RELAZIONI E FUNZIONI

1. PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI

Si dice "**prodotto cartesiano**" di due insiemi A e B,
l'insieme $A \times B$ (leggi: "A cartesiano B") formato da tutte le **coppie ordinate**
aventi come *primo elemento* un elemento di A, e come *secondo elemento* un elemento di B.

In simboli: $\boxed{A \times B = \{(x, y) / \ x \in A \wedge y \in B\}}$

ESEMPIO

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{s, t\}$,
allora $A \times B = \{ (1, s); (1, t); (2, s); (2, t); (3, s); (3, t) \}$

	s	t
1	$(1, s)$	$(1, t)$
2	$(2, s)$	$(2, t)$
3	$(3, s)$	$(3, t)$

IM-POR-TAN-TE

Le GRAFFE indicano "INSIEME",
es. $B = \{s, t\}$ (NON CONTA L'ORDINE);
le TONDE indicano invece "COPPIA ORDINATA",
es. $(1, s)$ (PRIMA 1 e POI s)

ALTRI ESEMPI

- Detto S l'insieme delle *squadre* di calcio di un dato campionato nel quale ogni squadra incontra tutte le altre e si ha un girone di *andata* + un girone di *ritorno*, l'insieme P di tutte le *partite* del campionato coincide sostanzialmente con

  $S \times S$, PRIVATO PERO' delle coppie del tipo (x, x),

  voglio dire: tolte le coppie in cui il primo elemento coincida col secondo (una squadra non gioca contro sé stessa).

- Detto F l'insieme delle alunne di una classe femminile, se si devono eleggere una *miss* e una *rappresentante di classe*, e le due cariche sono *compatibili*, l'insieme dei possibili esiti di questa elezione è $F \times F$.

- Ancora: ogni punto del piano cartesiano è individuato dalla coppia ordinata delle sue coordinate. Ciò stabilisce una corrispondenza biunivoca fra il piano cartesiano, visto come l'insieme dei suoi punti, e l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i cui elementi sono le *coppie ordinate* di numeri reali.

2. RELAZIONI

Nel linguaggio di tutti i giorni, la parola RELAZIONE è usata in contesti molto diversi.
Tuttavia, il suo significato è sempre quello di "legame, collegamento".
Esempi:

a) " La parsimonia di quell'uomo è in RELAZIONE con la sua povertà "
b) " C'è una RELAZIONE fra il giardiniere e la padrona di casa "
c) " La camorra napoletana è in RELAZIONE con la malavita cinese "

In Matematica, la parola "relazione" è particolarmente importante
quando viene impiegata per indicare un "**COLLEGAMENTO FRA DUE INSIEMI**".

ESEMPIO 1

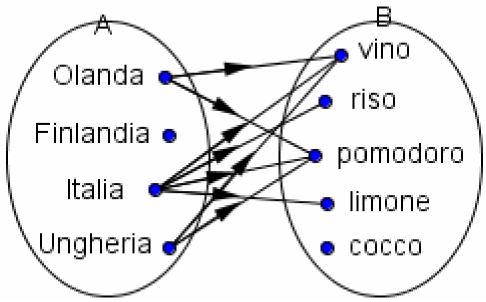
Consideriamo i due insiemi seguenti:

A = {Olanda, Finlandia, Italia, Ungheria}
B = {vino, riso, pomodoro, limone, cocco}

Il primo è un insieme di nazioni europee,
il secondo è un insieme di beni dell'agricoltura.

Esiste una RELAZIONE fra i due insiemi,
nel senso che alcune fra le nazioni di A
sono produttrici di alcuni fra i prodotti di B.

Tale relazione è illustrata
dal diagramma riportato qui a fianco.

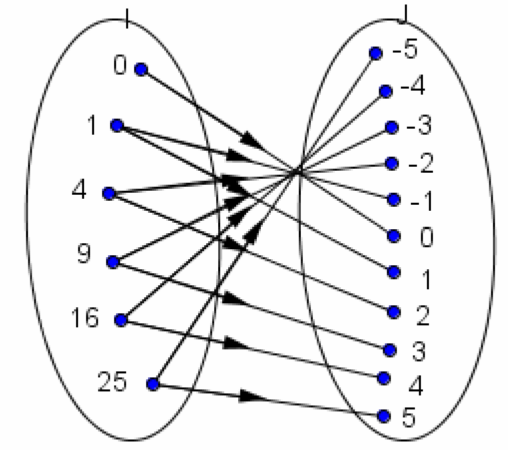


ESEMPIO 2

$I = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$

$J = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Fra i due insiemi I, J
esiste una RELAZIONE,
in quanto gli elementi di I
sono i quadrati degli elementi di J:
vedi la figura qui a fianco
per una rappresentazione
di questa relazione fra I e J.

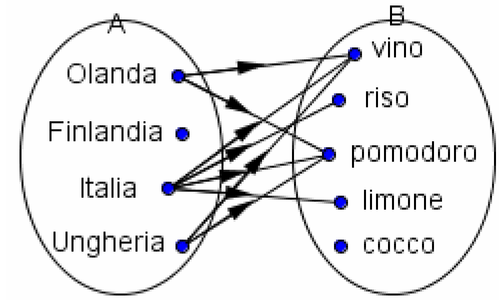


Collegare gli elementi di due insiemi, stabilire fra di essi una corrispondenza, un legame,
e saper riconoscere le proprietà di questo legame, è di estrema importanza in Matematica.
Per questo,

**i matematici hanno riservato estrema attenzione al concetto di "relazione"
intesa come "collegamento tra due insiemi",
stabilendo alcune definizioni ed un preciso gergo tecnico,
al giorno d'oggi indispensabili per chiunque intenda occuparsi di questioni matematico-logiche.**

Riprendiamo il primo dei due esempi dai quali eravamo partiti.

Fra l'insieme
A = {Olanda, Finlandia, Italia, Ungheria}
e l'insieme
B = {vino, riso, pomodoro, limone, cocco}
abbiamo considerato la relazione definita dal **predicato**
" ... è nazione produttrice di ... " ,
ed illustrata dal **diagramma a frecce** qui a fianco:



In definitiva, tale relazione stabilisce un INSIEME DI COPPIE, sottoinsieme di $A \times B$:

{ (Olanda, vino); (Olanda, pomodoro);
(Italia, vino); (Italia, riso); (Italia, pomodoro); (Italia, limone);
(Ungheria, vino); (Ungheria, pomodoro) }

Questa osservazione ci porta a formulare la definizione generale seguente:

**Si dice RELAZIONE fra due insiemi A, B
un legame fra gli elementi di A e gli elementi di B,
che è espresso da un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.**

Detta R una relazione,
per indicare che a (elemento dell'insieme A) è in relazione con b (elemento dell'insieme B)
si usa, indifferentemente, una delle due scritture

- **a R b** ("notazione infissa")
- **R(a, b)** ("notazione prefissa")

ESEMPI

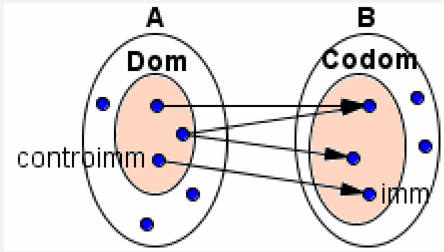
1) Andando a riprendere la relazione
R = " ... è nazione produttrice di ..."
fra gli insiemi A, B precedentemente considerati,
possiamo scrivere:
- Italia R pomodoro
- R (Italia, pomodoro)

2) Con riferimento alla relazione
Q = "... è quadrato di ..."
(relazione fra I, J dell'esempio 2), abbiamo:
$9\ Q\ 3 \qquad 9\ Q\ -3 \qquad Q(16, 4) \qquad \overline{Q}(1, 0)$
(la soprallineatura ha il significato di *negazione*)

Data una relazione R fra un insieme A ed un insieme B
(si preferisce dire, anche per mettere in risalto l'ordine: "**di**" **un insieme A** "**verso**" **un insieme B**),

- **A** si dice "**INSIEME DI PARTENZA**" e **B** si dice "**INSIEME DI ARRIVO**";
- **il sottoinsieme di A costituito da quegli elementi di A, che sono in relazione R con almeno un elemento di B, si dice "DOMINIO" di R** (in pratica, il *dominio* di una relazione R di A verso B è **il sottoinsieme di A formato dagli elementi da cui parte almeno una freccia**);
- **invece**, **si dice "CODOMINIO" di R il sottoinsieme di B costituito da quegli elementi di B ai quali arriva almeno una freccia**.
- **Se a R b, allora b si dice "IMMAGINE" di a, mentre a si dice "CONTROIMMAGINE" di b.**

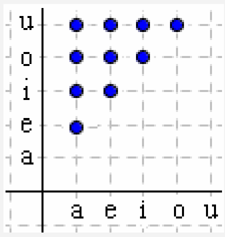
Dunque
- **il DOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di partenza A, che hanno almeno una immagine;**
- **e il CODOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di arrivo B, che hanno almeno una controimmagine.**



Nel nostro Esempio 1 (nazioni e prodotti dell'agricoltura), il dominio della relazione è D = {Olanda, Italia, Ungheria}; il codominio è C = {vino, riso, pomodoro, limone}.
L' Ungheria ha due "immagini": il vino e il pomodoro. L'unica "controimmagine" del riso è l'Italia.

Ecco un modo efficace di rappresentare una relazione. →
In un riferimento cartesiano, si elencano sull'asse orizzontale gli elementi dell'insieme di partenza X, e su quello verticale gli elementi dell'insieme di arrivo Y; nel caso sia x R y, si evidenzia poi con un tondino il punto di intersezione fra la retta verticale per x e la retta orizzontale per y.
Nella fattispecie, la relazione indicata in figura è: "la vocale x precede la vocale y in ordine alfabetico".
In questo esempio gli insiemi di partenza e di arrivo coincidono: la relazione si dice "interna ad un insieme" (vedi par. successivo).

