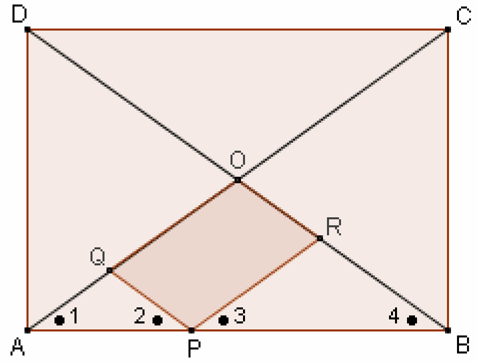
19) Sia ABCD un rettangolo; si traccino le sue diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, e sia O il punto in cui queste si tagliano. Preso poi su $\overline{AB}$ un punto P, si traccino da P: la || a BD, fino ad incontrare $\overline{AC}$ in Q, e la || ad $\overline{AC}$, fino ad incontrare $\overline{BD}$ in R. Dimostra che il perimetro di PQOR è uguale ad una diagonale del rettangolo.



IPOTESI: ABCD rettangolo; $PQ \parallel BD$, $PR \parallel AC$

TESI: $\overline{PQ}+\overline{QO}+\overline{OR}+\overline{RP}=\overline{AC}$

DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto, in un rettangolo le diagonali sono uguali:

$\overline{AC}=\overline{BD}$

e si tagliano fra loro in metà, quindi

$\overline{AO}=\overline{OC}=\overline{BO}=\overline{OD}$.

In particolare è

$\overline{AO}=\overline{BO}$:

AOB è isoscele, quindi

$\boxed{\hat{A}_1=\hat{B}_4}$.

Ora, essendo $PR \parallel AC$, sarà $\boxed{\hat{P}_3=\hat{A}_1}$ (corrispondenti)

ed essendo $PQ \parallel BD$, sarà $\boxed{\hat{P}_2=\hat{B}_4}$ (corrispondenti)

per cui si avrà

$\boxed{\hat{P}_2=\hat{B}_4=\hat{A}_1=\hat{P}_3}$.

Di conseguenza i due triangoli APQ, PBR sono isosceli ($\overline{PQ}=\overline{AQ}$, $\overline{RP}=\overline{RB}$).

Perciò

$$\overline{PQ}+\overline{QO}+\overline{OR}+\overline{RP}=\overline{AQ}+\overline{QO}+\overline{OR}+\overline{RB}=\left(\overline{AQ}+\overline{QO}\right)+\left(\overline{OR}+\overline{RB}\right)=\overline{AO}+\overline{OB}=\overline{AO}+\overline{OC}=\overline{AC},\quad \text{c.v.d.}.$$