2.7 PUNTI STAZIONARI

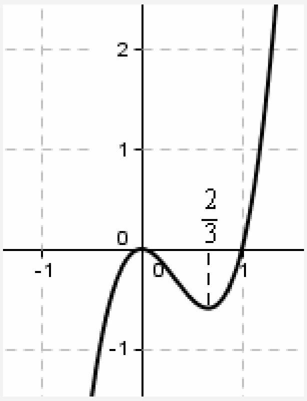
Data una funzione $y = f(x)$, si dice che x_0 è un **"punto stazionario"** della f se $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

I punti stazionari di una funzione sono dunque quelli nei quali
la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale (NOTA).

NOTA: scrivo spesso, per comodità, "orizzontale", quando a rigore dovrei scrivere "parallela all'asse delle ascisse": in effetti, di norma (anche se non sempre) l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto al lettore.

Se x_0 è un **punto stazionario**, allora **può essere**:

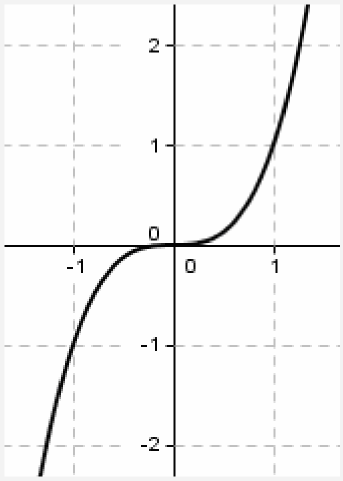
a) un punto di **massimo o di minimo relativo** (cioè, un estremante relativo): fig. 12a
b) oppure un **flesso a tangente orizzontale**: fig. 12b
c) oppure ancora **(caso raro)** può darsi che non sia **né un estremante né un flesso**: fig. 12c



$y = 4x^3 - 4x^2$

Punti stazionari:
$x = 0$ (**massimo relativo**),
$x = 2/3$ (**minimo relativo**)

fig. 12°



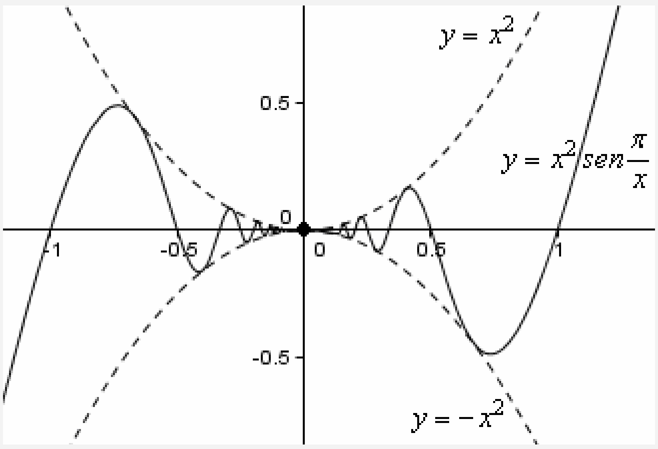
$y = x^3$

Punto stazionario:
$x = 0$ (**flesso orizzontale**)

fig. 12b

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \; sen \dfrac{\pi}{x} \;\; per \;\; x \neq 0 \\ 0 \;\; per \;\; x = 0 \end{cases}$$

Fig. 12c
Punto stazionario: $x = 0$
(non è né di massimo,
né di minimo,
né di flesso)



I punti stazionari di una funzione si ricercano
ricavando la derivata prima $f'(x)$ e quindi risolvendo l'equazione $\boxed{f'(x) = 0}$.

Poi, naturalmente, occorrerà stabilire, per ciascun punto stazionario,
se si tratti di un punto di massimo, di un punto di minimo, di un punto di flesso orizzontale
oppure (caso raro) nessuna delle eventualità precedenti.

I teoremi che seguono sono finalizzati appunto a questa **analisi dei punti stazionari**.

- **Lemma 1**

Se una funzione f è crescente su (a, x_0) e decrescente su (x_0, b) e inoltre è continua in x_0, allora il punto x_0 è di massimo relativo forte per la funzione.

Se f è decrescente su (a, x_0) e crescente su (x_0, b) e inoltre è continua in x_0, allora il punto x_0 è di minimo relativo forte per f.

