = \left(\boxed{4}\cdot 125 + \boxed{0}\cdot 25 + \boxed{4}\cdot 5 + \boxed{3}\cdot 1\right)_{10} = (4043)_5$

mentre **per quanto riguarda la parte decimale, si tratterà di**
"ricostruirla mediante mattoncini da $\mathbf{\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots}$ ".

Vediamo.

$(0,7)_{10} = \frac{7}{10}$

Ma nella frazione $\frac{7}{10}$, quante volte ci sta il "mattone" $\frac{1}{5}$?

Ci sta 3 volte, perché $3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} < \frac{7}{10}$ mentre $4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} > \frac{7}{10}$.

Allora

$$\frac{7}{10} = \frac{3}{5} + \left(\frac{7}{10} - \frac{3}{5}\right) = \boxed{3} \cdot \boxed{\frac{1}{5}} + \frac{1}{10}$$

Ora, nella frazione residua $\frac{1}{10}$, quante volte ci sta il "mattone" $\frac{1}{25}$?

Ci sta 2 volte, perché $2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{2}{25} < \frac{1}{10}$. mentre sarebbe $3 \cdot \frac{1}{25} = \frac{3}{25} > \frac{1}{10}$.

Allora $\frac{1}{10} = \frac{2}{25} + \left(\frac{1}{10} - \frac{2}{25}\right) = \boxed{2} \cdot \boxed{\frac{1}{25}} + \frac{1}{50}$.

Per ora abbiamo

$$\frac{7}{10} = \boxed{3} \cdot \boxed{\frac{1}{5}} + \boxed{2} \cdot \boxed{\frac{1}{25}} + \frac{1}{50}.$$

E nella frazione residua $\frac{1}{50}$, quante volte ci sta il "mattone" $\frac{1}{125}$?

Si vede che ci sta 2 volte, in quanto $2 \cdot \frac{1}{125} = \frac{2}{125} < \frac{1}{50}$ mentre sarebbe $3 \cdot \frac{1}{125} = \frac{3}{125} > \frac{1}{50}$

(due frazioni possono essere confrontate, ad esempio, portandole allo stesso denominatore per confrontare poi i numeratori).

Abbiamo dunque $\frac{1}{50} = \frac{2}{125} + \left(\frac{1}{50} - \frac{2}{125}\right) = \boxed{2} \cdot \boxed{\frac{1}{125}} + \frac{1}{250}$

Allora

$$\frac{7}{10} = \boxed{3} \cdot \boxed{\frac{1}{5}} + \boxed{2} \cdot \boxed{\frac{1}{25}} + \boxed{2} \cdot \boxed{\frac{1}{125}} + \frac{1}{250}$$

da cui:

$$(0,7)_{10} = (0,322...)_5$$

e dunque

$$(523,7)_{10} = (4043,322...)_5$$

Evidentemente, puoi costruirti tu stesso tutti gli esercizi che desideri, a tuo piacimento.

Ci sono, per far passare un numero con la virgola da una base ad un'altra,
metodi più svelti e "meccanici" di quello a cui abbiamo accennato nell'esempio.
Sta a te, se vuoi, approfondire, ad esempio cercando su Internet;
a tale scopo puoi inserire, in un motore di ricerca, parole chiave tipo
number system, base (o radix) conversion e simili.

Noi qui ci limitiamo a dire che **nel cambiamento di base, un numero con la virgola finito** *(terminating)* **potrebbe diventare periodico** (*repeating , o recurring*), **e viceversa**:

basti pensare, ad esempio, che il periodico $\left(0,\bar{3} = 0,33333333...\right)_{10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

se convertito in base tre, diventa semplicemente il finito $(0,1)_3$.

Invece si può dimostrare che un numero che è illimitato non periodico in una data base, continua ad essere tale anche se convertito in una qualsivoglia altra base.