Rappresentazione cartesiana



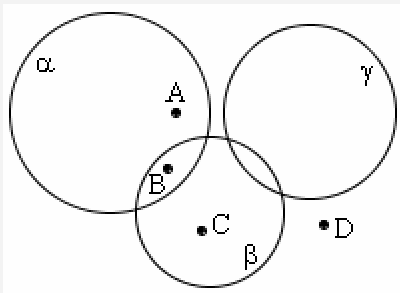
Alternativa: tabella a doppia entrata

1\2	a	e	i	o	u
a		●	●	●	●
e			●	●	●
i				●	●
o					●
u					

ESERCIZI (risposte alla pagina successiva)

1) Dati i due insiemi X = {2, 3, 4, 5, 6} e Y = {7, 8, 9, 10, 11} e la seguente relazione di X verso Y: R = "... è divisore di ..."
   a) disegna il diagramma a frecce e anche il diagramma cartesiano della relazione; determina dominio e codominio di questa;
   b) fra le seguenti affermazioni, distingui le vere dalle false:
      I) 2 R 7 II) R(2, 8) III) R(8,2) IV) 3 non ha immagini V) 11 non ha controimmagini

2) La figura qui riportata mostra quattro punti A, B, C, D e tre circonferenze α, β, γ.
   Posto $X = \{A, B, C, D\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, scrivi gli elementi del sottoinsieme di $X \times Y$ che esprime la relazione: "il punto x è interno alla circonferenza y".
   Determina dominio e codominio della relazione.
   Rappresentazione cartesiana e col diagramma a frecce.



3) Sempre con riferimento alla figura qui a destra, scrivi gli elementi del sottoinsieme di $Y \times Y$ che esprime la relazione: " la circonferenza y interseca in due punti la circonferenza y' ".
   Determina dominio e codominio della relazione.
   Rappresentazione cartesiana e col diagramma a frecce.

4) $L = \{33, 34, 35\}$, $N = \{36, 37, 38, 39\}$. Scrivi gli elementi del sottoinsieme di $L \times N$ che esprime la relazione: "Il prodotto di $x \in L$ per $y \in N$ è un multiplo di 3" e rappresenta la relazione sia con un diagramma a frecce, che con un riferimento cartesiano. Determina infine dominio e codominio della relazione.

5) Se ti chiedono quante sono le possibili relazioni di A in B (cioè: aventi come insieme di partenza A e come insieme di arrivo B) nel caso A abbia 3 elementi e B ne abbia 5, tu cosa rispondi?
   [*Una relazione coincide sostanzialmente con un sottoinsieme del prodotto cartesiano* $A \times B$; *ma se* A *ha* 3 *elementi e* B 5, *allora* $A \times B$ *ha … elementi, quindi i suoi sottoinsiemi sono in numero di …*]

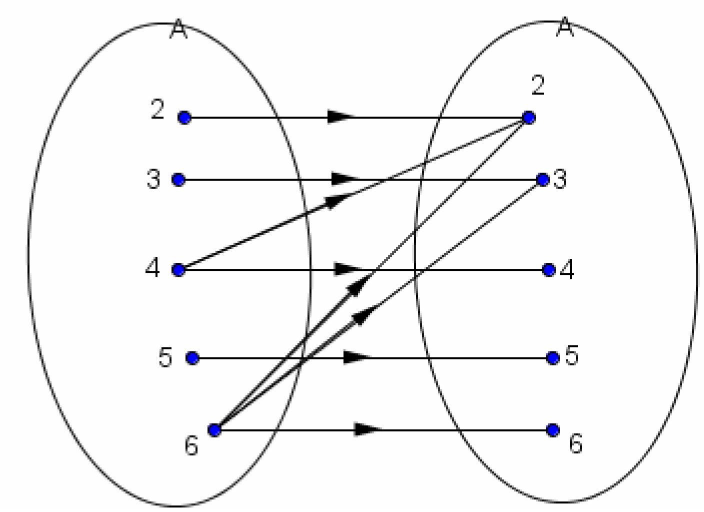
RELAZIONI INTERNE AD UN INSIEME

Se insieme di partenza e insieme di arrivo coincidono, si parlerà di "relazione **interna** ad un insieme".

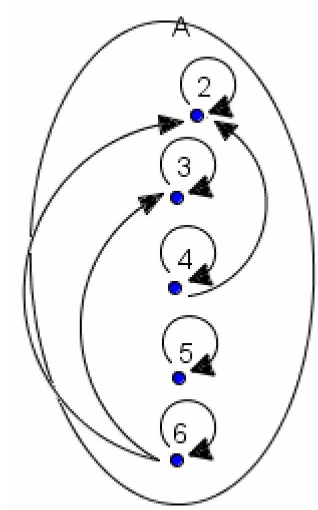
Quando vogliamo rappresentare una relazione interna ad un insieme, possiamo procedere in 2 modi.

Illustriamoli con riferimento all'insieme $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
e alla relazione, ad esso interna, R = " … è multiplo di … "

1° modo: rappresentiamo A due volte



2° modo: rappresentiamo A una volta sola



Un simbolo di "auto-corrispondenza"

si chiama anche "*buccola*" (da una parola in disuso che significava "boccolo, ricciolo" o anche "orecchino")

ESERCIZI

1) Considerato l'insieme A = {2, 3, 4, 5, 6}
traccia un diagramma a frecce,
con A rappresentato una sola volta,
per raffigurare la relazione R, interna ad A,
così definita:

$$x \text{ R } y \Leftrightarrow |x-y| = 3$$

(il simbolo $\Leftrightarrow$ è quello di "biimplicazione logica":
"se … allora … e viceversa,
per qualsiasi valore delle lettere coinvolte")

2) Nell'insieme X = {1, 2, 3, 4, 5, 6} rappresenta, sia con un diagramma a frecce che cartesianamente, le relazioni seguenti:

a) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *è divisibile per* y b) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *è divisore di* y
c) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *ha più divisori di* y d) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x + y$ *è pari*

RISPOSTE agli esercizi della pagina precedente

1) a) Dominio = {2, 3, 4, 5}, Codominio = {8, 9, 10} b) I) F II) V III) F IV) F V) V
2) $(A, \alpha); (B, \alpha); (B, \beta); (C, \beta)$. Dominio $= \{A, B, C\}$; Codominio $= \{\alpha, \beta\}$
3) $(\alpha, \beta); (\beta, \alpha); (\beta, \gamma); (\gamma, \beta)$. Dominio $= \{\alpha, \beta, \gamma\} = Y$; Codominio $= \{\alpha, \beta, \gamma\} = Y$
4) $(33, 36); (33, 37); (33, 38); (33, 39); (34, 36); (34, 39); (35, 36); (35, 39)$
Dominio $= \{33, 34, 35\} = L$, codominio $= \{36, 37, 38, 39\} = N$
5) 32768

RISPOSTE agli esercizi di questa pagina

1) $(2,5); (3,6); (5,2); (6,3)$
2) a) $(6,6); (6,3); (6,2); (6,1); (5,5); (5,1); (4,4); (4,2); (4,1); (3,3); (3,1); (2,2); (2,1); (1,1)$
b) $(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,2); (2,4); (2,6); (3,3); (3,6); (4,4); (5,5); (6,6)$
c) $(6,5); (6,4); (6,3); (6,2); (6,1); (5,1); (4,5); (4,3); (4,2); (4,1); (3,1); (2,1)$
d) $(1,1); (1,3); (1,5); (2,2); (2,4); (2,6); (3,1); (3,3); (3,5); (4,2); (4,4); (4,6); (5,1); (5,3); (5,5); (6,2); (6,4); (6,6)$

3. PREDICATI

Si dice "predicato" un'affermazione che si fa riguardo a uno, due o più "argomenti", che possono essere oggetti concreti, oggetti astratti, persone.

Esempi:
- ... è femmina (predicato monoargomentale)
- ... è padre di ... (predicato biargomentale)
- ... e ... sono primi fra loro (predicato biargomentale)
- … * … = … + … (predicato a quattro argomenti)

- **Un predicato monoargomentale definisce un sottoinsieme**
  (di un dato "insieme ambiente", o "insieme universo");
- **un predicato biargomentale definisce una relazione**
  (fra due dati insiemi, presi in un certo ordine).

4. PROPRIETA' DI UNA RELAZIONE INTERNA AD UN INSIEME

Una relazione R in un insieme A
(importante: **stiamo parlando di una relazione INTERNA ad un insieme; insomma, stiamo supponendo che l'insieme di partenza coincida con l'insieme di arrivo**)
può godere delle proprietà seguenti:

RIFLESSIVA, **quando ogni elemento di A è in relazione R con sé stesso**: $\boxed{\forall x \in \mathrm{A},\ x\,\mathrm{R}\,x}$

Esempi:
- ... è divisore di ... (nell'insieme $\mathbb{N}^*$ dei numeri naturali non nulli)
- $x\,\mathrm{R}\,y \Leftrightarrow |x| = |y|$ (in $\mathbb{Z}$, oppure in $\mathbb{Q}$, oppure in $\mathbb{R}$)

ANTIRIFLESSIVA, **quando nessun elemento di A è in relazione R con sé stesso**:

$$\boxed{\nexists x \in \mathrm{A} /\ \ x\,\mathrm{R}\,x} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\forall x \in \mathrm{A},\ \ x \not\mathrm{R}\, x}$$

Esempio:
- ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)

SIMMETRICA, **quando, qualunque siano gli elementi *x, y* dell'insieme A, ogni volta che *x* R *y*, è anche *y* R *x***:

$$\boxed{\forall x,\ y \in \mathrm{A},\ \ x\,\mathrm{R}\,y \Rightarrow y\,\mathrm{R}\,x}$$

Esempi:
- ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)
- ... ha lo stesso padre di ... (in un insieme di persone)

ANTISIMMETRICA, **quando, nel caso si abbia *x* R *y* e *y* R *x*, ne consegue che *x* = *y***:

$$\boxed{\forall x, \forall y,\quad x\,\mathrm{R}\,y \wedge y\,\mathrm{R}\,x \Rightarrow x = y}$$

Osserviamo che una relazione è considerata antisimmetrica pure nel caso in cui l'impossibilità di trovare un controesempio che dimostri la falsità della proposizione nel riquadro, è dovuta al fatto che non risulta *mai* contemporaneamente $x\,\mathrm{R}\,y$ e $y\,\mathrm{R}\,x$; in altre parole, quando $x\,\mathrm{R}\,y \Rightarrow y \not\mathrm{R}\, x$.
In definitiva: le relazioni antisimmetriche sono tutte e sole quelle il cui diagramma a frecce, con l'insieme rappresentato una sola volta, può portare o non portare buccole, ma comunque non porta *nessuna "freccia a due punte"*.

