30. ESERCIZI SULL'ELLISSE (soluzioni alla fine della rassegna)

A partire dall'equazione di un'ellisse

♪ *stabilisci quanto valgono*

I. *le lunghezze dei semiassi orizzontale (a) e verticale (b);*
II. *le coordinate dei vertici e dei fuochi;*
III. *la costante (somma costante delle distanze di un punto dai fuochi)* $2k$
IV. *l'eccentricità*

♫ *disegna la curva*

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{225}=1$ 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ 4) $9x^2+25y^2=225$

5) $\frac{36}{25}x^2+\frac{9}{4}y^2=1$ 6) $x^2+4y^2=1$ 7) $25x^2+9y^2=1$ 8) $x^2+10\left(y^2-1\right)=0$

Scrivi l'equazione di un'ellisse conoscendone i fuochi e la costante (=somma costante) 2k.

9) $F_{1,2}(\pm 4,\, 0);\ 2k=10$ 10) $F_{1,2}(0,\, \pm 4);\ 2k=10$ 11) $F_{1,2}(\pm 5,\, 0);\ 2k=26$

12) $F_{1,2}\left(0,\, \pm\sqrt{3}\right);\ 2k=4$ 13) $F_{1,2}\left(\pm\frac{3}{5},\, 0\right);\ 2k=2$ 14) $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5},\, 0\right);\ 2k=6$

Scrivi l'equazione di un'ellisse conoscendone i vertici.
Determinane i fuochi e la costante (=somma costante) 2k.

15) $(\pm 8,0);\ (0,\pm 10)$ 16) $\left(\pm\sqrt{2},0\right);\ \left(0,\pm\frac{1}{5}\right)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse canonica conoscendone uno dei semiassi (a è quello orizzontale, b il verticale) e sapendo che passa per un punto P assegnato.
Determina inoltre i fuochi della curva e il valore della sua costante (=somma costante) 2k.

17) $a=5;\ P\left(4,\, \frac{12}{5}\right)$ 18) $a=8;\ P\left(\frac{64}{17},\, -15\right)$ 19) $b=10;\ P\left(-3\sqrt{3},\, 5\right)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse conoscendone i fuochi e sapendo che passa per un punto P assegnato.

20) $F_{1,2}(\pm 4,\, 0);\ P\left(4,\, \frac{9}{5}\right)$ 21) $F_{1,2}\left(0,\, \pm\sqrt{3}\right);\ P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\, 1\right)$ 22) $F_{1,2}(\pm 1,\, 0);\ P(0,\, -3)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse canonica sapendo che passa per la coppia seguente di punti:

23) $\left(3,\, \frac{16}{5}\right);\ \left(4,\, \frac{12}{5}\right)$ 24) $\left(\frac{1}{3},\, 2\sqrt{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{5}}{3},\, 2\right)$ 25) $\left(\sqrt{3},\, -\sqrt{3}\right);\ (-1,\, -3)$

Determina l'equazione di un'ellisse canonica a partire dalle informazioni seguenti
(a semiasse orizzontale, b verticale, c semidistanza focale, e eccentricità)

26) $a=7,\, b=4$ 27) $a=9,\, c=40$ 28) $a=2\sqrt{3},\, c=2\sqrt{2}$ 29) $b=2\sqrt{2},\, c=1$

30) $a=5,\, a>b,\, e=\frac{4}{5}$ 31) $a=5,\, a<b,\, e=\frac{4}{5}$ 32) $b=1,\ e=\frac{1}{2}$

33) $a=25,\ a>b,\ e=\frac{7}{25}$ 34) $a=12,\ a<b,\ e=\frac{4}{5}$ 35) $a<b,\ c=2\sqrt{2},\ e=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 36) $c=3,\ e=\frac{5}{6}$

Porta in forma standard le seguenti equazioni (ciascuna rappresenta un semiellisse); disegna la curva:

37) $y=\sqrt{1-4x^2}$ 38) $y=5\sqrt{1-x^2}$ 39) $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ 40) $y=\frac{3}{7}\sqrt{49-16x^2}$

Considera la curva associata all'equazione data, e determina i valori del parametro per i quali

I) rappresenta un'ellisse
II) rappresenta un'ellisse coi fuochi sull'asse x
III) rappresenta un'ellisse coi fuochi sull'asse y
IV) rappresenta una circonferenza

41) $\frac{x^2}{3k-2}+\frac{y^2}{k-4}=1$ 42) $\frac{x^2}{3k-2}+\frac{y^2}{k+4}=1$ 43) $\frac{x^2}{k^2-4}+\frac{y^2}{2k-1}=1$ 44) $\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{7-k}=1$

Scrivi l'equazione della retta tangente ad un'ellisse in un suo punto.

45) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1 \ \ \mathrm{P}(1,-3)$ 46) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \ \ \mathrm{P}\left(3,-\frac{16}{5}\right)$ 47) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1 \ \ \mathrm{P}\left(-2\sqrt{2},\,2\right)$

Scrivi le equazioni delle rette tangenti ad un'ellisse assegnata condotte da un dato punto esterno.

48) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1 \ \ \mathrm{P}(3,-3)$ 49) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1 \ \ \mathrm{P}(1,3)$ 50) $\frac{x^2}{4}+y^2=1 \ \ \mathrm{P}(2,5)$

Scrivi l'equazione di un'ellisse canonica di cui si conoscono una retta tangente, e una seconda condizione.

51) *Tangenza con la retta* $t: y=\frac{25-4x}{5}$; *passaggio per* $\mathrm{P}\left(3,\frac{12}{5}\right)$

52) *Tangenza con la retta* $t: y=3x+4\sqrt{3}$; *asse minore* $=4$

53) *Tangenza con la retta* $t: x+2y=3$; *somma costante* $=2k=2\sqrt{5}$

54) *Tangenza con la retta* $t: x+3y-6=0$; *semidistanza focale* $=c=4$

55) Quando la Terra si trova in "afelio"
(il punto di massima distanza dal Sole)
tale distanza misura circa $km\ 1{,}52\cdot 10^8$.
La distanza minima ("perielio") è invece di $km\ 1{,}47\cdot 10^8$ circa.
L'orbita della Terra intorno al Sole è di forma ellittica, e il Sole ne occupa uno dei fuochi.
Sapresti, a partire da questi dati, determinare approssimativamente l'asse maggiore dell'ellisse?
E l'eccentricità? (Troverai che è davvero piccola piccola … determina il suo valore con 3 cifre significative)

56) Anche l'orbita della Luna intorno alla Terra è ellittica;
la Terra ne occupa uno dei fuochi.
Il perigeo è il punto di minima distanza della Luna dalla Terra:
la distanza è di circa 363 mila chilometri.
L'apogeo è il punto di massima distanza della Luna dalla Terra:
distanza pari a 405 mila chilometri circa.
E' maggiore l'eccentricità dell'orbita lunare intorno alla Terra o quella dell'orbita terrestre intorno al Sole?

57) Quanto distano dall'origine i punti di intersezione delle due ellissi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

e

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\,?$$

58) Dimostra che in un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b)$
i valori assoluti delle ordinate di due punti con la stessa ascissa,
situati rispettivamente

- sull'ellisse
- e sulla circonferenza circoscritta all'ellisse,

stanno fra loro come $b:a$.

59) Determina la misura del lato del quadrato inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

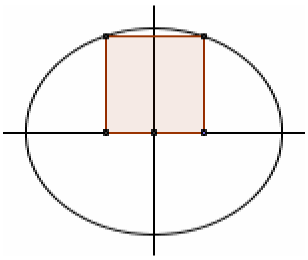
60) Determina la misura del lato del quadrato circoscritto all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

61) Data l'ellisse $x^2+2y^2=2$, determina l'area del rettangolo inscritto, avente due lati passanti per i fuochi.

