

5. PSEUDO-UGUAGLIANZE E FORME DI INDECISIONE (DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO)

Supponiamo di avere una funzione che sia a sua volta il quoziente fra due funzioni:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)};$$

supponiamo inoltre che, al tendere di x a c

(dove c potrà essere un'ascissa finita x_0 , oppure uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞),

- il numeratore $f(x)$ tenda ad un valore finito e non nullo (ad esempio, tenda a 4)
- e il denominatore $g(x)$ tenda a $+\infty$.

Come si comporterà la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende a c ?

Dunque, ragioniamo. La nostra frazione è $\frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}}$.

Il numeratore assume valori molto vicini a 4 ... il denominatore invece assume valori grandissimi ...

Ma allora, se il denominatore è grandissimo

(mentre il numeratore non lo è, perché i suoi valori si mantengono prossimi a 4) ...

vorrà dire che la frazione assumerà valori **piccolissimi!**

Avremo dunque $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}} = 0$ (più precisamente, per ovvi motivi di segno, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}} = 0^+$)

Il tutto si potrebbe riassumere per mezzo della PSEUDO-UGUAGLIANZA

$$\boxed{\frac{4}{\infty} = 0} \quad \left(\frac{4}{+\infty} = 0^+ \right)$$

Supponiamo ora che $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0^+$. Quanto varrà il $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Si può osservare che, quando un numero vicinissimo a 4 viene diviso per un numero positivo vicinissimo a 0, il risultato della divisione è un numero positivo **grandissimo**.

Ad esempio, dividere per 0,001 equivale a moltiplicare per 1000,

dividere per 0,000001 equivale a moltiplicare per 1000000 ...

Avremo quindi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}} = +\infty$

Il tutto si potrebbe riassumere per mezzo della PSEUDO-UGUAGLIANZA $\boxed{\frac{4}{0} = \infty}$ $\left(\frac{4}{0^+} = +\infty \right)$

IMPORTANTE:

questa scrittura $\frac{4}{0} = \infty$ è solo un modo conciso (e, proprio per la sua concisione, efficace)

di esprimere un ragionamento ben più articolato.

Dunque: noi sappiamo bene che l'operazione $\frac{4}{0}$, presa alla lettera, come quoziente fra il numero 4 e il numero 0, è *impossibile*, priva di risultato, non definita, "illegal".

Ma noi, in questo contesto, NON stiamo pensando a questa operazione!!!

Scrivendo $\frac{4}{0} = \infty$ noi vogliamo solamente affermare che, se abbiamo un rapporto fra due funzioni,

e la funzione a numeratore tende a 4, mentre la funzione a denominatore tende a 0

(sottinteso: per x che tende ad un certo valore c), allora il rapporto fra le due funzioni tende a ∞ . Insomma:

la scrittura $\frac{4}{0} = \infty$ sostituisce l'ingombrante annotazione $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 4 \wedge \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Supponiamo invece di avere due funzioni $f(x)$, $g(x)$ che, al tendere di x a x_0 , tendano entrambe a infinito:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Quanto varrà il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Riflettiamo. Noi stiamo studiando il comportamento della frazione $\frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}}$.

Il tendere all'infinito del numeratore "vorrebbe" far impennare la frazione verso l'infinito ...

ma il tendere all'infinito del denominatore, per contro, "vorrebbe" schiacciare la frazione verso lo zero!

Ci troviamo di fronte a una "forma conflittuale", o, come generalmente si dice, a una

"FORMA DI INDECISIONE"

Fra le due funzioni che stanno a numeratore e a denominatore, vincerà il "tiro alla fune" quella che tende all'infinito più rapidamente.

Il valore del limite dipenderà quindi

dalle **particolari** funzioni considerate:

a volte potrà "vincere" il numeratore f ,

e allora il rapporto f/g tenderà all'infinito;

altre volte potrà invece vincere il denominatore g ,

e in questo caso il rapporto f/g tenderà a zero;

in certi casi, poi, capita che le due funzioni f , g

"trovano un equilibrio":

il limite del rapporto f/g sarà allora un certo numero finito e $\neq 0$.