Esempi:
- ... $\leq$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato, ad esempio $\mathbb{Z}$)
- ... è figlio di ... (in un insieme di persone)

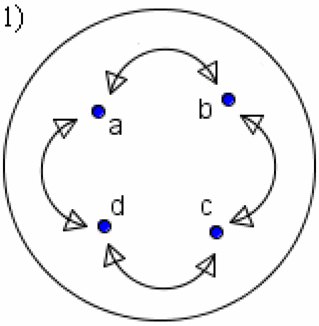
TRANSITIVA, **quando, ogni volta che *x* R *y* e *y* R *z*, si ha pure *x* R *z***:

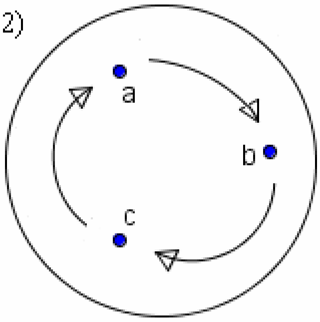
$$\boxed{\forall x, \forall y, \forall z\ \ x\,\mathrm{R}\,y \wedge y\,\mathrm{R}\,z \Rightarrow x\,\mathrm{R}\,z}$$

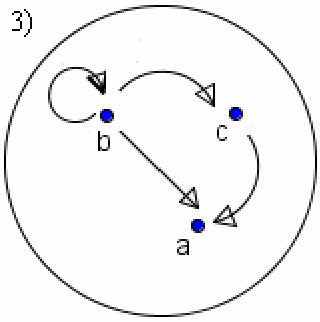
Esempio
- ... pesa di più rispetto a ... (in un insieme di persone)

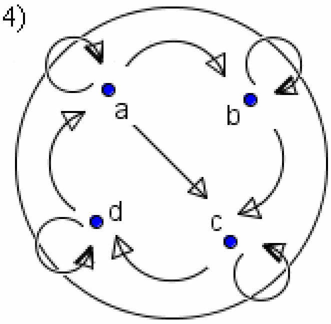
ESERCIZI (risposte alla fine del capitolo, pag. 484)

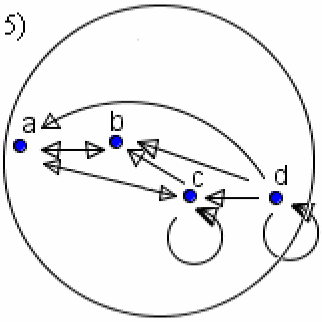
Considera le relazioni rappresentate in figura ed elenca per ciascuna le proprietà di cui gode.

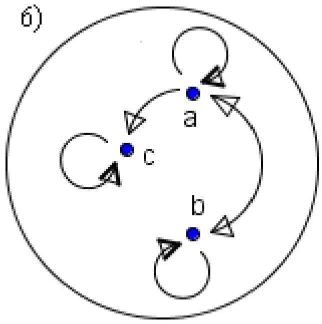
1)


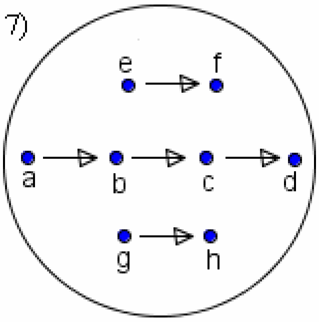
2)


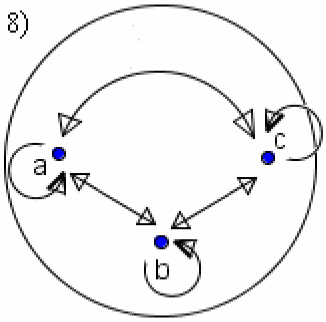
3)


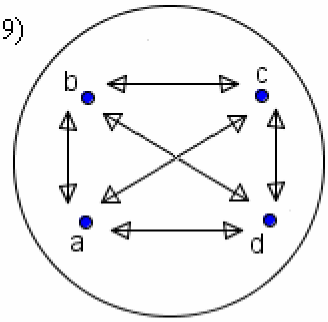
4)


5)


6)


7)


8)


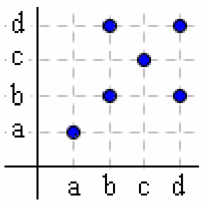
9)


Considera le relazioni seguenti ed elenca per ciascuna le proprietà di cui gode.

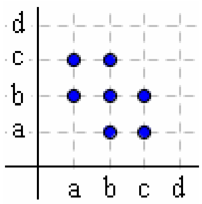
10) ... è divisore di ... (in $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$)
11) ... è primo con ... (in $\mathbb{N} - \{0,1\}$) [Due interi sono detti “primi fra loro” quando il loro M.C.D. è 1].
12) ... $<$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
13) ... $\leq$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
14) ... $=$ ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
15) ... è nato nello stesso anno di ... (in un determinato insieme di persone)
16) ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)
17) ... ha almeno un punto in comune con ... (nell'insieme delle rette di un piano)
18) x R y se e solo se esiste un numero naturale n tale che $x^n = y$ (in $\mathbb{N}^*$)
19) x R y se e solo se $x + y$ è intero (in $\mathbb{Q}$)
20) … ama … in $\{a,b,c\}$ qualora: a ami b e viceversa, b ami c non ricambiato, a e c non si amino
21) … confina con … nell’insieme degli Stati europei.

22)

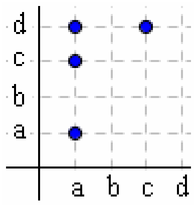
Le relazioni
I), II), III), IV)
qui raffigurate,
di quali proprietà godono?



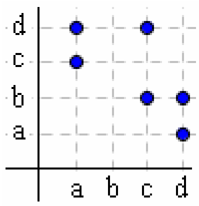
I)



II)



III)



IV)

5. RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Una relazione R interna ad un insieme A si dice DI EQUIVALENZA
se gode delle tre proprietà: RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA.

ESEMPI

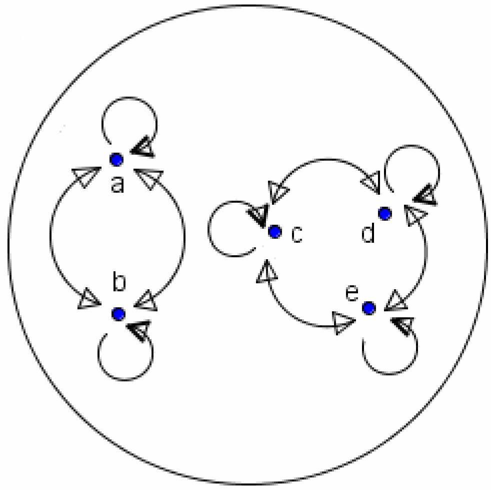
- **... è nato nello stesso anno di ...** (in un dato insieme di persone)
- **... è parallela a ...** nell'insieme delle rette di un piano,
  se intendiamo che ogni retta possa considerarsi parallela a sé stessa,
  ossia se adottiamo la definizione (definizione "estesa" di parallelismo):
  "date due rette complanari *r* ed *s*, *r* si dice parallela ad *s*
  se *r* ed *s* non hanno nessun punto comune, *oppure* ne hanno infiniti"

La relazione rappresentata dal diagramma a frecce qui a destra è:

1) *riflessiva* (ogni elemento ha una "buccola",
   è in relazione con sé stesso),
2) *simmetrica* (ogni freccia ha la punta in ambo i versi)
3) e *transitiva* (se c'è una freccia da *x* verso *y*,
   e un'altra da *y* verso *z*,
   c'è sempre anche la freccia da *x* verso *z*)

quindi è una *relazione di equivalenza*.

Anticipando quanto vedremo nel prossimo paragrafo,
si hanno qui due "*classi di equivalenza*",
che sono:
{a, b} e {c, d, e}



6. CLASSI DI EQUIVALENZA E DEFINIZIONE DI UN CONCETTO MATEMATICO PER ASTRAZIONE

Sia A un insieme in cui sia definita una relazione R di equivalenza:
allora A risulta suddiviso in tanti sottoinsiemi a due a due disgiunti,
ciascuno costituito da elementi tutti equivalenti fra loro.
Tali sottoinsiemi di A si dicono "classi di equivalenza".

Ad esempio, la relazione "... è parallela a ..."
suddivide l'insieme delle rette di un piano in infiniti sottoinsiemi,
ciascuno dei quali è formato da tutte e sole le rette che sono parallele ad una retta assegnata.
In questo esempio, possiamo dire che ogni classe di equivalenza
definisce, individua, rappresenta, una ben determinata "direzione".

Il concetto di "direzione" può anzi essere pensato proprio come
"quell'entità astratta che è comune a tutte e sole le rette di una data classe di equivalenza"
(ossia: **a tutte e sole le rette che sono parallele ad una retta data**).

Si capisce quindi come
il concetto di "ripartizione di un insieme in classi di equivalenza" costituisca, in Matematica, uno strumento utile per formulare definizioni di concetti "PER ASTRAZIONE".

ESERCIZI (risposte a pag. 484)

1) Considera, nell'insieme dei poligoni in un piano fissato, la relazione
   $x \; \mathrm{R} \; y \Leftrightarrow$ *x ha lo stesso numero di lati di y*
   e verifica che si tratta di una relazione di equivalenza. Quali sono le classi di equivalenza?

2) Considera la relazione
   $x \; \mathrm{R} \; y \Leftrightarrow$ *la differenza fra il numero indicato con x e il numero indicato con y è* 0
   nell'insieme di simboli $\left\{0,\overline{3};\ 0,\overline{5};\ 0,5;\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{9};\ \frac{1}{3};\ 3^{-1}\right\}$,
   e verifica che si tratta di una relazione di equivalenza.
   Disegna un diagramma di Venn che raffiguri l'insieme universo,
   ed evidenzia le sue classi di equivalenza.

