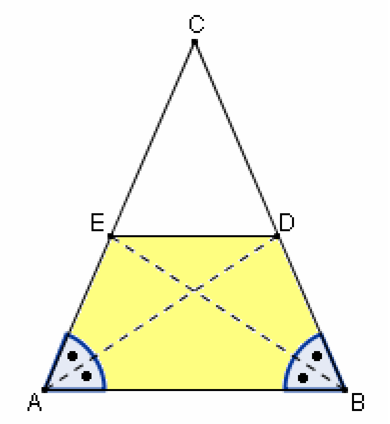
23) Si tracciano le bisettrici degli angoli alla base di un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB}$, e si indicano con D, E le intersezioni di tali bisettrici rispettivamente con $\overline{BC}$ e con $\overline{AC}$. Dimostrare che ABDE è un trapezio isoscele, col lato obliquo uguale alla base minore.



HP

$\overline{CA} = \overline{CB}$

$D\hat{A}C = D\hat{A}B; \quad E\hat{B}C = E\hat{B}A$

TH

ABDE trapezio isoscele,
col lato obliquo uguale alla base minore
$(ED \parallel AB, \quad \overline{AE} = \overline{BD} = \overline{ED})$

DIM.

Poiché in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali,
e dato che metà di angoli uguali sono uguali, avremo

$$C\hat{A}B = C\hat{B}A; \quad D\hat{A}C = D\hat{A}B = E\hat{B}C = E\hat{B}A\ .$$

I due triangoli AEB, ADB sono dunque uguali per il 2° Criterio e di conseguenza $\boxed{\overline{AE} = \overline{BD}}$,
da cui allora, per differenza di segmenti uguali, $\overline{CE} = \overline{CD}$.
Perciò anche il triangolo CED è isoscele e se ne trae

$$C\hat{E}D = C\hat{D}E \underset{\substack{\text{triangolo}\\\text{isoscele}\\\text{EDC}}}{=} \frac{180° - \hat{C}}{2} \underset{\substack{\text{triangolo}\\\text{isoscele}\\\text{ABC}}}{=} C\hat{A}B = C\hat{B}A$$

In particolare,

$$C\hat{E}D = C\hat{A}B\,;$$

e poiché questi due angoli sono corrispondenti
rispetto alle due rette ED e AB con la trasversale AC,
dal fatto che siano uguali si deduce che $\boxed{ED \parallel AB}$.

Ma $ED \parallel AB$ implica che $E\hat{D}A = D\hat{A}B$ (alterni interni rispetto a due parallele con trasversale).

Si ha quindi $\boxed{E\hat{D}A} = D\hat{A}B \boxed{= D\hat{A}C}$

e il triangolo AED, avendo due angoli uguali, è isoscele ($\boxed{\overline{AE} = \overline{ED}}$).

La dimostrazione è così completata.