7. Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (Teorema di Torricelli-Barrow)

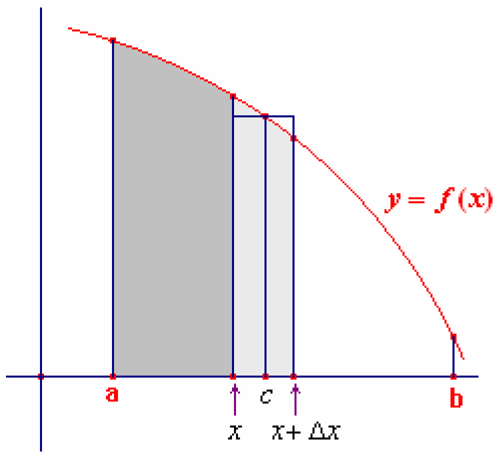
Se $y = f(x)$ è una funzione continua sull'intervallo [a, b],
allora la derivata della funzione integrale

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

è uguale al valore della funzione integranda $y = f(x)$
in corrispondenza dell'ascissa nella quale si deriva:

$$\boxed{F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]}$$

Dimostrazione



Nella figura è rappresentata la funzione INTEGRANDA f.
Consideriamo un'ascissa *x* fissata a piacere in [a, b]
e scriviamo il rapporto incrementale della funzione INTEGRALE F nel punto *x*.
Avremo:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(c)$$

dove l'ultimo passaggio è un'applicazione del Teorema della Media sull'intervallo $[x,\ x+\Delta x]$:
c è appunto l'ascissa di cui quel teorema assicura l'esistenza.
Il punto *c* dipende da Δx, il che si può indicare scrivendo $c = c(\Delta x)$, e si ha $x < c < x + \Delta x$.

Ora faremo tendere Δx a zero;
ma quando Δx tende a zero,
l'ascissa c, essendo "stretta" fra x (fissato) e $x + \Delta x$, tenderà a x
e avremo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) \overset{\text{NOTA}}{=} f(x), \quad \text{C.V.D.}$$

NOTA: quest'ultimo passaggio dipende strettamente dalla ipotesi di continuità per la $f(x)$.
Volendo, per comprenderlo meglio, possiamo porre $c = x + h$, con $h = h(\Delta x)$ e $0 < h < \Delta x$,
e avremo $\lim_{c \to x} f(c) = \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, appunto per la continuità della f nell'ascissa x.

OSSERVAZIONE

In tutto il procedimento dimostrativo,
per rendere il ragionamento più spontaneo e anche per ragioni di praticità nell'esposizione,
abbiamo supposto *positivo* l'incremento Δx.

E' chiaro che il tutto si potrebbe riformulare per un Δx *di segno qualsiasi*.