Osservazione 1

Notare come sia indispensabile l'ipotesi di continuità in x_0.

Prendiamo, come controesempio, la funzione

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & per\ \ x\neq 0\\ 1 & per\ \ x=0\end{cases}$$

(parabola col "buco": fig. 13 qui a fianco).

L'ascissa $x_0=0$ NON E' di massimo relativo, sebbene $f(x)$ sia crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra.

Il Lemma non è applicabile per via della discontinuità in x_0.

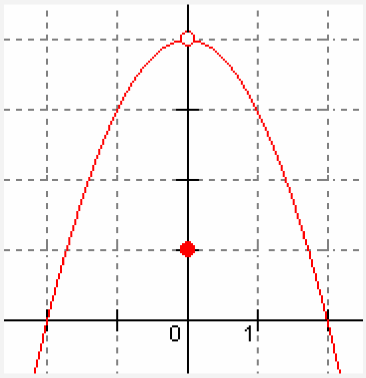


Fig. 13

Osservazione 2

L'enunciato ***non è banale***, per il fatto che gli intervalli sono supposti APERTI.
Se si fosse scritto $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ al posto di (a, x_0) e (x_0, b)
si sarebbe ottenuta una proposizione ancora vera, ma del tutto ovvia!.
Invece gli intervalli sono aperti … il punto x_0 è "tagliato fuori" da questi intervalli …
… e allora è **indispensabile** l'ipotesi di continuità della funzione in x_0
per "saldare" il comportamento **in** x_0 al comportamento **in prossimità di** x_0, e assicurare la verità della tesi.

Dimostrazione del Lemma 1

Si effettua ricorrendo al concetto di "**estremo superiore**"
e applicando il "**Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotòne**" . Dunque:

1.

f è crescente su (a, x_0) ed è continua in x_0.

La continuità in x_0 significa che $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

D'altra parte, applicando sull'intervallo (a, x_0) il "Teor. di esistenza del limite delle funzioni monotone", possiamo affermare che

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\sup_{x\in(a,\,x_0)} f(x)$$

Confrontando le due uguaglianze appena scritte, si trae $f(x_0)=\sup\limits_{x\in(a,x_0)} f(x)$

e da ciò discende, tenendo conto anche del carattere *strettamente* crescente della f su (a, x_0), che, $\forall x\in(a, x_0)$, si ha $f(x)<f(x_0)$.

NOTA 1

Abbiamo scritto la disug. STRETTA in quanto: se, per assurdo, un $\overline{x}\in(a, x_0)$ fosse tale che $f(\overline{x})=f(x_0)$, allora nell'intervallo $(\overline{x}, x_0)$ la $f(x)$, essendo strettamente crescente su tutto (a, x_0), assumerebbe valori maggiori di $f(x_0)$; ma ciò è incompatibile col fatto che $f(x_0)=\sup\limits_{x\in(a,\,x_0)} f(x)$

2.

f è decrescente su (x_0, b) ed è continua in x_0.

La continuità in x_0 significa che $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

D'altra parte, applicando sull'intervallo (x_0, b) il "Teor. di esistenza del limite delle funzioni monotone", possiamo affermare che

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\sup_{x\in(x_0,\,b)} f(x)$$

Confrontando le due uguaglianze appena scritte, si trae $f(x_0)=\sup\limits_{x\in(x_0,\,b)} f(x)$

e da ciò discende, tenendo conto anche del carattere *strettamente* decrescente della f su (x_0, b), che, $\forall x\in(x_0, b)$, si ha $f(x)<f(x_0)$.

NOTA 2

Abbiamo scritto la disug. STRETTA in quanto: se, per assurdo, un $\overline{x}\in(x_0, b)$ fosse tale che $f(\overline{x})=f(x_0)$, allora nell'intervallo $(x_0, \overline{x})$ la $f(x)$, essendo strettamente decrescente su tutto (x_0, b), assumerebbe valori maggiori di $f(x_0)$; ma ciò è incompatibile col fatto che $f(x_0)=\sup\limits_{x\in(x_0,\,b)} f(x)$

3. Perciò, in definitiva, per ogni x di (a, b) distinto da x_0 è $f(x)<f(x_0)$
quindi x_0 è di massimo relativo forte per la funzione, C.V.D.