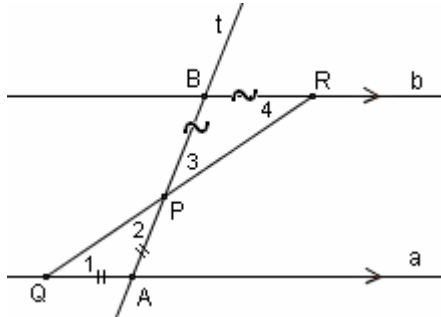


23) Due parallele a, b sono tagliate da una trasversale t , che le interseca in A e in B rispettivamente. Fissato un punto qualsiasi P sul segmento \overline{AB} , sulla retta a si prenda un segmento $\overline{AQ} = \overline{AP}$ e sulla retta b si prenda un segmento $\overline{BR} = \overline{BP}$, in modo che R e Q si trovino da parti opposte rispetto alla retta t . Dimostrare che i due segmenti \overline{PQ} e \overline{PR} stanno uno sul prolungamento dell'altro.



HP
 $a \parallel b$
 $\overline{AQ} = \overline{AP}, \overline{BR} = \overline{BP}$
 (con R, Q da parti opposte rispetto a t)

TH
 \overline{PQ} e \overline{PR} stanno uno sul prolungamento dell'altro

OSSERVAZIONE PRELIMINARE (occhio a non commettere errori logici!)

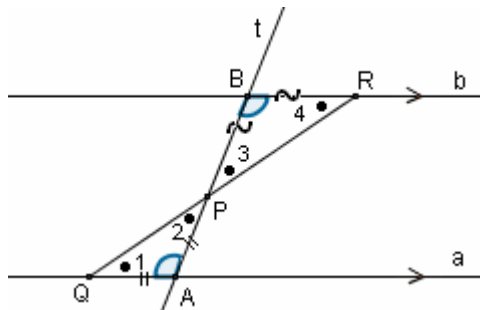
Attenzione a non incorrere nell'errore logico di dare per scontato che i due angoli $\widehat{P}_2, \widehat{P}_3$ siano opposti al vertice. In realtà, **soltanto riguardo ai due segmenti \overline{PA} e \overline{PB} , noi siamo sicuri che stanno uno sul prolungamento dell'altro; il discorso cambia invece per \overline{PQ} e \overline{PR}** , i quali NON sono stati generati, come \overline{PA} e \overline{PB} , dallo spezzare in due quello che era un unico segmento, BENSÌ sono stati tracciati indipendentemente l'uno dall'altro, per cui il fatto che stiano uno sul prolungamento dell'altro non è scontato, e anzi è appunto l'obiettivo dimostrativo.

DIM.

Si tratta di far vedere che \overline{PQ} e \overline{PR} formano un angolo piatto. Cominciamo con l'osservare che, essendo $a \parallel b$, i due angoli alterni interni \widehat{PAQ} e \widehat{PBR} sono uguali.

Ma i due triangoli PAQ e PBR sono isosceli per ipotesi, quindi

$$\widehat{Q}_1 = \widehat{P}_2_{PAQ} = \frac{180^\circ - \widehat{PAQ}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{PBR}}{2} = \widehat{P}_3 = \widehat{R}_4$$



La catena mostra dunque che i quattro angoli $\widehat{Q}_1, \widehat{P}_2, \widehat{P}_3, \widehat{R}_4$ sono tutti uguali fra loro:

In particolare, ci interessa che sia $\widehat{P}_2 = \widehat{P}_3$, perché ciò ci consente di scrivere

$$\widehat{QPR} = \widehat{P}_2 + \widehat{APR} = \widehat{P}_3 + \widehat{APR} = \widehat{BPA} \stackrel{\text{NOTA}}{=} 180^\circ \text{ C.V.D.}$$

NOTA. – Che \widehat{BPA} sia piatto è fuori discussione: il punto P era stato preso sul segmento \overline{AB} , quindi i due segmenti \overline{PA} e \overline{PB} stanno **certamente** uno sul prolungamento dell'altro.