

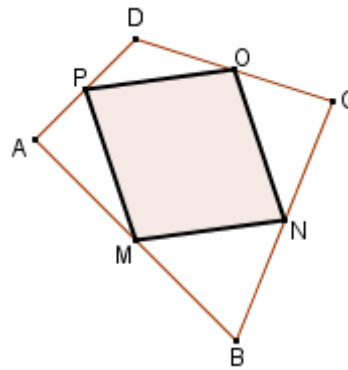
1)

TEOREMA

I punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi sono vertici di un parallelogrammo.

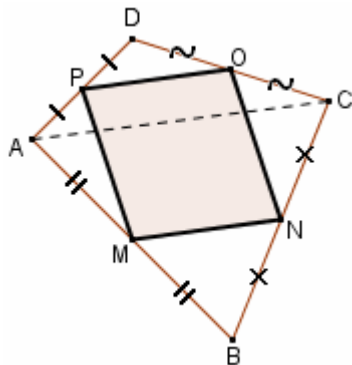
Che proprietà deve possedere il quadrilatero di partenza, affinché tale parallelogrammo sia

- a) un rettangolo?
- b) un rombo?
- c) un quadrato?



DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

1° modo: tracciando una sola diagonale



Nel triangolo ADC, il segmento PO congiunge i punti medi di due lati, quindi è parallelo al terzo lato e uguale alla sua metà:

$$PO \parallel AC, \quad PO = \frac{1}{2} AC$$

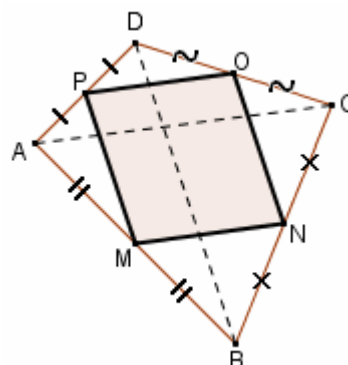
Allo stesso modo, nel triangolo ABC, si ha

$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC$$

Per le proprietà transitive del parallelismo e dell'uguaglianza, segue $PO \parallel MN, \quad PO = MN$

per cui il quadrilatero **MNOP**, avendo due lati opposti paralleli e uguali, è un parallelogrammo, c.v.d.

2° modo: tracciando entrambe le diagonali



Consideriamo i due triangoli ADC e ABC; poiché in ogni triangolo la congiungente i punti medi di due lati è uguale alla metà del terzo lato, è

$$PO = \frac{1}{2} AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC \text{ da cui } PO = MN$$

Allo stesso modo,

considerando i due triangoli BAD e BCD, si ha

$$MP = \frac{1}{2} BD, \quad NO = \frac{1}{2} BD \text{ da cui } MP = NO$$

Allora il quadrilatero **MNOP**, avendo i lati opposti a due a due uguali, è un parallelogrammo, c.v.d.

RISPOSTE ai quesiti a), b), c)

Poiché, come abbiamo visto, i lati del parallelogrammo MNOP sono, a due a due, paralleli alle diagonali del quadrilatero ABCD e, sempre a due a due, uguali alle metà di queste diagonali, il parallelogrammo MNOP sarà:

- a) un **rettangolo**, nel caso che le **diagonali di ABCD** siano **perpendicolari**
- b) un **rombo**, nel caso che le **diagonali di ABCD** siano **uguali**
- c) un **quadrato**, nel caso che le **diagonali di ABCD** siano **perpendicolari e uguali**