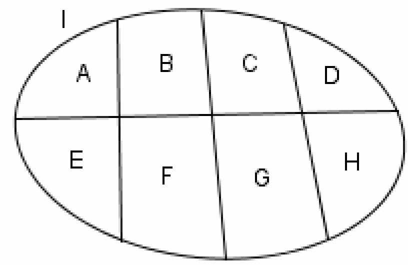
7. INSIEME QUOZIENTE

Sia R una relazione di equivalenza definita su di un insieme A.
L'insieme delle classi di equivalenza determinate in A da R
viene detto "insieme quoziente" ed indicato col simbolo A/R.

8. PARTIZIONE DI UN INSIEME

Una famiglia di sottoinsiemi di un dato insieme I viene chiamata una "partizione" di I se:

a. **nessuno fra gli insiemi della famiglia è vuoto**
b. **gli insiemi della famiglia sono a due a due disgiunti (= a intersezione vuota)**
c. **l'unione di tutti gli insiemi della famiglia è l'intero insieme I (= la famiglia "ricopre" I).**



Una partizione
di un insieme I
in 8 sottoinsiemi

Se su di un certo insieme I è **data una relazione di equivalenza**,
prese due qualsiasi classi di equivalenza distinte, esse sono disgiunte:
infatti, se per assurdo avessero un elemento in comune, coinciderebbero!

Inoltre, nessuna classe di equivalenza è vuota,
e l'unione di tutte le classi di equivalenza dà l'insieme I.

Le classi di equivalenza generate da una relazione di equivalenza R costituiscono pertanto una "partizione" di I (in altre parole: l'insieme quoziente I/R è una "partizione" di I).

ESEMPIO: la quaterna di insiemi
F_1 = { femmine minorenni della tua città }, M_1 = { maschi minorenni della tua città },
F_2 = { femmine maggiorenni della tua città }, M_2 = { maschi maggiorenni della tua città },
è una partizione dell'insieme C avente per elementi gli abitanti della tua città.

ESERCIZI

3) Considera l'insieme universo costituito dagli studenti della tua classe, e in esso la relazione
$x \text{ R } y \Leftrightarrow$ *x è nato nello stesso mese di y*
Disegna un diagramma di Venn che raffiguri l'insieme universo,
e la sua *partizione* in *classi di equivalenza*.

4) Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, i cui elementi sono le coppie di numeri naturali,
il secondo dei quali non nullo, considera la seguente relazione:
$(a, b) \text{ R } (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.
Dimostra che è di equivalenza. *Correzione* ⇨

NOTA - Confrontiamo le due frasi seguenti:

1) "Si dice DIREZIONE quell'entità astratta, quel *quid*,
che è comune a tutte e sole le rette parallele ad una retta data"

2) "Si dice DIREZIONE l'insieme di tutte e sole le rette parallele ad una retta data"

Quale fra le due definizioni 1), 2) ti sembra più corretta?

Scommetterei che hai optato per la 1), e sono perfettamente d'accordo con la tua scelta.

Contro le aspettative, invece, in Matematica superiore prevale l'uso di esprimere
una definizione "per astrazione" nella forma "brutale" che è esemplificata dalla 2).

Vediamola così:

- dal punto di vista "operativo", la sola definizione che si rivela "efficace" è la 2);
- dal punto di vista "filosofico, concettuale", è evidente che "vince" la 1).

Noi comunque, ogniqualvolta su di un libro di testo troviamo una definizione come la 2),
possiamo benissimo pensare (tanto, nella pratica, non cambierà proprio nulla)
che si tratti di un'abbreviazione della 1).

9. RELAZIONI D'ORDINE

Si dice che una relazione R interna ad un insieme A è una relazione D'ORDINE se gode delle proprietà ANTISIMMETRICA e TRANSITIVA (come la relazione $<$ o la relazione $\leq$ in un insieme numerico).

Una relazione d'ordine R in un insieme A si dice poi

- di **ORDINE STRETTO se è anche ANTIRIFLESSIVA**
  (= *nessun* elemento è in relazione con sé stesso)
- di **ORDINE LARGO se è anche RIFLESSIVA**
  (= *ogni* elemento è in relazione con sé stesso)

Un esempio classico di ordine *stretto* è dato dalla relazione $<$,
mentre un esempio classico di ordine *largo* è dato da $\leq$.

Anzi!

- **Per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine stretto", converrà proprio pensare alla relazione $<$, che è il "prototipo" dell'ordine stretto**:
  essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e antiriflessiva.
- **E per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine largo", converrà proprio pensare alla relazione $\leq$, che è il "prototipo" dell'ordine largo**:
  essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e riflessiva.

Altri esempi:

- nell'insieme dei cittadini di un dato Comune, la relazione: … è discendente di … è di ordine stretto
- nell'insieme delle persone in una "coda", la relazione: … non sta dietro a … è di ordine largo.

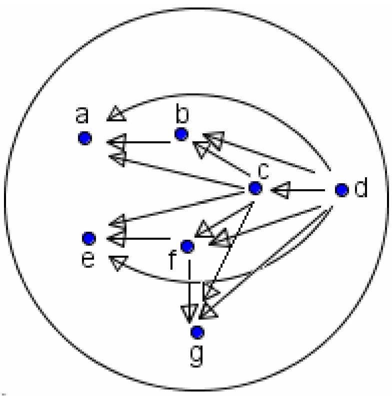
- **Si dice che una relazione d'ordine (largo o stretto) in un insieme A è un ORDINE TOTALE quando, presi due elementi distinti *x*, *y* di A, essi sono sempre "confrontabili", sono sempre "in relazione", nel senso che o risulta *x* R *y*, oppure *y* R *x*; in questo caso, si dice che A è un insieme "totalmente ordinato" dalla relazione considerata.**
- **In caso contrario**, cioè se la relazione d'ordine è tale che
  NON TUTTE le coppie di elementi distinti di A sono "confrontabili",
  si parla di ORDINE PARZIALE e di insieme "parzialmente ordinato".

Esempi:

- Consideriamo l'insieme N* e in esso la relazione R definita dal predicato: ... è divisore di ...
  E' facile riconoscere che R è un "ordine largo, parziale".
- Sia dato un insieme E.
  Consideriamo P(E), ossia: l' "insieme delle parti di E", l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di E.
  Ad esempio, se E = { a, b, c }, allora P(E) = { {}, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a, b, c} }.
  In P(E), la relazione di inclusione $\subseteq$ è di ordine largo, parziale
  mentre la relazione di "inclusione stretta" $\subset$ è di ordine stretto, parziale.

La relazione in figura, essendo antisimmetrica e transitiva, è di **ordine**.

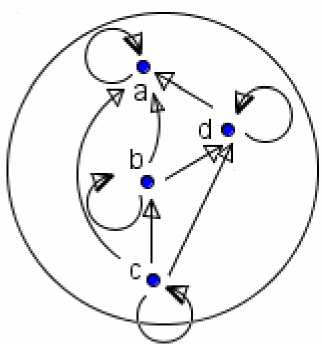
Essendo pure antiriflessiva, è di ordine **stretto**.



Non tutti gli elementi sono "confrontabili" (ad esempio e, g non lo sono), quindi l'ordine è **parziale**.
E' come se la relazione stabilisse delle "**gerarchie**" fra gli elementi dell'insieme.

La relazione rappresentata qui a destra, essendo antisimmetrica e transitiva, è di **ordine**.

Essendo pure riflessiva, è di ordine **largo**.



Tutti gli elementi sono "confrontabili", quindi l'ordine è **totale**.

Viene stabilita una "**lista di precedenze**", una "**coda**": **c-b-d-a**.

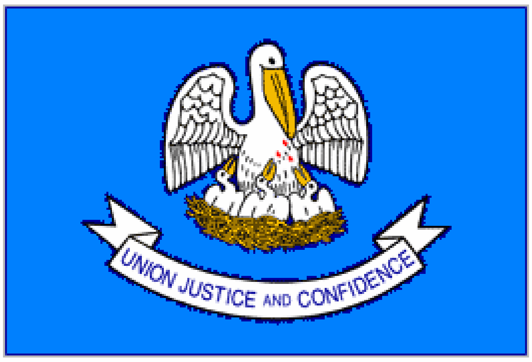
Se valgono perlomeno le proprietà **riflessiva** e **transitiva** si parla di relazione di **PREORDINE**.
Un preordine può essere
- "totale" se, presi due qualsivoglia elementi, essi risultano sempre "confrontabili";
- "parziale" se ciò non avviene.

ESERCIZI SULLE RELAZIONI DI EQUIVALENZA E DI ORDINE (risposte a pag. 484)

Fra le seguenti relazioni, alcune sono di equivalenza, altre di ordine, altre né di equivalenza né di ordine.
Stabilisci, per ciascuna relazione, se è di equivalenza o di ordine
(specificando, in quest'ultimo caso, se *stretto* o *largo*, *parziale* o *totale*).
Riconosci anche le eventuali relazioni di "**preordine**".