Può anche accadere (situazione ben rara negli esercizi),

che il limite del rapporto f/g non esista.

"Forma di **indecisione**" vuol dire che,
a priori, non si può stabilire
 se esista il limite, e quanto esso valga,
applicando una regola generale
o un teorema generale;
 l'indecisione si scioglierà invece
 tramite procedimenti che dipendono
 dalle *specifiche* funzioni coinvolte.

Alcuni testi scrivono
 "forma **indeterminata**"
 anziché "forma di indecisione";
 ... forse sarebbe meglio parlare di
 "forma **inizialmente indeterminata**"!

Ad esempio, chiediamoci quanto vale il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+15}{x^2-4}$.

Al tendere di x a $+\infty$, sia il numeratore che il denominatore tendono a $+\infty$; si ha dunque una

F.I. (Forma di Indecisione) del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Fra il numeratore $7x+15$ e il denominatore x^2-4 , quale tenderà all'infinito più rapidamente? Beh, $7x+15$ ha coefficienti più "robusti" ... mentre x^2-4 ha grado più elevato.

Ma noi dobbiamo pensare che $x \rightarrow +\infty$,

quindi è **il grado** che finisce per caratterizzare la rapidità con cui l'espressione tende all'infinito.

Ad esempio, con $x=1000$, abbiamo $7x+15=7015$ ma è $x^2-4=1000000-4=999996$!!!

Dunque, per via del grado maggiore, è più rapido il tendere all'infinito del denominatore:

e questo denominatore "vincente" riesce perciò a schiacciare il valore la frazione verso lo 0.

In definitiva avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+15}{x^2-4} = 0.$$

Per convincerci ancora di più di questo fatto,

raccogliamo, sia a numeratore che a denominatore, x elevato all'esponente più alto: avremo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+15}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(7 + \frac{15}{x} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + \frac{15}{x}}{\left(1 - \frac{4}{x^2} \right)} \quad \text{NOTA} \quad 0^+ \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ 0 \\ \downarrow \\ +\infty \end{array} \end{aligned}$$

In generale, in una F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ del tipo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{B(x)}$

con **A, B polinomi di grado diverso**,
il limite è

♫ **0 se prevale il grado del Denominatore**,
♫ **infinito se prevale il grado del Numeratore**.

Consideriamo invece il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x-1}{2x^2+5} = ?$

In questa F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, contrariamente al caso precedente, N e D hanno il medesimo grado ...

Procediamo come nel caso precedente e avremo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x-1}{5x^2+3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(6 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(5 + \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Di qui si trae, anche se per ora in modo solamente intuitivo (NOTA), che

in una F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ del tipo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{B(x)}$

con **A, B polinomi dello stesso grado**,
il valore del limite è sempre uguale

al quoziente fra i coefficienti dei due termini di grado massimo.

NOTA

Ricordiamoci che dobbiamo ancora dare una definizione rigorosa di limite",

e che non abbiamo fin qui dimostrato alcun teorema a riguardo

(d'altronde, in assenza di una definizione precisa, non ha

neppure senso cercare eventualmente di dimostrare dei teoremi ...)

NOTA:
i due termini $\frac{15}{x}$ e $\frac{4}{x^2}$,
avendo il numeratore fisso
e il denominatore tendente a infinito,
tendono a zero
(si dice, con locuzione suggestiva,
che sono **termini "evanescenti"**).
Ma allora, dopo la semplificazione per x
effettuata al passaggio precedente,
il numeratore tende a 7 e il denominatore,
che è il prodotto di un fattore tendente a infinito
per un fattore tendente a 1, tende all'infinito.
Dunque il limite è 0 (0^+ , per ovvi motivi di segno).
*Tutte queste considerazioni di carattere intuitivo
verranno puntualmente legittimate dai Teoremi
che saremo in grado di dimostrare quando,
a partire dal capitolo successivo,
avremo finalmente stabilito
una definizione ben fondata di "limite".*

Dopo aver accennato al caso $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, prendiamo in esame un'altra situazione interessante: la $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Occhio! NON vogliamo qui riferirci all'**operazione** $0/0$, che come ben sappiamo è non definita, "illegal", in quanto "indeterminata".

