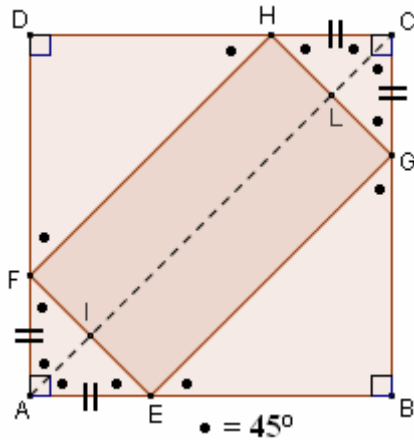


- 24) A partire dai due vertici opposti A, C di un quadrato $ABCD$ si prendono, sui lati, quattro segmenti uguali fra loro $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH}$. Dimostra che:
- I) il quadrilatero di vertici E, G, H, F è un rettangolo
 - II) il perimetro di questo rettangolo rimarrebbe sempre costante, anche se variasse la lunghezza dei quattro segmenti uguali $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH}$.



HP

$ABCD$ quadrato, $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH}$

TH

- I) $EGHF$ rettangolo
- II) $2p(EGHF) = \text{costante}$

DIMOSTRAZIONE

- I) La prima parte è molto facile.

Nella figura si hanno dei triangoli rettangoli isosceli

$\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH}$ per ipotesi, $\overline{BE} = \overline{BG} = \overline{DF} = \overline{DH}$ perché differenze di segmenti uguali).

Ma in un triangolo rettangolo isoscele gli angoli acuti sono di 45° , quindi, ad esempio,

$\hat{FEG} = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ e analogamente si dimostrano retti gli altri angoli di $EGHF$.

- II) La seconda parte richiede di tracciare una diagonale del quadrato (a proposito, è noto che in un quadrato le diagonali sono bisettrici degli angoli interni, quindi ogni diagonale forma angoli di 45° con i lati del quadrato).

Si dimostrerà che il perimetro di $EGHF$ è costante, perché è uguale al doppio di questa diagonale, che è fissa!

Infatti

(tenendo conto dei triangoli isosceli AIE, AIF, CLG, CLH

e del fatto che gli angoli di vertici I ed L sono tutti retti perché $180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$,

per cui i quadrilateri $IEGL$ e $IFHL$ sono due rettangoli),

si può scrivere la catena

$$\begin{aligned} 2p(EGHF) &= \overline{EG} + \overline{GH} + \overline{HF} + \overline{FE} = \overline{EG} + \overline{GL} + \overline{LH} + \overline{HF} + \overline{FI} + \overline{IE} = \\ &= \overline{IL} + \overline{LC} + \overline{LC} + \overline{IL} + \overline{AI} + \overline{AI} = 2(\overline{AI} + \overline{IL} + \overline{LC}) = 2\overline{AC} \end{aligned}$$

Con ciò è dimostrata la tesi, perché si è provato che il perimetro di $EGHF$ è uguale, indipendentemente dalla lunghezza di $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH}$, al doppio di un segmento fisso, quindi ad una quantità costante.