1) ... è divisore di ... (in $\mathbb{N}^*$)
2) ... è congruente a ... (nell'insieme dei segmenti nello spazio) [NOTA]
   NOTA: due figure si dicono "congruenti" quando è possibile, con un movimento "rigido"
   (= non deformante) sovrapporre una di esse all'altra, in modo che combacino perfettamente.
   Anziché dire "congruenti" si può anche dire semplicemente "uguali":
   noi, nel presente testo, abbiamo fatto quasi sempre questa scelta.
3) ... ha almeno un punto in comune con ... (nell'insieme delle rette di un piano)
4) ... x R y se e solo se esiste un numero naturale n tale che $x^n = y$ (in $\mathbb{N}^*$)
5) … può ricevere ordini da … (nell'insieme dei militari di una caserma)
6) … sa dove abita … (nell'insieme degli studenti di una data scuola superiore)
7) … ha vinto più campionati del mondo di calcio di … (nell'insieme delle nazioni)
8) … ha vinto almeno tanti campionati del mondo di calcio quanto …
9) … gioca attualmente nella stessa squadra di … (nell'insieme dei giocatori di un campionato nazionale)
10) … ha giocato almeno una volta nella stessa squadra di …
11) *a* è in relazione R con *b* se e solo se la cifra delle unità di *a* è minore rispetto alla cifra delle unità di *b*
    (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
12) La somma delle cifre di *x* è maggiore della somma delle cifre di *y*
    (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
13) La somma delle cifre di *x* non è inferiore alla somma delle cifre di *y*
    (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
14) *a* R *b* se e solo se *a* è parallela a *b*, o in alternativa *a* è perpendicolare a *b*
    (nell'insieme delle rette di un piano fissato)
15) *a* R *b* se e solo se la differenza fra *a* e *b* (s'intende: presa in valore assoluto) è divisibile per 5 (in $\mathbb{N}$)
16) "*x* R *y* se e solo se i nomi di battesimo di *x* e di *y* non hanno nessuna lettera in comune"
    (in un insieme fissato di persone)
17) "*x* R *y* se e solo se il giudizio di *x* al termine delle scuole medie è stato più alto del giudizio di *y*"
    (nell'insieme degli alunni di una scuola superiore)
18) "*x* R *y* se e solo se l'area di *x* è inferiore all'area di *y*" (nell'insieme delle superfici su di un piano).
19) "*x* R *y* se e solo se esiste un numero naturale *n* tale che $y = x+n$"
    (nell'insieme dei numeri reali positivi)

Dal sito
www.perma-bound.com



Louisiana State Standards for Mathematics: Grade 5
…
In problem-solving investigations, students demonstrate an understanding of patterns (= *modelli*), relations, and functions
…

10. RIPASSO DEL CONCETTO DI FUNZIONE

Abbiamo già parlato di "funzioni" (alle pagine 430-431, che ti invito a rileggere) stabilendo la seguente

Definizione - **Si ha una funzione quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).**

Di norma (non sempre!) la variabile indipendente si indica con la lettera x, e la dipendente con y. Inoltre, come avevamo già precisato a pagina 431, alla fin fine non è poi indispensabile che proprio "ad ogni … " corrisponda un valore; è invece essenziale che quando il valore esiste, esso sia UNICO. Di questo fatto riparleremo anche nelle pagine che seguono.

Avevamo fatto a proposito diversi esempi, fra i quali quello riguardante il *volume della sfera*:

esso si ottiene applicando la formula $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,

ed evidentemente, siccome ad ogni valore del raggio corrisponde uno e un solo valore del volume, siamo in presenza di una funzione, nella quale il raggio (r) è la var. ind. e il volume (V) è la var. dip.

Se indichiamo la nostra funzione col simbolo f , scriveremo $V=\frac{4}{3}\pi r^3=f(r)$

La scrittura $V=f(r)$ si legge " V uguale f di r " e significa: "ho una funzione, che ho indicato col simbolo f , nella quale la var. ind. è stata indicata col simbolo r e la var. dip. col simbolo V ".

$$\underbrace{V}_{\text{var. dip.}} = \underbrace{f}_{\text{nome della funzione}} (\underbrace{r}_{\text{var. ind.}})$$

E il volume di una sfera di raggio 3 metri è: $f(3)=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 27=36\pi\approx 113{,}1\ m^3$.

11. UNA "FUNZIONE" NON E' ALTRO CHE UN CASO PARTICOLARE DI RELAZIONE (è una relazione fra due insiemi, tale che ad ogni elemento dell'insieme di partenza corrisponde UNO ED UN SOLO elemento dell'insieme di arrivo)

E' giunto ora il momento di GENERALIZZARE il concetto di funzione.

Abbiamo parlato finora di funzione come di legame fra due grandezze variabili, tale che ecc. ecc.,
e poi nel fare gli esempi ci siamo soffermati sulle MISURE di queste grandezze
(misure espresse, ovviamente, da numeri),
cosicché ci siamo abituati a concepire una funzione come una "macchinetta" che,
preso un *numero* (= un elemento dell'insieme $\mathbb{R}$),
fa passare da questo ad un altro *numero* (= ad un altro elemento di $\mathbb{R}$).

Una funzione, comunque, è una CORRISPONDENZA, una RELAZIONE:
ad ogni numero ne fa corrispondere un altro;
anzi, per la precisione, ad ogni numero fa corrispondere UNO ED UN SOLO altro numero.

Ora, se noi *lasciamo cadere la restrizione* che una funzione possa operare soltanto su numeri,
e invece ammettiamo che nella "macchinetta" possano entrare, e da essa uscire,
oggetti di natura QUALSIASI, perverremo alla seguente definizione più generale di funzione:

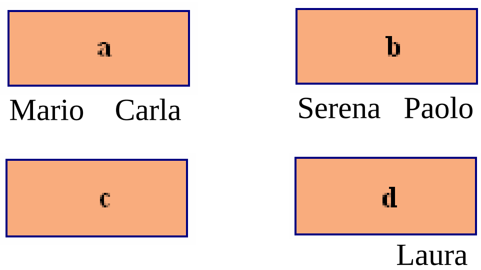
Definizione (**definizione GENERALE di** "**funzione**"):

si dice "FUNZIONE", o "APPLICAZIONE",
una relazione di un insieme A verso un insieme B,
tale che ad ogni elemento di A corrisponde UNO ED UN SOLO elemento di B
(= tale che ogni elemento di A ha una e una sola immagine).

Con riferimento ai diagrammi a frecce, le funzioni sono quelle relazioni tali che
da ogni elemento dell'insieme di partenza A parte **una e una sola** freccia.

ESEMPIO

1) In un'aula scolastica, ci sono alcuni banchi, che indicheremo con a, b, c, d. La piantina qui a fianco illustra la disposizione degli alunni su questi banchi, nel corso di una certa ora di lezione (corso di recupero):

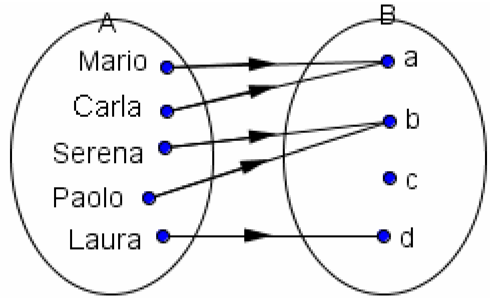


Ad ogni alunno corrisponde un banco (uno e un solo banco).

In questa situazione, possiamo pensare ad una corrispondenza, una relazione, un legame, dall'insieme di partenza A degli alunni
A = {Mario, Carla, Serena, Paolo, Laura}

all'insieme di arrivo B dei banchi: B = {a, b, c, d}.

Il diagramma a frecce della relazione mostra che da ogni elemento dell'insieme A parte UNA E UNA SOLA freccia.



Questa relazione di A verso B è, dunque, una FUNZIONE,
per indicare la quale si impiega generalmente, anche se non sempre,
una lettera dell'alfabeto, di norma minuscola: noi qui sceglieremo il simbolo *f*.

Sono in uso le seguenti scritture:

$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (la funzione *f* ha come insieme di partenza A e come insieme di arrivo B)
$f : \mathit{Mario} \to \mathrm{a}$ (la funzione *f* associa all'alunno Mario il banco a, l'immagine di Mario è a)
$\mathrm{a} = f(\mathit{Mario})$ ("a uguale a *f* di Mario": a è l'immagine, attraverso la funzione *f*, di Mario)

Se decidiamo di usare la lettera *x* per indicare un generico alunno (" l'alunno *x* ")
e la lettera *y* per indicare un generico banco (" il banco *y* "),
la *x* giocherà il ruolo di "variabile indipendente", la *y* sarà invece la "variabile dipendente".
Insomma:
x può valere "Mario", oppure "Carla", ecc.;
per ogni valore di *x*, ci interessa andare a vedere qual è il corrispondente valore di *y*,
e, ad esempio, se x = Serena, allora y = b.
Il valore di *y* DIPENDE dal valore che abbiamo attribuito a *x*.

$f:\ x \to\ y$ ("*f fa passare da x a y*")
$y = f(x)$ (*leggi*: "*y uguale f di x*", *con lo stesso significato della scrittura precedente*)

$$\underset{\text{nome della var. dip.}}{\boxed{y}} = \underset{\text{nome della funzione}}{\boxed{f}}\left(\underset{\text{nome della var. ind.}}{\boxed{x}}\right)$$

ALTRI ESEMPI

2) Sia $\mathrm{P} = \{\text{parole della lingua italiana}\}$

Ad ogni parola della lingua italiana, possiamo associare il numero delle lettere di cui è composta.
Abbiamo così una corrispondenza fra l'insieme P e l'insieme $\mathbb{N}^*$.
Questa corrispondenza è, ovviamente, una FUNZIONE,
perché ad ogni parola corrisponde uno ed un solo numero naturale non nullo.

Detta *h* questa funzione, avremo:
$h : \mathrm{P} \to \mathbb{N}^*$
e, ad esempio,
$h : "\mathit{arancia}" \to 7$
o, con notazione più frequentemente utilizzata,
$h("\mathit{arancia}") = 7$
ecc. ecc.

Detta p una generica parola italiana, e indicato con *n* il numero naturale corrispondente,
potremo scrivere $h : p \to n$ o anche $n = h(p)$

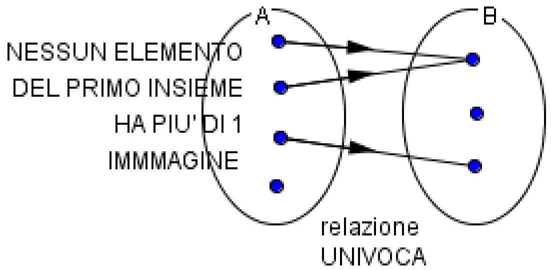
La scrittura $h : p \to n$, o la sua equivalente (più usata) $n = h(p)$, significa dunque:
ho una funzione, che ho chiamato *h*, che opera sulla variabile indipendente *p*
e ad ogni valore di *p* fa corrispondere uno e un solo valore della variabile dipendente *n*.