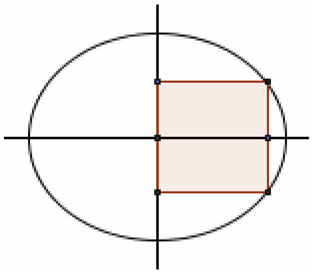
62a)

Le figure I), II), III) mostrano l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

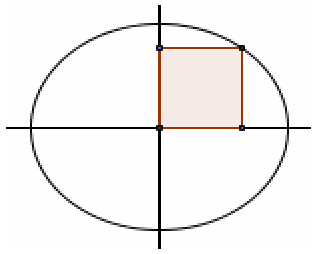
e un quadrato con due vertici su di essa (un solo vertice nell'ultimo caso) e gli altri vertici sugli assi cartesiani.
Determinare il lato del quadrato in questione.



I)



II)



III)

62b)

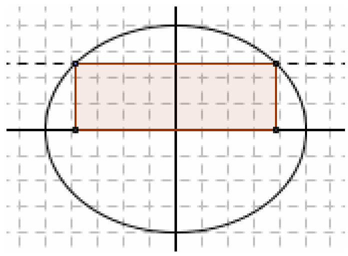
Generalizziamo: rispondi agli stessi quesiti I), II), III) dell'esercizio precedente

con riferimento all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

63)

Interseca l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ con una retta $y=k$ $(k>0)$

in modo che il rettangolo in figura abbia area $10\sqrt{3}$



64) Nell'ellisse $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$

determina b^2 in modo che sia unitario il lato del quadrato inscritto nell'ellisse.

65) Nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

determina i punti di contatto delle quattro tangenti
parallele alle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse.

66) Sull'ellisse di equazione $4x^2+y^2=4$,

determinare i punti equidistanti
dal fuoco superiore e dal vertice che si trova sul semiasse delle ascisse positive.

67) Determina le coordinate del punto in cui la normale (= perpendicolare alla tangente)
all'ellisse $2x^2+y^2=2$ nel suo punto P, avente ordinata 1 e appartenente al 2° quadrante,
interseca ulteriormente l'ellisse.

68) Qual è la lunghezza del segmento che un'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

stacca sulla diagonale del rettangolo circoscritto?

69) Cos'hanno di particolare le curve seguenti?

a) $x^2+4y^2=0$

b) $x^2+4y^2+1=0$

70) Data un'ellisse di costante (= somma costante) $2a$,
giustifica rigorosamente la seguente affermazione:
i punti P_0 interni all'ellisse sono tali che $P_0F_1 + P_0F_2 < 2a$;
per quelli esterni si ha invece $P_0F_1 + P_0F_2 > 2a$.

71) Dimostra che, data una circonferenza γ di centro O e un punto A interno ad essa,
il luogo dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti da γ e da A è un'ellisse.
Dove si trovano i fuochi di questa ellisse?

72) L'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b$,
ha, com'è noto,
fuochi di coordinate

$$F_1=(-c,\,0)=\left(-\sqrt{a^2-b^2},\,0\right);\;\; F_2=(c,\,0)=\left(\sqrt{a^2-b^2},\,0\right)$$

ed eccentricità

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Dimostra ora che,
dati tre numeri positivi

$$a,\;\; b<a,\;\; c=\sqrt{a^2-b^2}\;,$$

e considerati
il punto $F_2(c,\,0)$
e la retta $d_2: x=\frac{a^2}{c}$,
anche il luogo dei punti P tali che si abbia

$$\frac{PF_2}{PH}=\frac{c}{a},$$

dove PH indica la distanza di P dalla retta d_2,
ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Allo stesso modo, si potrebbe provare che si perviene all'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
pure ricercando il luogo dei punti per i quali è uguale a $\frac{c}{a}$
il rapporto delle distanze dal punto $F_1(-c,\,0)$ *e dalla retta* $d_1:\; x=-\frac{a^2}{c}$.

In definitiva, l'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$
può essere pensata come luogo dei punti
per i quali è costante il rapporto delle distanze da un "fuoco" e da una "direttrice",
ed in tal caso
ha come "direttrici" le due rette $x=\pm\frac{a^2}{c}$
mentre il rapporto costante è uguale a $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ *).*

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULL'ELLISSE

1) $\begin{matrix} a=5 & (\pm 5,0) \\ b=4 & (0,\pm 4) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 3,\ 0);\ \ 2k=10;\ \ e=\frac{3}{5}$

2) $\begin{matrix} a=9 & (\pm 9,0) \\ b=15 & (0,\pm 15) \end{matrix}$ $F_{1,2}(0,\ \pm 12);\ \ 2k=30;\ \ e=\frac{4}{5}$

3) $\begin{matrix} a=13 & (\pm 13,0) \\ b=5 & (0,\pm 5) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 12,\ 0);\ \ 2k=26;\ \ e=\frac{12}{13}$

4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;$ $\begin{matrix} a=5 & (\pm 5,0) \\ b=3 & (0,\pm 3) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 4,\ 0);\ \ 2k=10;\ \ e=\frac{4}{5}$

5) $\frac{x^2}{\frac{25}{36}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$ $\begin{matrix} a=\frac{5}{6} & \left(\pm\frac{5}{6},0\right) \\ b=\frac{2}{3} & \left(0,\pm\frac{2}{3}\right) \end{matrix}$ $F_{1,2}\left(\pm\frac{1}{2},\ 0\right);\ \ 2k=\frac{5}{3};\ \ e=\frac{3}{5}$

6) $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ $\begin{matrix} a=1 & (\pm 1,0) \\ b=\frac{1}{2} & \left(0,\pm\frac{1}{2}\right) \end{matrix}$ $F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right);\ \ 2k=2;\ \ e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\frac{x^2}{\frac{1}{25}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$ $\begin{matrix} a=\frac{1}{5} & \left(\pm\frac{1}{5},\ 0\right) \\ b=\frac{1}{3} & \left(0,\ \pm\frac{1}{3}\right) \end{matrix}$ $F_{1,2}\left(0,\ \pm\frac{4}{15}\right);\ \ 2k=\frac{2}{3};\ \ e=\frac{4}{5}$

8) $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ $\begin{matrix} a=\sqrt{10} & (\pm\sqrt{10},0) \\ b=1 & (0,\pm 1) \end{matrix}$ $F_{1,2}(\pm 3,\ 0);\ \ 2k=2\sqrt{10};\ \ e=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 10) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 11) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 12) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

13) $x^2+\frac{y^2}{\frac{16}{25}}=1$ *opp.* $x^2+\frac{25}{16}y^2=1$ *opp.* $16x^2+25y^2=16$ 14) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

15) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ $F_{1,2}(0,\ \pm 6);\ \ 2k=20$

16) $\frac{x^2}{2}+25y^2=1$ *opp.* $x^2+50y^2=2;$ $F_{1,2}\left(\pm\frac{7}{5},\ 0\right);\ \ 2k=2\sqrt{2}$

17) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;$ $F_{1,2}(\pm 3,\ 0);\ \ 2k=10$

18) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{289}=1;$ $F_{1,2}(0,\ \pm 15);\ \ 2k=34$

19) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1;$ $F_{1,2}(0,\ \pm 4);\ \ 2k=20$

20) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 21) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 22) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{9}=1$

23) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 24) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 25) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$

26) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ 27) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{1681}=1$ 28) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ *opp.* $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{20}=1$ 29) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ *opp.* $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{8}=1$

30) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 31) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{625}{9}}=1$ 32) $\frac{x^2}{\frac{4}{3}}+y^2=1$ *opp.* $\frac{x^2}{\frac{3}{4}}+y^2=1$

33) $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$ 34) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{400}=1$ 35) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 36) $\frac{x^2}{324/25}+\frac{y^2}{99/25}=1$ *opp.* $\frac{x^2}{99/25}+\frac{y^2}{324/25}=1$

37-38-39-40: *poiché il risultato di una radice quadrata è sempre ≥ 0, in tutti i casi l'equazione ottenuta andrà abbinata alla condizione $y \geq 0$. Le curve in questione saranno delle "semiellissi".*

