2.8 RICERCA DEI PUNTI DI MASSIMO, DI MINIMO E DI FLESSO ORIZZONTALE COL METODO DELLO STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

❑ **Teorema 6** (*con l'enunciato si dà simultaneamente, in corsivo, anche la dimostrazione*)

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in tutto un intorno di x_0, dotata di derivata nulla in x_0: $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

Per stabilire se il punto x_0 è di massimo, di minimo, o di flesso orizzontale basta "studiare il segno della derivata prima nell'intorno di x_0", e precisamente:

a) **Se $f'(x)$ è positiva a sinistra di x_0 e negativa a destra di x_0,**
allora *f è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra di x_0 (per il Teor. 4), per cui*
x_0 è un punto di massimo relativo (NOTA 1)

b) **Se $f'(x)$ è negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra di x_0,**
allora *f è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0, per cui*
x_0 è un punto di minimo relativo (NOTA 1)

c) **Se $f'(x)$ è positiva sia a sinistra che a destra di x_0,**
allora *f è crescente sia a sinistra che a destra di x_0, per cui*
x_0 è un punto di flesso ascendente a tangente orizzontale (NOTA 1, NOTA 2)

d) **Se $f'(x)$ è negativa sia a sinistra che a destra di x_0,**
allora *f è decrescente sia a sinistra che a destra di x_0, per cui*
x_0 è un punto di flesso discendente a tangente orizzontale (NOTA 1, NOTA 2)

NOTA 1 f, essendo derivabile in x_0, è ivi anche continua e vale il precedente Lemma 1
NOTA 2 Gli ultimi due enunciati richiedono, per la loro dim., un'ovvia variante "unilaterale" del Lemma 1

Osservazioni

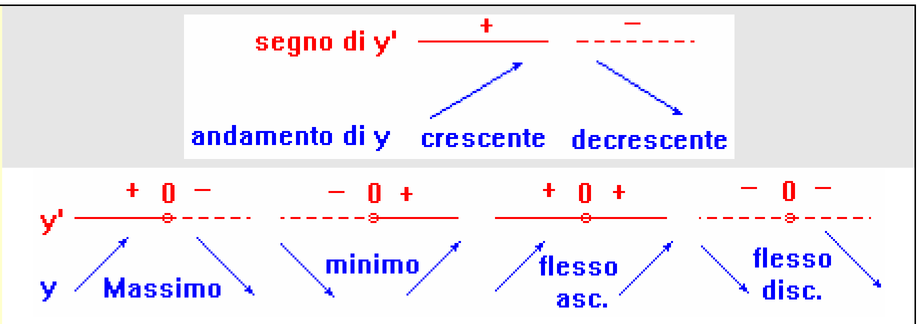
a) Nell'enunciato, "massimo" e "minimo" sono da intendersi come "massimo forte" e "minimo forte".

b) Questo teorema 6 fornisce il cosiddetto

"**metodo per la ricerca dei punti di massimo, minimo e flesso orizzontale con lo studio del segno della derivata prima**".

Tale metodo è molto semplice:
data la funzione $y = f(x)$, innanzitutto si risolve l'equazione $f'(x) = 0$ per determinare i punti stazionari; poi si affronta lo studio del segno della derivata prima, e a tale scopo si risolve la disequazione $f'(x) > 0$;
in tal modo si trovano i valori di x per cui la y' è positiva,
quindi, per esclusione, si possono trovare anche quelli per cui la y' è negativa.

♥ **Non c'è nulla di impegnativo da memorizzare riguardo a questo metodo: basterà pensare al fatto che**
y' positiva → y crescente
y' negativa → y decrescente
per stabilire la natura esatta di ciascun punto stazionario.



c) E' chiaro che comunque che
in tal modo non si potranno trovare gli eventuali estremanti relativi in cui la funzione non è derivabile (pensiamo ad esempio alla funzione $y = |x|$ che ha un minimo in 0).

Il discorso fatto riguarda poi i massimi e minimi relativi interni al dominio della funzione; la ricerca degli eventuali estremanti relativi che stanno ai confini del dominio, come pure la ricerca degli estremanti assoluti, è tutt'altra cosa.
Ma gli estremanti dei tre tipi citati:

- ❑ **estremanti relativi in cui la funzione non è derivabile**
- ❑ **estremanti relativi che stanno ai confini del dominio**
- ❑ **estremanti assoluti**

si troveranno in modo facile e immediato, dopo aver ultimato lo studio della funzione e averne tracciato il grafico definitivo.