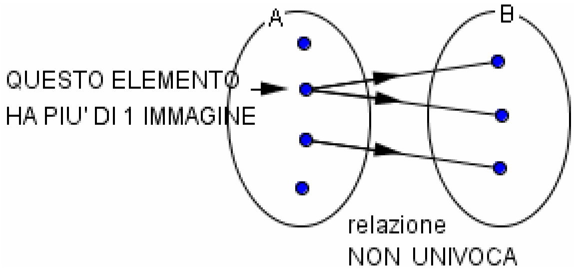
3) Sia I l'insieme delle circonferenze di un piano, J l'insieme dei punti di quel piano.
La corrispondenza g che ad ogni circonferenza associa il rispettivo centro è, ovviamente, una funzione:
$g : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$

12. TERMINOLOGIA SULLE RELAZIONI E SULLE FUNZIONI

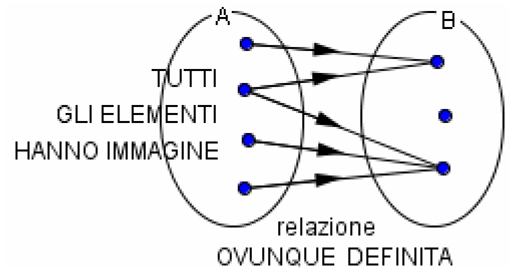
Sinonimo di "relazione" è "**corrispondenza**".

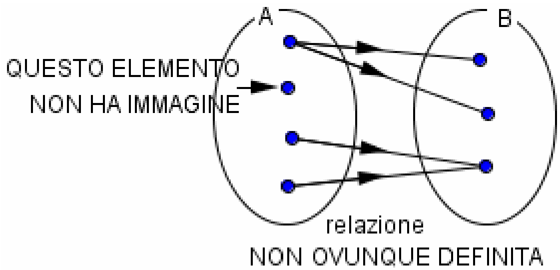
- **Una relazione di A in B si dice "UNIVOCA"** (alcuni testi dicono: "funzionale")
  se ad un elemento di A non corrisponde mai più di un elemento di B; ossia:
  - se da ogni elemento di A parte al massimo una freccia
  - se ogni elemento di A ha al massimo una immagine
  - se non c'è nessun elemento di A da cui parta più di una freccia
  - se non c'è nessun elemento di A che abbia più di una immagine.





- **Una relazione di A in B si dice "OVUNQUE DEFINITA"**
  se ad ogni elemento di A corrisponde almeno un elemento di B; ovvero
  - se da ogni elemento di A parte almeno una freccia
  - se ogni elemento di A ha almeno una immagine
  - se il dominio della relazione coincide con l'insieme di partenza A.





Possiamo perciò riformulare la definizione di "funzione" come segue:
Definizione - Si dice "FUNZIONE" (o "applicazione") una RELAZIONE che sia UNIVOCA e (ma vedi la PRECISAZIONE IMPORTANTE qui sotto) OVUNQUE DEFINITA

PRECISAZIONE IMPORTANTE

C' è da chiarire subito una questione che potrebbe essere fonte di parecchi equivoci.
Consideriamo, ad esempio, la relazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ seguente:
ad ogni numero reale *x* facciamo corrispondere il suo reciproco 1/*x*.
In base a quanto abbiamo detto, si dovrebbe affermare che questa relazione non è una funzione, perché, sebbene sia univoca, NON è ovunque definita: infatti, lo 0 non ha reciproco.
In casi come questo, invece, di solito si fa così: si *restringe l'insieme di partenza,* fino a farlo coincidere con il dominio, e si dice che si ha una funzione. … La cosa è un po' strana …
… D'altra parte, certe usanze si sono ormai consolidate storicamente, e a questo punto bisogna accettarle.
La corrispondenza che associa al numero *x* il numero 1/*x*
sarà allora considerata una funzione, di dominio $\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$.
In definitiva, riassumendo:

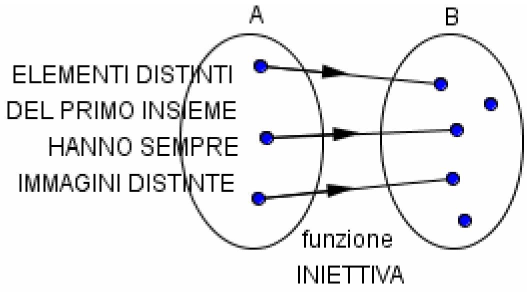
… nella pratica, UNA RELAZIONE UNIVOCA, ANCHE SE NON È OVUNQUE DEFINITA, VIENE UGUALMENTE CONSIDERATA UNA FUNZIONE; infatti, si finisce sempre per RESTRINGERE L'INSIEME DI PARTENZA, FACENDOLO COINCIDERE CON IL DOMINIO.

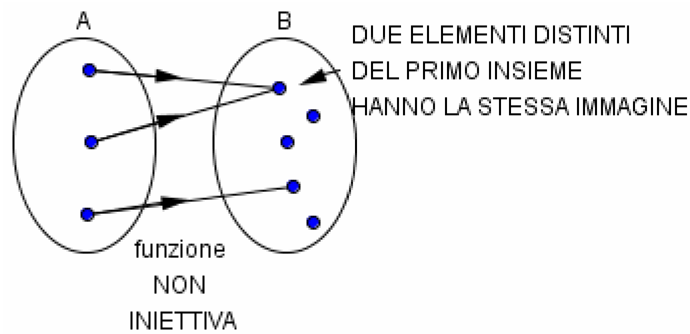
- Altro esempio:
  prendiamo come insieme di partenza $\mathbb{N}$, come insieme di arrivo ancora $\mathbb{N}$.
  La relazione che associa ad un numero naturale *n* il numero $n-7$
  ha come dominio l'insieme dei numeri naturali maggiori o uguali a 7
  (perché se fosse $n<7$, il numero $n-7$ NON apparterrebbe all'insieme di arrivo $\mathbb{N}$).
  Spontaneamente, restringiamo subito l'insieme di partenza, facendolo coincidere con il dominio.
  Abbiamo dunque una funzione: $f: \mathrm{A} \to \mathbb{N}$, dove $\mathrm{A}=\{n \in \mathbb{N} / n \geq 7\}$

- Un esempio ancora: $y = g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.
  Questa corrispondenza associa uno ed un solo numero reale
  ad ogni numero reale che non sia né $+1$ né -1.
  Diciamo che è una funzione il cui dominio è $\mathbb{R} - \{+1, -1\}$

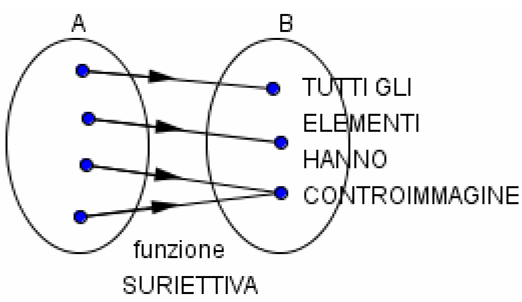
Riguardo ad una funzione ci si può poi domandare se essa è, o non è, “iniettiva” o “suriettiva”.
Questi due nuovi termini possono in realtà essere riferiti ad una relazione di natura qualsiasi,
ma sono di solito utilizzati più che altro con le funzioni.

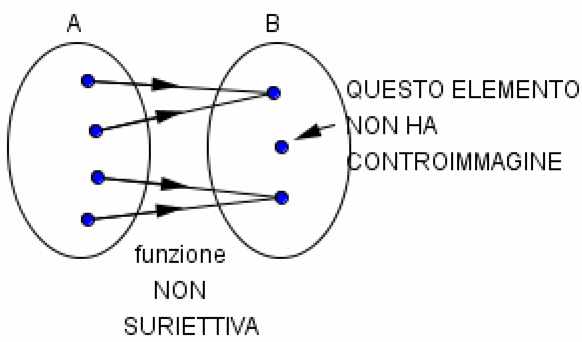
- **Una funzione di A in B si dice "INIETTIVA"**
  se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B; ossia
  - se ogni elemento di B ha al massimo una controimmagine
  - se non c'è nessun elemento di B che abbia più di una controimmagine
  - se non c'è nessun elemento di B a cui arrivi più di una freccia
  - se $\forall a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
  - se $\forall a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$





- **Una funzione di A in B si dice "SURIETTIVA"**
  se ogni elemento di B ha almeno una controimmagine; ossia,
  - se ad ogni elemento di B arriva almeno una freccia
  - se il codominio della relazione coincide con l'insieme di arrivo B
  - se $\forall b \in \mathrm{B},\ \exists a \in \mathrm{A}\ \textit{tale che}\ b = f(a)$





A VOLTE SI DICE “FUNZIONE” AL POSTO DI DIRE “VARIABILE DIPENDENTE”

Nell’uso comune, capita che la parola “funzione” venga adoperata quando a stretto rigore bisognerebbe invece dire “variabile dipendente”. Ad es., può darsi che un testo, di fronte alla funzione $y = f(x) = x^2 + 3$, scriva: “qual è il valore di questa *funzione* per $x = 5$?”
oppure “questa *funzione* tocca il suo valore minimo quando $x = 0$, e tale valore minimo della funzione è 3”.

In entrambi questi casi, l’uso della parola “funzione” è un pochettino improprio, perché ci si sta riferendo NON al “*legame*” fra la *x* e la *y*, BENSI’ al *valore della y*,
quindi non tanto alla *funzione* quanto alla *variabile dipendente*.

Tuttavia, **è entrata nella prassi comune questa abitudine, di dire sbrigativamente “funzione” anche in casi nei quali per la precisione occorrerebbe in realtà dire “variabile dipendente”. Tieni dunque conto di questa questione terminologica.**

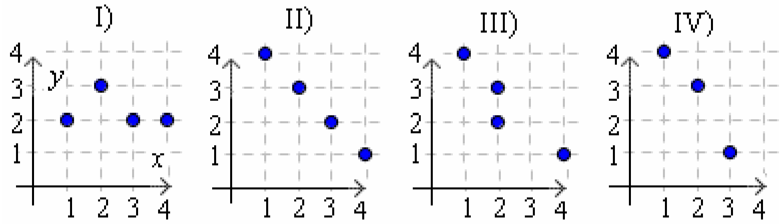
ESERCIZI (risposte a pag. 484)

1) Preso $\mathbb{N}^*$ come insieme di partenza, e l'insieme degli allievi di una data classe di Liceo come insieme di arrivo, stabilisci se la relazione che ad un elemento di $\mathbb{N}^*$ fa corrispondere lo studente contraddistinto sul registro da quel numero d'ordine, è una funzione, e in caso affermativo se è iniettiva e se è suriettiva.