37) $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1,\ con\ y \geq 0$ 38) $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1,\ con\ y \geq 0$ 39) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ con\ y \geq 0$ 40) $\frac{x^2}{\frac{49}{16}} + \frac{y^2}{9} = 1,\ con\ y \geq 0$

41) $Ellisse\ con\ k > 4$
$In\ tal\ caso,\ l'ellisse\ ha\ SEMPRE\ i\ fuochi\ sull'asse\ x$
$Circonferenza\ per\ nessun\ valore\ di\ k$

42) $Ellisse\ con\ k > \frac{2}{3}$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ x\ con\ k > 3$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ y\ con\ \frac{2}{3} < k < 3$
$Circonferenza\ con\ k = 3$

43) $Ellisse\ con\ k > 2$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ x\ con\ k > 3$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ y\ con\ 2 < k < 3$
$Circonferenza\ con\ k = 3$

44) $Ellisse\ con\ 1 < k < 7$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ x\ con\ 4 < k < 7$
$Ellisse\ coi\ fuochi\ sull'asse\ y\ con\ 1 < k < 4$
$Circonferenza\ con\ k = 4$

45) $y = 3x - 6$ 46) $3x - 5y - 25 = 0$ 47) $y = 4x\sqrt{2} + 18$

48) $y = -3x + 6,\ y = \frac{3}{7}x - \frac{30}{7}$ 49) $y = -x + 4,\ y = \frac{5}{11}x + \frac{28}{11}$ 50) $y = \frac{6}{5}x + \frac{13}{5},\ x = 2$

51) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ *oppure* $\frac{x^2}{\frac{225}{16}} + \frac{y^2}{16} = 1$ 52) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ *opp.* $\frac{x^2}{\frac{44}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1$ 53) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 54) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

TROVI LE RISOLUZIONI COMPLETE DEGLI ESERCIZI 55 … 72 ALLE PAGINE 100 … 105

55) $asse\ maggiore \approx km\ 2{,}99 \cdot 10^8;\ \ e \approx 0{,}0167$

56) Coi dati forniti, si trova $e \approx 0{,}055$

57) $d = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

58) Vedi pag. 100

59) $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 60) $\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$ 61) $area = 2\sqrt{2}$

62a)

$lato\ quadrato\ I) = \frac{20}{\sqrt{29}} = \frac{20}{29}\sqrt{29}$ $lato\ quadrato\ II) = \frac{40}{\sqrt{89}} = \frac{40}{89}\sqrt{89}$ $lato\ quadrato\ III) = \frac{20}{\sqrt{41}} = \frac{20}{41}\sqrt{41}$

62b)

$lato\ quadrato\ I) = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$ $lato\ quadrato\ II) = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$ $lato\ quadrato\ III) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

63) $k = 2 \vee k = 2\sqrt{3}$

64) $b^2 = 1/3$

65) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

66) $(-1,0);\ \left(\frac{11}{13}, \frac{8}{13}\sqrt{3}\right)$

67) $\left(\frac{7}{10}\sqrt{2}, -\frac{1}{5}\right)$

68) $\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$

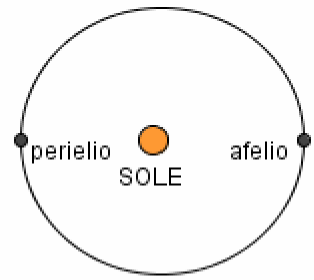
69) a) è un luogo puntiforme b) è il luogo vuoto

70, 71, 72) Vedi pag. 105

RISOLUZIONE DI ALCUNI FRA GLI ESERCIZI

55) Quando la Terra si trova in "afelio"
(il punto di massima distanza dal Sole)
tale distanza misura circa $\text{km } 1{,}52\cdot 10^8$.
La distanza minima ("perielio") è invece di $\text{km } 1{,}47\cdot 10^8$ circa.
L'orbita della Terra intorno al Sole è di forma ellittica, e il Sole ne occupa uno dei fuochi.
Sapresti, a partire da questi dati, determinare approssimativamente l'asse maggiore dell'ellisse?
E l'eccentricità? (Troverai che è davvero piccola piccola … determina il suo valore con 3 cifre significative)

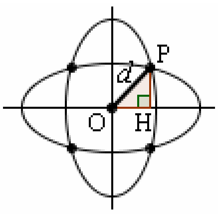
$$\textit{asse maggiore} \approx km\ 1{,}52\cdot 10^8 + km\ 1{,}47\cdot 10^8 = km\ 2{,}99\cdot 10^8$$
$$\textit{distanza focale} \approx km\ 1{,}52\cdot 10^8 - km\ 1{,}47\cdot 10^8 = km\ 0{,}05\cdot 10^8$$
$$e \approx \frac{0{,}05\cdot 10^8}{2{,}99\cdot 10^8} \approx 0{,}0167$$
L'orbita è "quasi circolare": eccentricità molto piccola



56) Anche l'orbita della Luna intorno alla Terra è ellittica; la Terra ne occupa uno dei fuochi.
Il perigeo è il punto di minima distanza della Luna dalla Terra: la distanza è di circa 363mila chilometri.
L'apogeo è il punto di massima distanza della Luna dalla Terra: distanza pari a 405mila chilometri circa.
E' maggiore l'eccentricità dell'orbita lunare intorno alla Terra o quella dell'orbita terrestre intorno al Sole?

$$\textit{asse maggiore} \approx km\ 405000 + km\ 363000 = km\ 768000$$
$$\textit{distanza focale} \approx km\ 405000 - km\ 363000 = km\ 42000$$
$$e = \approx \frac{42000}{768000} \approx 0{,}0547$$

57) Quanto distano dall'origine i punti di intersezione delle due ellissi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$?



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2 \end{cases} \quad x^2=\frac{\begin{vmatrix} a^2b^2 & a^2 \\ a^2b^2 & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & a^2 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}} = \frac{a^2b^4-a^4b^2}{b^4-a^4} = \frac{a^2b^2\cancel{(b^2-a^2)}}{(b^2+a^2)\cancel{(b^2-a^2)}}$$

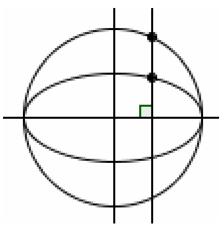
$(b \neq a;\ d'altronde,\ se\ fosse\ b=a\ si\ tratterebbe\ di\ cinconferenze!)$

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \rightarrow x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$x_P=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Per evidenti motivi di simmetria, si avrà pure $y_P=x_P=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *da cui* $\boxed{d=\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

(il triangolo OHP ha gli angoli di 90°, 45°, 45°: in tali triangoli, si ha $\textit{ipotenusa}=\textit{cateto}\cdot\sqrt{2}$*)*

58) Dimostra che in un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$
i valori assoluti delle ordinate di due punti con la stessa ascissa, situati rispettivamente sull'ellisse e sulla circonferenza circoscritta all'ellisse, stanno fra loro come $b:a$.