La scrittura $\left[\frac{0}{0} \right]$ è qui utilizzata per indicare in modo sintetico ed efficace la situazione in cui si cerchi

il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, quando è $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Nella frazione $\frac{f(x)}{g(x)}$ operano due forze contrastanti:

il numeratore, col suo tendere a 0, "vorrebbe" portare verso lo zero il valore della frazione; ma nel contempo il denominatore, col proprio tendere a 0, "lavora" per far impennare la frazione verso l'infinito. In questo "tiro alla fune", vincerà la funzione che tende a 0 più rapidamente.

Se è $f(x)$ a tendere più rapidamente a zero, il limite sarà nullo;

se invece è $g(x)$ che tende a zero più rapidamente, il limite sarà infinito.

In altri casi il limite potrà essere finito e non nullo, oppure ancora non esistere. Insomma,

$$\left[\frac{0}{0} \right] \text{ è una Forma di Indecisione, al pari di } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Come esempio, prendiamo il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

Numeratore e denominatore tendono entrambi a zero; tuttavia, basta fare un disegno della circonferenza goniometrica per rendersi conto che, al tendere a zero dell'archetto x , la quantità $1 - \cos x$ tende a zero

con rapidità molto maggiore rispetto a $\sin x$.

Pertanto il limite in questione è infinito.

Considerazioni di segno ci portano a stabilire, più in dettaglio, che

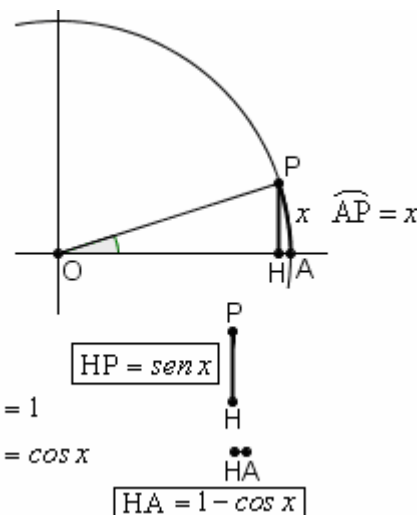
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = -\infty$$

La conclusione, da noi tratta un po' "alla buona",

con l'intuizione geometrica, è confermata

da ciò che impareremo a partire dal capitolo successivo.

Possiamo confermare il risultato trovato anche nel modo seguente:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin x (1 + \cos x)}^2}{\underbrace{\sin^2 x}_0} = \infty$$

Va detto che, **molto spesso, le Forme di Indecisione del tipo $\left[\frac{0}{0} \right]$, quando x tende a un'ascissa finita,**

vengono risolte attraverso una semplificazione, cui si può pervenire a seguito di una scomposizione, o razionalizzazione, o moltiplicazione di N e D per una stessa espressione.

Consideriamo ad esempio l'esercizio seguente,

nel quale la scomposizione del denominatore è stata effettuata tramite la Regola di Ruffini:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(x^3 + x^2 + x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{x^3 + x^2 + x + 4} = \frac{4}{7}$$

Fin qui ci siamo occupati in particolare del QUOZIENTE $f(x)/g(x)$ di due funzioni, in relazione al quale abbiamo brevemente parlato delle FORME DI INDECISIONE seguenti:

$$\frac{\infty}{\infty} = F.I. \quad \frac{0}{0} = F.I.$$

Invece, sempre per quanto riguarda il quoziente $f(x)/g(x)$,

NON sono forme di indecisione le situazioni schematizzate dalle seguenti PSEUDO-UGUAGLIANZE:

$$\frac{k}{\infty} = 0 \quad \text{Se il numeratore tende a un valore finito } k, \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad \frac{0}{\infty} = 0$$

mentre il denominatore tende a infinito, allora il limite è 0

Per quanto attiene al PRODOTTO $f(x) \cdot g(x)$, abbiamo le ovvie PSEUDO-UGUAGLIANZE

$$k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0) \quad \infty \cdot \infty = \infty$$

e la FORMA DI INDECISIONE

$$0 \cdot \infty = F.I.$$

Un fattore tende a 0, "cercando" di rendere uguale a 0 anche il prodotto;

l'altro fattore "tira dalla parte opposta", in quanto

il suo tendere a infinito "cercherebbe" di far tendere all'infinito pure il prodotto