2) Preso l'insieme degli allievi di una data classe di Liceo come insieme di partenza, e preso $\mathbb{N}^*$ come insieme di arrivo, stabilisci se la relazione che ad uno studente fa corrispondere il suo numero d'ordine sul registro è una funzione, e in caso affermativo se è iniettiva e se è suriettiva.

3) La relazione che ad ogni regione italiana fa corrispondere l'altezza in metri della montagna più elevata in quella regione, è una funzione?

4) Fra le relazioni qui accanto rappresentate stabilisci quali sono funzioni. Se si tratta di una funzione, stabilisci anche se è iniettiva o suriettiva, se si prende come insieme sia di partenza che di arrivo $I = \{1, 2, 3, 4\}$



5) Se ti chiedono quante sono le possibili funzioni di A in B (= aventi per dominio tutto A e per codominio B) nel caso particolare in cui A abbia 3 elementi e B ne abbia 5, tu cosa rispondi?
(*Indicazione: pensa di ordinare gli elementi di* A: 1° *elemento*, 2°, 3°. *Scelgo quale elemento di B far corrispondere al* 1°: *ho … possibilità; per ciascuna di queste possibilità, mi si apre un ventaglio di … possibilità per la scelta dell'elemento di B da abbinare al* 2° *elemento di A; dopodiché …*)

6) Nel caso A contenga 3 elementi e B ne contenga 5, quante sono
I) le funzioni *iniettive* di A in B? II) le funzioni *suriettive* di A in B?

13. RELAZIONE INVERSA DI UNA RELAZIONE DATA; CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE

Se R è una relazione di A in B, si dice "**relazione inversa**" della R quella che inverte il verso di tutte le frecce, e scambia fra loro i due insiemi di partenza e di arrivo: insomma, la relazione R^{-1} di B in A definita nel modo seguente:

$$b\,R^{-1}a \overset{def.}{\Leftrightarrow} a\,R\,b \quad (a \in A,\ b \in B)$$

NOTA: $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ si legge: "se e solo se, per definizione"

L'inversa di una funzione, in generale, non è una funzione, ma soltanto una relazione. Se invece, data una funzione *f*, l'inversa di *f* è anch'essa una funzione, allora si dice che *f* è "invertibile".

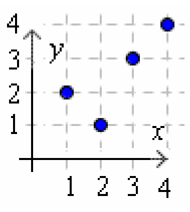
E' chiaro che una funzione, per essere invertibile, deve imprescindibilmente essere **iniettiva**.
Infatti, se *f* non è iniettiva, la relazione inversa di *f* non è univoca e quindi non è una funzione.
Si potrebbe a questo punto ritenere che *f*, per essere invertibile, debba anche essere suriettiva, perché in caso contrario, la relazione inversa non sarebbe "ovunque definita"; tuttavia, sappiamo che pure una relazione che non sia ovunque definita può, nel caso sia univoca, essere considerata una funzione, perché a tale scopo basta restringere opportunamente l'insieme di partenza della relazione stessa (vedi "PRECISAZIONE IMPORTANTE" a pagina 480).

Quindi **il requisito indispensabile affinché una funzione $f: A \to B$ sia invertibile, è che essa sia iniettiva.**

Se **una funzione** $f: A \to B$ (supponiamo qui che l'insieme di partenza A sia il vero e proprio dominio) è **sia iniettiva che suriettiva**, allora diremo che è una **CORRISPONDENZA BIUNIVOCA, o BIIEZIONE**, fra i due insiemi A e B.
Perciò

una relazione è una corrispondenza biunivoca (o biiezione) quando ad OGNI elemento dell'insieme di partenza A corrisponde UNO E UN SOLO elemento dell'insieme di arrivo B, E VICEVERSA, come accade con l'insieme A delle asole e l'insieme B dei bottoni di una stessa camicia.

7) La funzione qui a fianco rappresentata, dell'insieme $I = \{1, 2, 3, 4\}$ in sé, è invertibile?



8) Stabilisci quali fra le seguenti funzioni di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono corrispondenze biunivoche:
a) $n \to n^2$ b) $n \to 2n$ c) $n \to n+2$

9) Stabilisci quali fra le seguenti funzioni di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ sono corrispondenze biunivoche:
a) $x \to x^2$ b) $x \to 2x$ c) $x \to x+2$

14. FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE

Una funzione si dice “**reale di variabile reale**”
se tanto il suo insieme di partenza quanto il suo insieme di arrivo sono l’insieme $\mathbb{R}$.

Osserviamo che il *primo* aggettivo “*reale*” (quello riferito al sostantivo “*funzione*”) ha il ruolo di affermare che l’insieme di *arrivo* è $\mathbb{R}$ (qui ritorna la questione, di cui ci siamo già occupati, per cui a volte si dice “funzione” per significare “variabile dipendente”), mentre il *secondo* aggettivo “*reale*” (quello riferito al sostantivo “*variabile*”, che sta qui per “variabile indipendente”) è impiegato per dire che l’insieme di *partenza* è $\mathbb{R}$.

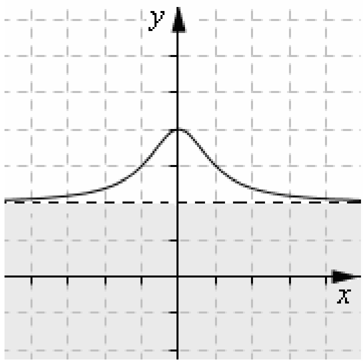
ALTRE QUESTIONI SULLE FUNZIONI
(inversione, composizione, …)
sono trattate nel capitolo
“Grafici e risoluzioni grafiche”
del VOLUME 2.

ESERCIZI (le risposte sono alla pagina successiva)

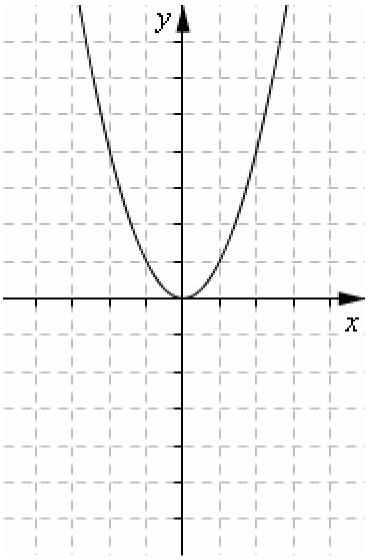
Considera le funzioni 1) … 7) e per ciascuna di esse stabilisci

a) qual è il dominio
b) se è iniettiva
c) se è (considerando come insieme di arrivo $\mathbb{R}$) suriettiva

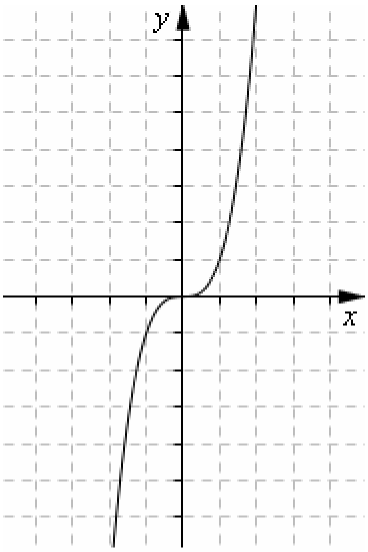
1) $y = f(x)$



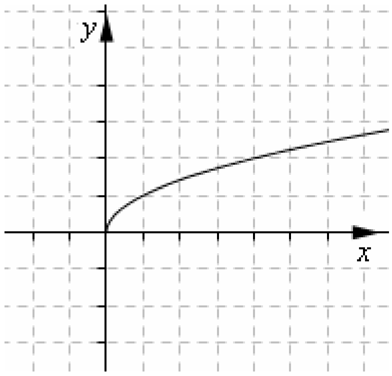
2) $y = x^2$



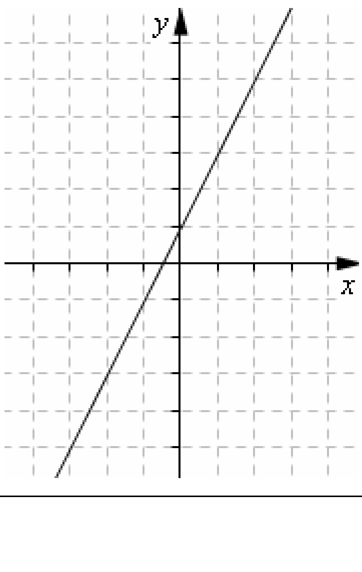
3) $y = x^3$



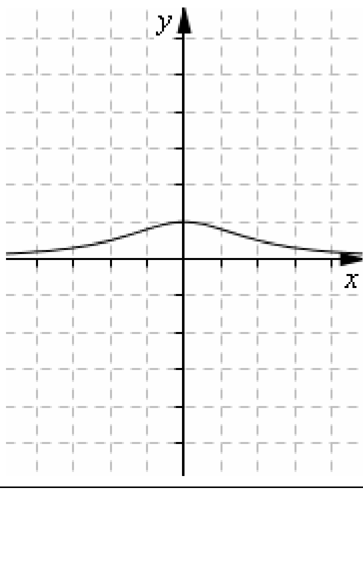
4) $y = \sqrt{x}$



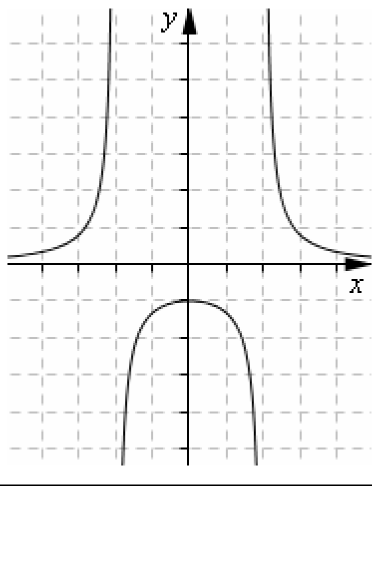
5) $y = 2x + 1$



6) $y = \dfrac{4}{x^2 + 4}$

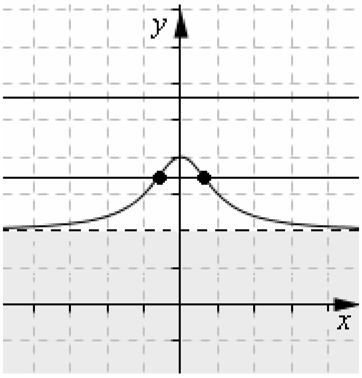


7) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$



RISPOSTE AGLI ESERCIZI della pagina precedente

1) $y = f(x)$



a) Determinare il dominio di questa funzione è problematico in quanto non ne viene data l'espressione analitica (= l'espressione matematica, l'espressione con la formula). Il grafico sembra portare a supporre che il dominio sia tutto $\mathbb{R}$ … Tuttavia, la figura si limita ai soli valori di x compresi fra –5 (circa) e +5.