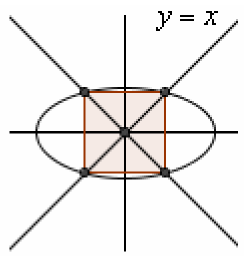
Ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2};\quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2};\quad y^2=b^2\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);\quad y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}$$
$$\boxed{y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$$

Circonferenza di raggio a: $x^2+y^2=a^2;\quad y^2=a^2-x^2;\quad \boxed{y=\pm\sqrt{a^2-x^2}}$

Rapporto fra i valori assoluti delle ordinate di due punti con la stessa ascissa x: $\frac{\frac{b}{a}\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}=\boxed{\frac{b}{a}}$

59) Determina la misura del lato del quadrato inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=x\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$$

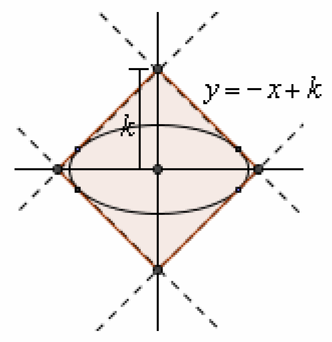
$$x^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

da cui

$$lato\ quadrato\ inscritto=\boxed{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

60) Determina la misura del lato del quadrato circoscritto all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Ricerca dell'equazione della retta,
inclinata di 45° "in discesa" e tangente all'ellisse nel 1° quadrante:

$$y=-x+k$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-x+k)^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+a^2(-x+k)^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2x^2-2a^2kx+a^2k^2=a^2b^2$$

$$(a^2+b^2)x^2-2a^2kx+a^2(k^2-b^2)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0$$

$$(a^2k)^2-a^2(a^2+b^2)(k^2-b^2)=0$$

$$a^{\cancel{4}^{2}}k^2-\cancel{a^2}(a^2k^2-a^2b^2+b^2k^2-b^4)=0$$

$$\cancel{a^2k^2}-\cancel{a^2k^2}+a^2b^2-b^2k^2+b^4=0$$

$$\cancel{b^2}k^2=a^2\cancel{b^2}+b^{\cancel{4}^{2}}$$

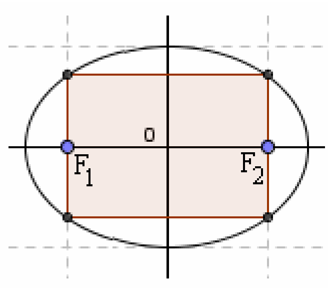
$$k^2=a^2+b^2$$

$$k=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$lato\ quadrato\ circoscritto=\boxed{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

(*in un triangolo con gli angoli di* 90°, 45°, 45°, *si ha* $\quad ipotenusa=cateto\cdot\sqrt{2}$)

61) Data l'ellisse $x^2+2y^2=2$,
determinare l'area del rettangolo inscritto, avente due lati passanti per i fuochi.



$$x^2+2y^2=2$$

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1 \quad y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

$$a^2=2,\ b^2=1,\ c^2=a^2-b^2=2-1=1 \rightarrow c=1$$

$$\mathrm{F}(\pm1,\ 0)$$

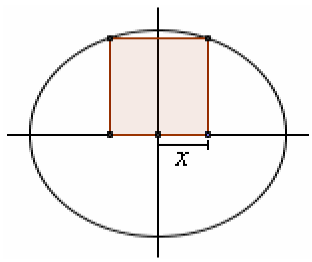
$$x=1\rightarrow y=\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$base=2,\ altezza=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}=\sqrt{2},\quad \boxed{area=2\sqrt{2}}$$

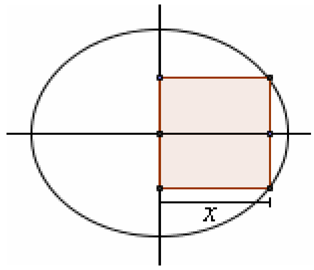
62a) Le figure I), II), III) mostrano l'ellisse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

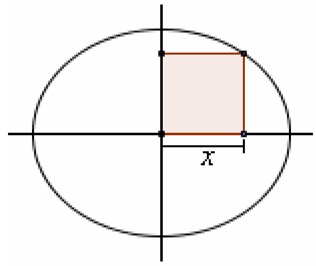
e un quadrato con due vertici su di essa (un solo vertice nell'ultimo caso) e gli altri vertici sugli assi cartesiani.
Determinare il lato del quadrato in questione.



I)



II)



III)

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$
$$\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}=2x$$
$$4\sqrt{25-x^2}=10x$$
$$2\sqrt{25-x^2}=5x$$
$$100-4x^2=25x^2$$
$$29x^2=100$$
$$x^2=\frac{100}{29}$$
$$x=\frac{10}{\sqrt{29}}$$
$$\textit{lato quadrato I})=\frac{20}{\sqrt{29}}=\boxed{\frac{20}{29}\sqrt{29}}$$

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$
$$\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}=\frac{x}{2}$$
$$8\sqrt{25-x^2}=5x$$
$$64\left(25-x^2\right)=25x^2$$
$$1600-64x^2=25x^2$$
$$89x^2=1600$$
$$x^2=\frac{1600}{89}$$
$$x=\frac{40}{\sqrt{89}}$$
$$\textit{lato quadrato II})=\frac{40}{\sqrt{89}}=\boxed{\frac{40}{89}\sqrt{89}}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1\\ y=x\end{cases}$$
$$\frac{x^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$$
$$16x^2+25x^2=400$$
$$41x^2=400$$
$$x^2=\frac{400}{41}$$
$$x=\frac{20}{\sqrt{41}}$$
$$\textit{lato quadrato III})=\frac{20}{\sqrt{41}}=\boxed{\frac{20}{41}\sqrt{41}}$$

62b) Generalizziamo: rispondi agli stessi quesiti I), II), III) dell'esercizio precedente con riferimento all'ellisse di equazione

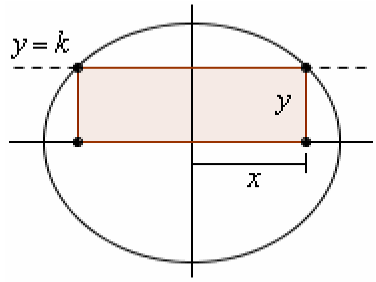
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=2x$$
$$b\sqrt{a^2-x^2}=2ax$$
$$a^2b^2-b^2x^2=4a^2x^2$$
$$\left(4a^2+b^2\right)x^2=a^2b^2$$
$$x^2=\frac{a^2b^2}{4a^2+b^2}$$
$$x=\frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$$
$$\textit{lato quadrato I})=\boxed{\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{x}{2}$$
$$2b\sqrt{a^2-x^2}=ax$$
$$4b^2\left(a^2-x^2\right)=a^2x^2$$
$$4a^2b^2-4b^2x^2=a^2x^2$$
$$\left(a^2+4b^2\right)x^2=4a^2b^2$$
$$x^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+4b^2}$$
$$x=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}$$
$$\textit{lato quadrato II})=\boxed{\frac{2ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=x\end{cases}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$
$$b^2x^2+a^2x^2=a^2b^2$$
$$\left(a^2+b^2\right)x^2=a^2b^2$$
$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$
$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\textit{lato quadrato III})=\boxed{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

63) Interseca l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ con una retta $y=k\ (k>0)$ in modo che il rettangolo in figura abbia area $10\sqrt{3}$

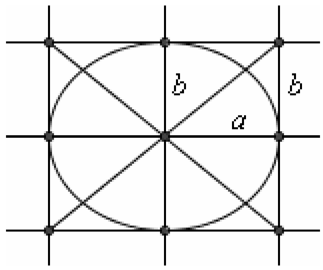


$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$
$$x=\frac{5}{4}\sqrt{16-y^2}$$
$$altezza\ \ rettangolo=k$$
$$base\ rettangolo=2\cdot\frac{5}{4}\sqrt{16-y^2}=\frac{5}{2}\sqrt{16-k^2}$$
$$Area\ \ rettangolo=\frac{5}{2}\sqrt{16-k^2}\cdot k$$
$$\frac{5}{2}\sqrt{16-k^2}\cdot k=10\sqrt{3};\quad \sqrt{16-k^2}\cdot k=4\sqrt{3};\quad 16k^2-k^4=48;\quad k^4-16k^2+48=0$$
$$\left(k^2-4\right)\left(k^2-12\right)=0;\qquad k^2=4\ \vee\ k^2=12\ \rightarrow\ \boxed{k=2\ \vee\ k=\sqrt{12}=2\sqrt{3}}$$

64) Nell'ellisse $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ determina b^2 in modo che sia unitario il lato del quadrato inscritto nell'ellisse.

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\ \ (\textit{il lato del quadrato inscritto vale}\ \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \textit{vedi esercizio}\ 59)$$
$$a=1\ \rightarrow\ \frac{2b}{\sqrt{1+b^2}}=1;\quad 2b=\sqrt{1+b^2};\quad 4b^2=1+b^2;\quad 3b^2=1;\quad \boxed{b^2=\frac{1}{3}}$$

65) Nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ determina i punti di contatto delle quattro tangenti parallele alle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse.