Osservazione (possibilità di attenuazione delle ipotesi per il Teorema 6)

Le ipotesi del precedente teorema 6, limitatamente alle parti a) e b), potrebbero anche essere attenuate, per ciò che concerne il comportamento della funzione NEL punto x_0.
Ferma restando la derivabilità a sinistra e a destra di x_0,
non è indispensabile che la funzione sia derivabile con derivata nulla in x_0
(anche se questo poi è il caso di gran lunga più frequente nelle applicazioni);
è sufficiente che $f(x)$ sia CONTINUA in x_0, perché la tesi sia vera.

Si ottiene in tal modo la variante seguente:

Teorema 6’

Sia $y = f(x)$ una funzione continua in x_0,
e derivabile in tutto un intorno di x_0, con esclusione, tutt’al più, del punto x_0.

a’) Se $f'(x)$ è
>0 a sinistra di x_0 e <0 a destra di x_0, allora x_0 è un punto di massimo relativo forte per la f

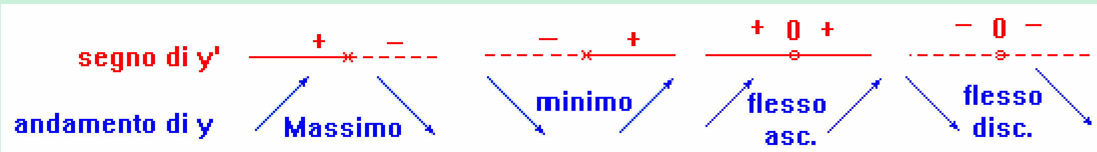
b’) Se $f'(x)$ è
<0 a sinistra di x_0 e >0 a destra di x_0, allora x_0 è un punto di minimo relativo forte per la f.

Sia $y = f(x)$ una funz. derivabile in tutto un intorno di x_0, dotata di derivata nulla in x_0: $f'(x_0) = 0$.

c’) Se $f'(x)$ è
>0 sia a sinistra che a destra di x_0, allora x_0 è un punto di flesso ascendente a tang. orizzontale

d’) Se $f'(x)$ è
<0 sia a sinistra che a destra di x_0, allora x_0 è un punto di flesso discendente a tang. orizzontale.

La figura sottostante riassume l’enunciato:
la “crocetta” riferita a y’ indica i casi in cui non si fa alcuna ipotesi (neppure di esistenza) su y’ in x_0.



Osserviamo che ***le dimostrazioni del Teorema 6’ che si ritrovano nella maggior parte dei testi si basano sul Teorema di Lagrange.***
Il ragionamento è più o meno il seguente (facciamo riferimento al PRIMO dei quattro enunciati):

Sia
$a < x' < x_0 < x'' < b$,
dove abbiamo indicato con *a*, *b* gli estremi dell’intorno di x_0 di cui parla l’ipotesi.
x' e x'', insomma, sono due punti presi arbitrariamente uno a sinistra e l’altro a destra di x_0
(sempre, s’intende, nell’ambito dell’intorno suddetto);
ci proponiamo di mostrare che tanto $f(x')$ quanto $f(x'')$ sono minori di $f(x_0)$.

Il Teorema di Lagrange è applicabile all’intervallo $[x', x_0]$ e ci dice che

$f(x_0) - f(x') = f'(\bar{x})\underbrace{(x_0 - x')}_{>0}$ essendo $\bar{x}$ (“*x* segnato”) un opportuno punto compreso fra x' e x_0;

poiché $x' < \bar{x} < x_0$, sarà $f'(\bar{x}) > 0$ e quindi $f(x_0) - f(x') > 0$ ossia $f(x') < f(x_0)$

Ora, Lagrange è applicabile anche all’intervallo $[x_0, x'']$ e ci dice che

$f(x'') - f(x_0) = f'(\bar{\bar{x}})\underbrace{(x'' - x_0)}_{>0}$ essendo $\bar{\bar{x}}$ (“*x* segnato due volte”) un opportuno punto fra x_0 e *x*;

poiché $x_0 < \bar{\bar{x}} < x''$, sarà $f'(\bar{\bar{x}}) < 0$ e quindi $f(x'') - f(x_0) < 0$ ossia $f(x'') < f(x_0)$

In definitiva, abbiamo provato che sia a sinistra che a destra di x_0 è $f(x) < f(x_0)$
e ciò dimostra, appunto, che x_0 è di massimo relativo.