b) La funzione **NON è iniettiva**. Infatti *esiste almeno una retta orizzontale che interseca il grafico più di una volta*, e ciò significa che esiste più di un valore di x al quale corrisponde lo stesso valore di y.

c) La funzione **NON è nemmeno suriettiva** (considerando $\mathbb{R}$ come insieme di arrivo). Infatti *esiste almeno una retta orizzontale che non interseca mai il grafico*, e ciò significa che esiste almeno un valore di y che non corrisponde a nessun valore di x.

2) $y = x^2$
a) tutto $\mathbb{R}$
b) non è iniettiva
c) non è suriettiva

3) $y = x^3$
a) tutto $\mathbb{R}$
b) è iniettiva
c) è suriettiva

4) $y = \sqrt{x}$
a) $[0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / \ x \ge 0\}$
b) è iniettiva
c) non è suriettiva

5) $y = 2x + 1$
a) tutto $\mathbb{R}$
b) è iniettiva
c) è suriettiva

6) $y = \dfrac{4}{x^2+4}$
a) tutto $\mathbb{R}$
b) non è iniettiva
c) non è suriettiva

7) $y = \dfrac{4}{x^2-4}$
a) $\mathbb{R} - \{-2, +2\} = \{x \in \mathbb{R} / x \ne \pm 2\}$
b) non è iniettiva
c) non è suriettiva

RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 473

1) antirifl., simm. 2) antirifl., antisimm. 3) antisimm., trans. 4) rifl., antisimm. 5) trans.
6) rifl. 7) antirifl., antisimm. 8) rifl., simm., trans. 9) antirifl., simm., trans.
10) rifl., antisimm., trans. 11) antirifl., simm. 12) antirifl., antisimm., trans.
13) rifl., antisimm., trans. 14) rifl., simm., trans. 15) rifl., simm., trans. 16) antirifl., simm.
17) rifl., simm. 18) rifl., antisimm., trans. 19) simm. 20) antirifl. 21) antirifl., simm.
22) I: rifl., simm., trans. II: simm. III: antisimm., trans. IV) antirifl.

RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 474

1) Le classi di equivalenza sono:
l'insieme dei triangoli di quel piano; l'insieme dei quadrilateri di quel piano; ecc.

2) 3 classi di equivalenza: $\left\{0,\bar{3};\ \dfrac{1}{3};\ 3^{-1}\right\},\ \left\{0,5;\ \dfrac{1}{2}\right\},\ \left\{0,\bar{5};\ \dfrac{5}{9}\right\}$

RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 477

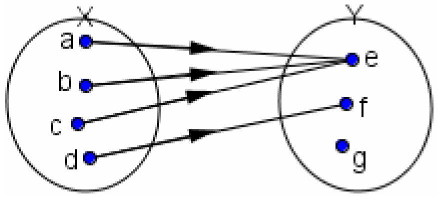
1) ordine largo, parziale 2) equivalenza 3) niente di speciale (non è transitiva) 4) ordine largo, parziale
5) ordine stretto (è vero che in un certo senso ciascun militare obbedisce anche a sé stesso, ma …), parziale
6) niente di speciale, in generale 7) ordine stretto, parziale 8) preordine totale 9) equivalenza
10) niente di speciale (non è transitiva) 11) ordine stretto, parziale 12) ordine stretto, parziale
13) preordine totale 14) equivalenza 15) equivalenza 16) niente di speciale (non è transitiva)
17) ordine stretto, parziale 18) ordine stretto, parziale 19) ordine largo, parziale

RISPOSTE AGLI ESERCIZI di pag. 482

1) Sì. Chiaramente, il dominio è solo l'insieme degli interi che vanno da 1 al numero di alunni di quella classe. E' iniettiva e suriettiva.
2) Sì. E' iniettiva, non è suriettiva
3) Sì
4) I). E' una funzione; non è iniettiva, né suriettiva II) E' una funzione, è iniettiva ed è suriettiva
III) Non è una funzione IV) E' una funzione, di dominio $\{1, 2, 3\}$, iniettiva ma non suriettiva
5) 125 6) I) 60 II) 0 7) Sì, perché è biiettiva 8) nessuna 9) solo c)

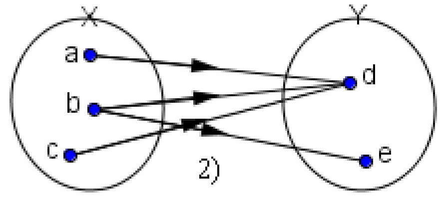
15. ESERCIZI SULL'INTERO CAPITOLO (risposte in fondo)

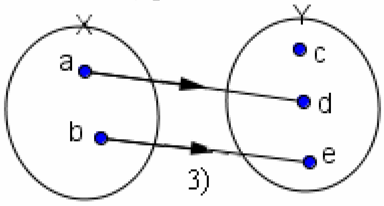
1) Considera la relazione rappresentata dal diagramma a frecce.

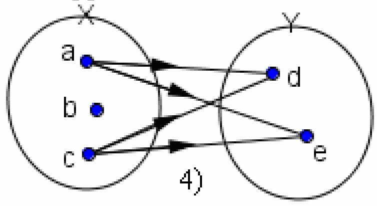


a) E' univoca? … d) E' suriettiva? …
b) E' ovunque definita? … e) Dominio = …
c) E' iniettiva? … f) Codominio = …

Stesse domande a), b), c), d), e), f) dell'esercizio 1) per le tre relazioni qui sotto rappresentate.







5) Considera la relazione, fra l'insieme $X = \mathbb{N} - \{0, 1\}$ e sé stesso (si usa dire: *dell'*insieme X *in* sé stesso), definita nel modo seguente: $m \; R \; n \;\Leftrightarrow\;$ *m è un divisore di n*

a) E' univoca? … b) E' ovunque definita? … c) E' iniettiva? … d) E' suriettiva? …
e) Dominio = … f) Codominio = …

6) Considera la funz. $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ così definita: $f(x) = x \text{ mod } 4 =$ *resto della divisione intera* $x : 4$

a) Allora si avrà: $f(9) = \ldots$ $f(8) = \ldots$ $f(18) = \ldots$ $f(4) = \ldots$ $f(2) = \ldots$
b) f è iniettiva? … c) f è suriettiva? … d) Dominio? … e) Codominio? …

7) Considera la seguente funzione:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $f(k)$ = il più grande numero naturale che non supera $\sqrt{k}$

a) Allora si avrà: $f(20) = \ldots.$ $f(9) = \ldots.$ $f(3) = \ldots.$
b) Quali sono le controimmagini del numero 5? … c) E' iniettiva? … E' suriettiva? …

8) Considerata l'applicazione che ad ogni segmento di un piano π associa il suo punto medio, indicane il dominio e il codominio e specifica se è iniettiva e se è suriettiva.

9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ a) Questa funzione è iniettiva? … b) E' suriettiva? …

10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) Qui come insieme di partenza è proposto $\mathbb{R}$, ma qual è il dominio? …
b) Come devo modificare l'insieme di arrivo se voglio che la funzione risulti suriettiva? …

11) Qual è il dominio delle seguenti funzioni reali di variabile reale? a) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-5}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-5}}$

12) Qual è il dominio e quale il codominio della funzione, reale di variabile reale, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$?

13) Stabilisci quali sono il dominio D e il codominio C delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

a) $y = 3x - 2$ b) $y = x^2$ c) $y = x^2 - x$ d) $y = -x^2 + 6x - 5$ e) $y = |x| - 1$ f) $y = \dfrac{1}{2x}$

RISPOSTE

1) a) sì b) sì c) no d) no e) {a, b, c, d}=X f) {e, f} 2) a) no b) sì c) no d) sì e) {a, b, c}=X f) {d, e}=Y
3) a) sì b) sì c) sì d) no e) {a, b}=X f) {d, e} 4) a) no b) no c) no d) sì e) {a, c} f) {d, e}=Y
5) a) no b) sì c) no d) sì e) X f) X 6) a) 1 0 2 0 2 b) no c) no d) $\mathbb{N}^*$ e) $\{0, 1, 2, 3\}$
7) a) 4 3 1 b) 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 c) no sì
8) Il dominio è l'insieme dei segmenti che giacciono su π, il codominio è l'insieme dei punti di π ossia π stesso; non è iniettiva, è invece suriettiva 9) a) no b) no
10) a) Il dominio è $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$
b) Devo prendere come insieme di arrivo l'insieme dei soli reali >0, ossia l'intervallo $(0, +\infty)$
11) a) $[2, +\infty) - \{5\}$ b) $(-\infty, 2] \cup (5, +\infty)$ 12) Il dominio è tutto $\mathbb{R}$, il codominio è l'intervallo $(0, 1]$
13) a) $D = \mathbb{R},\ C = \mathbb{R}$ b) $D = \mathbb{R},\ C = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ c) $D = \mathbb{R},\ C = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq -\dfrac{1}{4}\right\}$
d) $D = \mathbb{R},\ C = (-\infty, 4] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$ e) $D = \mathbb{R},\ C = [-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$ f) $D = C = \mathbb{R} - \{0\}$