Il coefficiente angolare della diagonale ascendente è $m=\frac{b}{a}$.

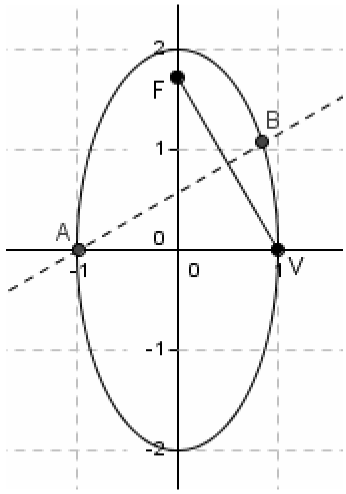
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\frac{b}{a}x+k\end{cases}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}x+k\right)^2}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{b^2}{a^2}x^2+2\frac{b}{a}kx+k^2\right)\cdot\frac{1}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{2kx}{ab}+\frac{k^2}{b^2}=1;$$
$$b^2x^2+b^2x^2+2abkx+a^2k^2=a^2b^2;\quad \underline{2b^2x^2+2abkx+a^2k^2-a^2b^2=0}$$
$$\frac{\Delta}{4}=0$$
$$a^2b^2k^2-2b^2\left(a^2k^2-a^2b^2\right)=0;\quad \cancel{a^2b^2}k^2-2\cancel{a^2b^2}\left(k^2-b^2\right)=0;$$
$$k^2-2k^2+2b^2=0;\quad -k^2=-2b^2;\quad k^2=2b^2;\quad k=\pm b\sqrt{2}$$
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\frac{b}{a}x+b\sqrt{2}\end{cases}$$
$$\underline{2b^2x^2+2ab\cdot b\sqrt{2}x+a^2\cdot 2b^2-a^2b^2=0};\quad 2\cancel{b^2}x^2+2a\cancel{b^2}\sqrt{2}x+a^2\cancel{b^2}=0;\quad \left(x\sqrt{2}+a\right)^2=0$$
$$x=-\frac{a}{\sqrt{2}}\rightarrow y=\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+b\sqrt{2}=-\frac{b}{\sqrt{2}}+b\sqrt{2}=...=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

Oltre al punto così trovato $\boxed{\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}$

gli altri 3 *punti di tangenza sono evidentemente, per motivi di simmetria,* $\boxed{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}$

66) Sull'ellisse di equazione $4x^2+y^2=4$, determinare i punti equidistanti dal fuoco superiore e dal vertice che si trova sul semiasse delle ascisse positive.

Il luogo dei punti del piano, equidistanti dagli estremi di un segmento, è l'asse di quel segmento!



$$4x^2+y^2=4 \qquad x^2+\frac{y^2}{4}=1 \qquad \mathrm{F}\left(0,\sqrt{3}\right) \quad \mathrm{V}(1,0)$$

$$\textit{asse di } \mathrm{FV}: \ (x-0)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=(x-1)^2+(y-0)^2$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y\sqrt{3}+3=\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}$$

$$-2y\sqrt{3}=-2x-2$$

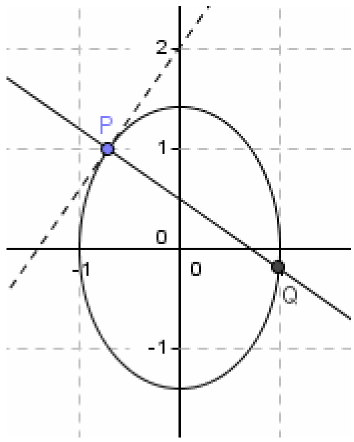
$$y\sqrt{3}=x+1$$

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad 4x^2+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2=4 \qquad 4x^2+\frac{x^2+2x+1}{3}=4 \qquad 12x^2+x^2+2x+1=12 \qquad 13x^2+2x-11=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+143}}{13}=\ldots=\left\langle \begin{array}{l} -1 \to y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}=\dfrac{-1+1}{\sqrt{3}}=0 \\ \dfrac{11}{13} \to y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{11}{13}+1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\frac{24}{13}}{\sqrt{3}}=\dfrac{24}{13\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{24\sqrt{3}}{39}=\dfrac{8}{13}\sqrt{3} \end{array}\right. \qquad \boxed{(-1,0);\ \left(\frac{11}{13},\frac{8}{13}\sqrt{3}\right)}$$

67) Determina le coordinate del punto in cui la normale (perpendicolare alla tangente) all'ellisse $2x^2+y^2=2$ nel suo punto P, avente ordinata 1 e appartenente al 2° quadrante, interseca ulteriormente l'ellisse.



$$2x^2+y^2=2$$

$$y=1 \to x^2=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2} \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$$

Tangente (*regola sdoppiamenti*):

$$2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+1\cdot y=2; \quad -x\sqrt{2}+y=2; \quad y=x\sqrt{2}+2 \ \left(m=\sqrt{2}\right)$$

$$m_{normale}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textit{Normale}: \ y-1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad y-1=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{1}{2} \qquad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}$$

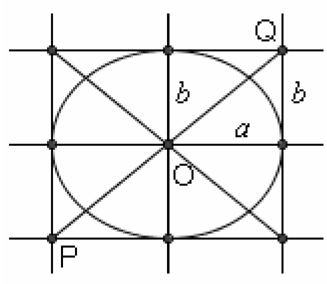
Intersezione della normale trovata con l'ellisse:

$$2x^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2=2 \qquad 2x^2+\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}=2 \qquad \frac{8x^2+2x^2-2x\sqrt{2}+1-8}{4}=0$$

$$10x^2-2x\sqrt{2}-7=0 \qquad x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+70}}{10}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{72}}{10}=\frac{\sqrt{2}\pm6\sqrt{2}}{10}=\left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{5\sqrt{2}}{10}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{7\sqrt{2}}{10}=\dfrac{7}{10}\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$x=\frac{7}{10}\sqrt{2} \to y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{10}\sqrt{2}+\frac{1}{2}=-\frac{7}{10}+\frac{1}{2}=\frac{-7+5}{10}=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5} \qquad \boxed{\mathrm{Q}\left(\frac{7}{10}\sqrt{2},-\frac{1}{5}\right)}$$

68) Qual è la lunghezza del segmento che un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ stacca sulla diagonale del rettangolo circoscritto?



$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\frac{b}{a}x\end{cases}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{\frac{\cancel{b^2}}{a^2}x^2}{\cancel{b^2}}=1\quad 2\frac{x^2}{a^2}=1\quad x^2=\frac{a^2}{2}\quad \begin{cases}x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\pm\frac{b}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\mathrm{PQ}=2\cdot\mathrm{OQ}=2\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}}=2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{4\cdot\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

69) a) è un luogo puntiforme: l'unico punto $(x,\ y)$ che soddisfa all'equazione è infatti l'origine $(0,0)$.
b) è il luogo vuoto: la sua equazione non è infatti verificata da alcuna coppia $(x,\ y)$.

70) Data un'ellisse di costante (= somma costante) $2a$, giustifica rigorosamente la seguente affermazione: i punti P_0 interni all'ellisse sono tali che $\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0F_2}<2a$; per quelli esterni si ha invece $\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0F_2}>2a$.

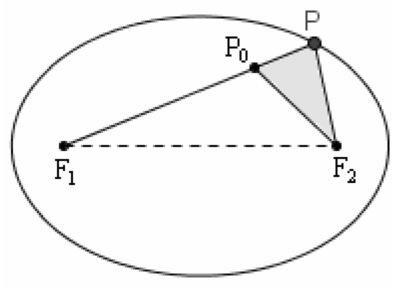
Sia P_0 un punto interno all'ellisse. Congiungiamo P_0 con F_1 ed F_2; prolunghiamo la congiungente $\mathrm{F_1P_0}$ fino ad incontrare l'ellisse in P.
Essendo, per la disuguaglianza triangolare su $\mathrm{PP_0F_2}$,

$$\mathrm{P_0F_2}<\mathrm{P_0P}+\mathrm{PF_2},$$

sarà

$$\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0F_2}<\mathrm{P_0F_1}+\mathrm{P_0P}+\mathrm{PF_2}=\mathrm{PF_1}+\mathrm{PF_2}=2a.$$

E in modo del tutto simile si prova la seconda parte dell'asserto.