Va detto comunque che una F.I. $[0 \cdot \infty]$ si può ricondurre a una $[\infty/\infty]$, o a una $[0/0]$, come nell'es. seguente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^x}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{x^2}_{\downarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\underbrace{x^2}_{\uparrow +\infty}}{\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow +\infty}} = 0$$

Il limite di questo esempio è 0 perché L'ESPONENZIALE a denominatore TENDE ALL'INFINITO PIÙ RAPIDAMENTE RISPETTO ALLA FUNZIONE ALGEBRICA a numeratore, come

1) si verifica "sperimentalmente" provando ad assegnare a x valori negativi grandi in valore assoluto (es. $x = -1000, \dots$)

2) e, soprattutto, come dimostreremo rigorosamente più avanti

Infine, per la SOMMA ALGEBRICA $f(x) + g(x)$ sussistono evidentemente le PSEUDO-UGUAGLIANZE

$$+\infty + k = +\infty$$

$$-\infty + k = -\infty$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

e la FORMA DI INDECISIONE

$$(+\infty) + (-\infty) = F.I.; \text{ si può anche esprimere come } (+\infty) - (+\infty)$$

che si riscontra in situazioni molto frequenti e semplici, ad esempio con i polinomi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{2x^3}_{\downarrow +\infty} - \underbrace{45x^2}_{\downarrow +\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^3}_{\downarrow +\infty} \left(\underbrace{2 - \frac{45}{x}}_{\downarrow 0} \right) = +\infty$$

\downarrow
2

Abbiamo raccolto x elevato all'esponente più alto, ed entro parentesi abbiamo ottenuto $\left(2 - \frac{45}{x} \right)$ un termine evanescente

Generalizzando questo esempio si trae che AL TENDERE DELLA VARIABILE A INFINITO UN POLINOMIO TENDE SEMPRE ALL'INFINITO, RICALCANDO IL COMPORTAMENTO DEL SUO TERMINE DI GRADO PIÙ ELEVATO.

A parte la dimostrazione formale che abbiamo dato, CERCHIAMO DI COMPRENDERE BENE QUESTO FATTO, approfittando sempre dello stesso esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 45x^2)$.

Qui si ha un "conflitto" fra il tendere a $+\infty$ di $2x^3$ e il tendere a $-\infty$ di $-45x^2$, che è sommato algebricamente a $2x^3$. Il termine $-45x^2$, rispetto al termine $2x^3$,

è più "forte" in quanto al **coefficiente**, ma inferiore come **grado**; però, **quando x diventa molto grande, il coefficiente "perde di importanza" ed è in definitiva il grado a decidere il conflitto.**

Nel nostro caso, il grado inferiore "penalizza" il termine $-45x^2$, che tende a infinito *meno rapidamente* rispetto a $2x^3$. Ad esempio, se $x = 1000$, è $-45x^2 = -45000000$, ma si ha già $2x^3 = 2000000000$ che prevale nettamente su -45000000 . Il termine "vincente", quello che tende all'infinito con maggiore rapidità, è quindi $2x^3$. Pertanto, nel "tiro alla fune" (dove $2x^3$ "tira" verso $+\infty$ e $-45x^2$ "tira" verso $-\infty$), trionfa, per via del grado superiore, il termine $2x^3$, e la somma algebrica, in definitiva, tende a $+\infty$.

D'ora in poi, **ove sia richiesto il LIMITE DI UN POLINOMIO AL TENDERE DELLA VARIABILE A $\pm\infty$** , non staremo più a raccogliere x elevato all'esponente massimo; applicheremo invece la regola stabilita, vale a dire **concluderemo immediatamente che IL LIMITE È INFINITO, e PER TROVARE IL SEGNO di questo infinito GUARDEREMO COME SI COMPORTA IL TERMINE "CARATTERIZZANTE" = DI GRADO MASSIMO.**