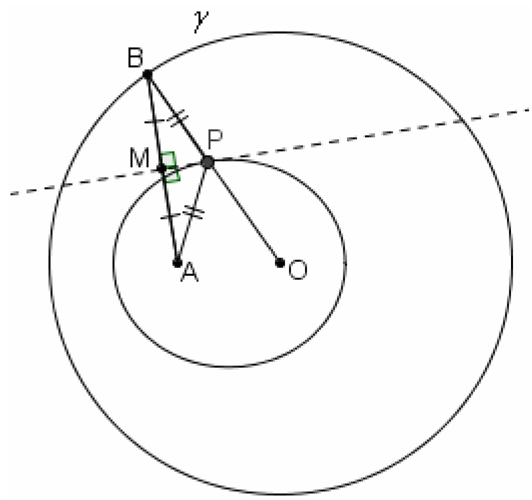


71) Dimostra che, data una circonferenza γ di centro O e un punto A interno ad essa, il luogo dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti da γ e da A è un'ellisse. Dove si trovano i fuochi di questa ellisse?

Dalla figura:

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PO}=\mathrm{PB}+\mathrm{PO}=r=costante$$

Ellisse di fuochi A, O



72) …

$$a,\ b<a,\ c=\sqrt{a^2-b^2}\qquad \mathrm{P}(x,y)\ \ \mathrm{F}_2=(c,\,0)\ \ x=\frac{a^2}{c}\qquad \boxed{\frac{\mathrm{PF_2}}{\mathrm{PH}}=\frac{c}{a}}$$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a};\qquad \frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{a^2-b^2}\right)^2+(y-0)^2}}{\left|x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a};$$

$$\sqrt{x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\left|x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right|;$$

$$\sqrt{x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2}=\left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a\right|;\qquad x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2=\left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a\right|^2$$

$$x^2\cancel{-2x\sqrt{a^2-b^2}}\cancel{+a^2}-b^2+y^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\cancel{-2x\sqrt{a^2-b^2}}\cancel{+a^2};\qquad \cancel{a^2x^2}-a^2b^2+a^2y^2=\cancel{a^2x^2}-b^2x^2;$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;\qquad \frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2b^2}^{\,1}}{\cancel{a^2b^2}};\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ESERCIZI SULL'ELLISSE TRASLATA

1) (Esercizio svolto)
Scrivi l'equazione del LUOGO dei punti $\mathrm{P}(x, y)$ *del piano cartesiano per i quali la distanza dal punto* $\mathrm{A}(1,0)$ *è uguale a* $1/3$ *della distanza dalla retta* $r:\ x=5$.
Troverai un'ellisse in posizione NON canonica: determinane il centro, i semiassi, i vertici, i fuochi, l'eccentricità.

$\mathrm{P}(x, y) \quad \mathrm{A}(1,0) \quad r: x=5 \quad d(\mathrm{P}, \mathrm{A})=\frac{1}{3} \cdot d(\mathrm{P}, r)$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{3}|x-5|; \qquad 3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-5|;$$

$$9\left(x^2-2x+1+y^2\right)=x^2-10x+25; \qquad 9x^2-18x+9+9y^2=x^2-10x+25;$$

$$8x^2+9y^2-8x-16=0; \qquad 8x^2-8x+9y^2=16;$$

$$8\left(x^2-x\right)+9y^2=16; \qquad 8\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]+9y^2=16;$$

$$8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2+9y^2=16; \qquad 8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9y^2=18; \qquad \frac{\cancel{8}^{\,4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\cancel{18}_{\,9}}+\frac{\cancel{9}y^2}{\cancel{18}_{\,2}}=1;$$

$$\boxed{\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{2}=1}$$

Si tratta di un'ellisse traslata di

- centro $\mathrm{C}(x_0, y_0)=\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
- semiassi $a=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}, \ b=\sqrt{2}$
- vertici $(x_0 \pm a, \ y_0)=\left(\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, \ 0\right)=\left\langle\begin{matrix}(-1,0) \\ (2,0)\end{matrix}\right.$ e $(x_0, \ y_0 \pm b)=\left(\frac{1}{2}, \ 0 \pm \sqrt{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, \ \pm\sqrt{2}\right)$
- semidistanza focale ottenibile (essendo $a>b$) dalla formula $c^2=a^2-b^2=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4} \rightarrow c=\frac{1}{2}$
- fuochi $(x_0 \pm c, \ 0)=\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}, \ 0\right)=\left\langle\begin{matrix}(0,0) \\ (1,0)\end{matrix}\right.$

Determina centro, semiassi, vertici, fuochi, costante ed eccentricità dell'ellisse di equazione:

2) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 3) $\frac{(x+7)^2}{81}+\frac{y^2}{225}=1$ 4) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+10)^2}{16}=1$

5) $4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=1$ 6) $4\left(x-\sqrt{2}\right)^2+9y^2=36$ 7) $(3x-6)^2+(5y+10)^2=36$

Porta le seguenti equazioni di ellissi traslate sotto la forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

così da determinarne il centro e i semiassi:

8) $x^2+2y^2-10x+12y+41=0$ 9) $4x^2+3y^2-24x-12y+36=0$ 10) $x^2+4y^2+10x+9=0$

11) $16x^2+25y^2+32x+150y=159$ 12) $16x^2+25y^2-32x-100y=284$ 13) $8x^2+9y^2+16x-18y-55=0$

14) $4x^2+36y^2-108y=63$ 15) $16x^2+9y^2=64x+36y+44$ 16) $x^2+3y^2+8x-30y=-88$

17) $16x^2+48y^2-8x=47$ 18) $16x^2+25y^2-100y=44$ 19) $x^2+2y^2+2x\sqrt{3}+1=0$

Scrivi l'equazione dell'ellisse "traslata" con le seguenti caratteristiche (C centro di simmetria, a semiasse orizzontale, b semiasse verticale, c semidistanza focale, 2k = somma costante, e = eccentricità)

20) $a=3,\ b=1$, centro di simmetria $C(2,-4)$ 21) Vertici $(-11,1);\ (-3,1);\ (-7,1-2\sqrt{3});\ (-7,1+2\sqrt{3})$

22) $F_1(5,0),\ C(6,0),\ a=\sqrt{5}$ 23) $F_1(-4,2),\ F_2(2,2),\ 2k=10$ 24) $F_1(-1,5),\ F_2(7,5),\ e=0.8$

25) Centro in $C(-1,0)$, passaggio per $P\left(0,-\frac{24}{5}\right)$, $b=2\sqrt{6}$

26) Passaggio per i punti $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right);\ (-1,1);\ \left(0,\frac{2}{5}\sqrt{5}\right);\ (\sqrt{5}-1,0)$

27) Centro in $C(-4,2)$, un fuoco in $F(0,2)$, passaggio per $P(-1,3)$

28) Un fuoco in $F(1,0)$, due vertici opposti in $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ e $\left(\frac{1}{2},1\right)$

29) Fuochi in $F_1(1,-3)$ ed $F_2(1,1)$, passante per $P\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$

30) *Da quali punti è formato il grafico delle curve seguenti?*
a) $x^2+y^2-2x+1=0$ b) $x^2+y^2-2x+3=0$ c) $x^2+y^2+4x-8y+20=0$

RISPOSTE

2) $C(2,1)$ $\begin{matrix} a=5 & (-3,1)\ (7,1) \\ b=3 & (2,-2)\ (2,4) \end{matrix}$ $F_1(-2,1),\ F_2(6,1);\ 2k=10;\ e=\frac{4}{5}$

3) $C(-7,0)$ $\begin{matrix} a=9 & (-16,0)\ (2,0) \\ b=15 & (-7,\pm 15) \end{matrix}$ $F_1(-7,-12),\ F_2(-7,12);\ 2k=30;\ e=\frac{4}{5}$

4) $C(1,-10)$ $\begin{matrix} a=5 & (-4,-10)\ (6,-10) \\ b=4 & (1,-14)\ (1,-6) \end{matrix}$ $F_1(-2,-10),\ F_2(4,-10);\ 2k=10;\ e=\frac{3}{5}$

5) $C\left(-\frac{5}{2},3\right)$ $\begin{matrix} a=\frac{1}{2} & (-3,3)\ (-2,3) \\ b=1 & \left(-\frac{5}{2},2\right)\ \left(-\frac{5}{2},4\right) \end{matrix}$ $F_1\left(-\frac{5}{2},3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ F_2\left(-\frac{5}{2},3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ 2k=2;\ e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $C(\sqrt{2},0)$ $\begin{matrix} a=3 & (\sqrt{2}-3,0)\ (\sqrt{2}+3,0) \\ b=2 & (\sqrt{2},-2)\ (\sqrt{2},2) \end{matrix}$ $F_1(\sqrt{2}-\sqrt{5},0),\ F_2(\sqrt{2}+\sqrt{5},0);\ 2k=6;\ e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

7) $C(2,-2)$ $\begin{matrix} a=2 & (0,-2)\ (4,-2) \\ b=\frac{6}{5} & \left(2,-\frac{16}{5}\right)\ \left(2,-\frac{4}{5}\right) \end{matrix}$ $F_1\left(\frac{2}{5},-2\right),\ F_2\left(\frac{18}{5},-2\right);\ 2k=4;\ e=\frac{4}{5}$

8) $\frac{(x-5)^2}{2}+(y+3)^2=1$ 9) $\frac{(x-3)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ 10) $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 11) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

12) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ 13) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$ 14) $\frac{x^2}{36}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4}=1$ 15) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

16) $\frac{(x+4)^2}{3}+(y-5)^2=1$ 17) $\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{3}+y^2=1$ 18) $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{\frac{144}{25}}=1$ 19) $\frac{(x+\sqrt{3})^2}{2}+y^2=1$

20) $\frac{(x-2)^2}{9}+(y+4)^2=1$ 21) $\frac{(x+7)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{12}=1$ 22) $\frac{(x-6)^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 23) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

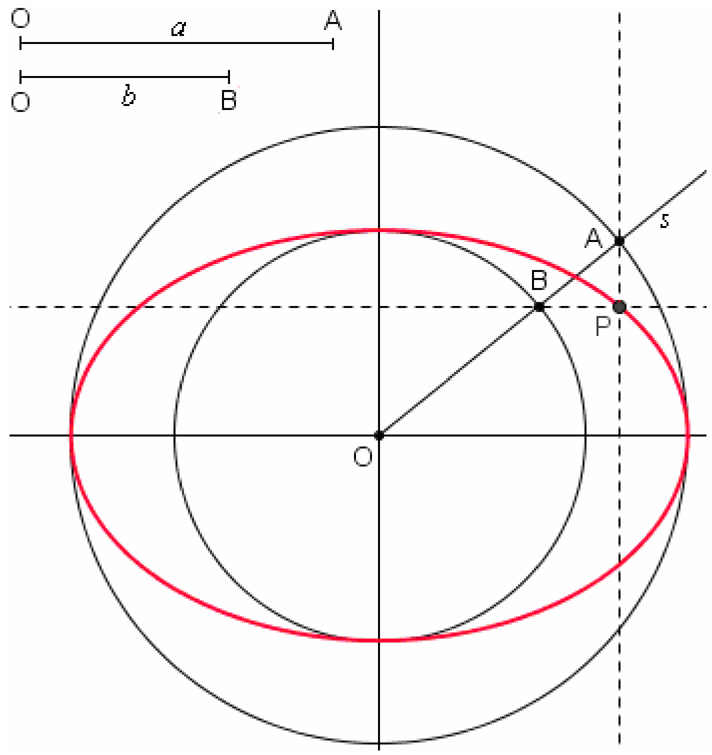
24) $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$ 25) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$ 26) $x^2+5y^2+2x=4$ 27) $\frac{(x+4)^2}{18}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

28) $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}}+y^2=1$ 29) $(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{5}=1$ 30) a) Dal solo punto $(1,0)$
b) E' il luogo vuoto
c) Dal solo punto $(-2,4)$

ESERCIZI MOLTO BELLI MA DIFFICILI (trovi le risoluzioni dei primi tre da pag. 110)

1) Disegnare un'ellisse utilizzando due circonferenze concentriche

Traccia la circonferenza
di centro l'origine e raggio a,
poi un'altra circonferenza di centro l'origine
ma di raggio b diverso da a.
Se ora conduci dall'origine
una semiretta s che intersechi
la circonferenza di raggio a in A
e quella di raggio b in B,
e indichi con P l'intersezione
fra la parallela all'asse y per A
e la parallela all'asse x per B,
IL LUOGO DELLE POSIZIONI DI P
SARÀ UN'ELLISSE!!!



Giustificare questa affermazione
è molto semplice
se si hanno nozioni di *goniometria*.

Ma senza coinvolgere la goniometria,
ci si può ugualmente riuscire
ricavando l'equazione del luogo
innanzitutto in forma "**parametrica**",
per poi passare **successivamente**
alla forma "**cartesiana**".

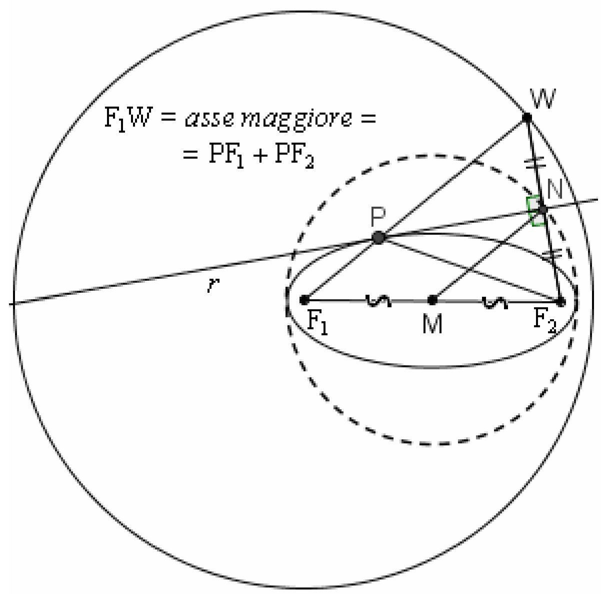
Si calcoleranno le coordinate di A e di B attraverso l'intersezione fra la retta $y = mx$ e le due circonferenze,
poi se ne dedurranno le coordinate di P (che conterranno il parametro *m*) e infine si eliminerà *m*
fra le due equazioni $x = ...,\ y = ...$ ottenute.

Ci vuoi provare?

2a) Costruzione della tangente a un'ellisse in un suo punto
2b) Podaria di un'ellisse rispetto a un fuoco

Ecco **un metodo per tracciare**
la tangente ad un'ellisse in un suo punto P.

I. Con centro in un fuoco F_1 si traccia la circonferenza avente *raggio uguale all'asse maggiore dell'ellisse* (quindi anche alla "somma costante" $PF_1 + PF_2$);
II. poi si congiunge F_1 con P e si prolunga tale congiungente fino ad incontrare la circonferenza in un punto W;
III. infine si traccia l'asse r di WF_2.



Tale asse passerà per P
(P è infatti equidistante dagli estremi di WF_2,
perché $PW = F_1W - PF_1 = (PF_1 + PF_2) - PF_1 = PF_2$)
e sarà la tangente cercata, come si dimostra (**provaci**!)
prendendo, sull'asse r, un altro punto P' distinto da P
e facendo vedere che esso *non può* appartenere all'ellisse.

(*Per questa dimostrazione, basta la vecchia geometria "sintetica", ossia senza coordinate*)

Definizione - Si dice PODARIA (NOTA) **di una curva rispetto a un punto (detto *polo*)**
il luogo geometrico delle proiezioni di quel punto sulle rette tangenti alla curva.

NOTA : "podària", con l'accento sulla prima "a": ossia "curva dei *piedi*, curva delle *proiezioni*"

A partire dalla figura, ti chiedo di giustificare, ancora con la geometria "sintetica", che:
"**In un'ellisse, la PODARIA DI UN FUOCO è la circonferenza avente per diametro l'asse maggiore**"

Indicazioni per la dimostrazione: detti M, N *i punti medi di* F_1F_2 *e di* WF_2, *considera la congiungente* MN …

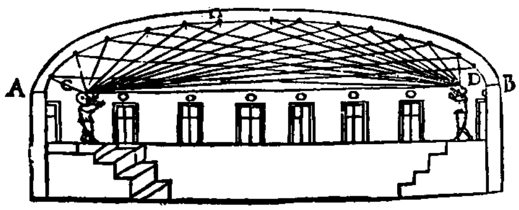
3) Proprietà focale dell'ellisse in relazione alla riflessione della luce

Una proprietà notevole dei fuochi di un'ellisse consiste nel fatto che la normale all'ellisse in un suo punto
(si dice "normale" la perpendicolare alla tangente)
divide per metà l'angolo formato dai segmenti che uniscono questo punto con i due fuochi.

Di conseguenza un raggio di luce che parta da uno dei fuochi e colpisca l'ellisse, verrà riflesso nell'altro fuoco.

Lo stesso vale per le onde sonore:
se si bisbiglia in un fuoco di una camera a volta ellittica (NOTA),
le onde sonore si rifletteranno sulla volta e andranno a concentrarsi tutte nell'altro fuoco,
dove potranno essere udite distintamente da una persona che occupi quella postazione.
Le altre persone nella stanza non sentiranno nulla! Ideale per spettegolare!!!

NOTA
… tale cioè che il soffitto sia un pezzo di "ellissoide di rotazione", ossia abbia la forma che si otterrebbe ruotando un'ellisse intorno ad un suo asse, in questo caso l'asse non contenente i fuochi. Vedi figura qui a fianco, tratta dal sito della mostra virtuale "Oltre il compasso".

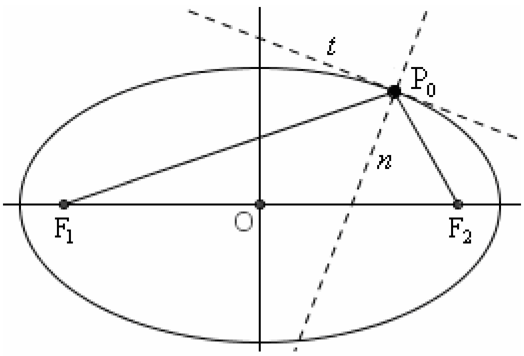


Vuoi provare a dimostrare questa proprietà?

Ai fini dimostrativi, l'ellisse è collocata in un riferimento cartesiano, in posizione "canonica".

Vedi figura qui a fianco: t è la tangente all'ellisse in un suo punto P_0, *n è la normale in* P_0.

Si tracciano le congiungenti $\mathrm{P}_0\mathrm{F}_1$ *e* $\mathrm{P}_0\mathrm{F}_2$ *e, a prezzo di impegnativi calcoli, si fa vedere che, scrivendo l'equazione della bisettrice dell'angolo* $\mathrm{F}_1\hat{\mathrm{P}}_0\mathrm{F}_2$, *si ottiene l'equazione della normale in* P_0.



4) Siano A, B due punti fissati, e $r > \mathrm{AB}$ un segmento.
Dimostra che *il luogo dei centri C delle circonferenze che passano per B e sono tangenti alla circonferenza di centro A e raggio r, è un'ellisse avente per fuochi A e B.*

5) Dimostra che, data una circonferenza γ di centro O e un punto A interno ad essa,
il luogo dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti da γ *e da A è un'ellisse.*
Dove si trovano i fuochi di questa ellisse?

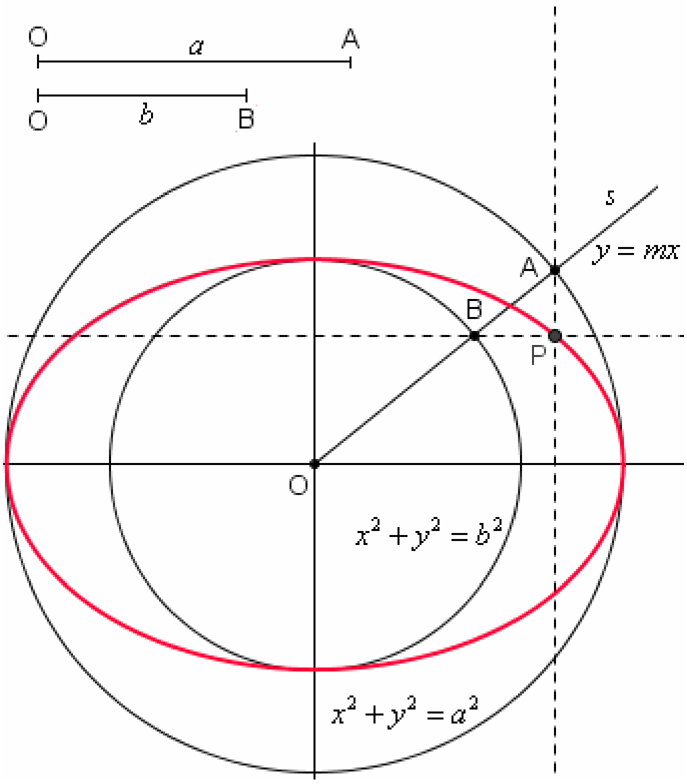
6) Data un'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, giustifica rigorosamente la seguente affermazione:
preso un punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$

- ♪ *se esso è interno all'ellisse, allora* $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$;
- ♫ *se invece è esterno, si ha* $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

7) Data un'ellisse di costante (= somma costante) $2a$, giustifica rigorosamente la seguente affermazione:
i punti P_0 *tali che* $\mathrm{P}_0\mathrm{F}_1+\mathrm{P}_0\mathrm{F}_2<2a$ *sono interni all'ellisse; quelli per cui* $\mathrm{P}_0\mathrm{F}_1+\mathrm{P}_0\mathrm{F}_2>2a$ *le sono esterni.*

RISOLUZIONI

1) Disegnare un'ellisse utilizzando due circonferenze concentriche



$$\mathrm{A}:\begin{cases} y=mx \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

$$x^2+m^2x^2=a^2;\quad (1+m^2)x^2=a^2$$

$$x^2=\frac{a^2}{1+m^2}$$

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{1+m^2}}=\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}} \\ y=mx=\pm\dfrac{ma}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

e allo stesso modo

$$\mathrm{B}:\begin{cases} y=mx \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases}\ \ldots \begin{cases} x=\pm\dfrac{b}{\sqrt{1+m^2}} \\ y=\pm\dfrac{mb}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

Dunque il punto P della figura
(che è poi il generico punto della curva
che ci interessa) ha coordinate date da:

$$x_P=x_A=\pm\frac{a}{\sqrt{1+m^2}};\quad y_P=y_B=\pm\frac{mb}{\sqrt{1+m^2}}$$

dove valgono o i due segni + contemporaneamente, oppure i due segni – contemporaneamente.

Le equazioni $\begin{cases} x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}} \\ y=\pm\dfrac{mb}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$ sono le equazioni *parametriche* del luogo.

Passiamo ora all'equazione *cartesiana*, risolvendo rispetto al parametro m e sostituendo.
Innanzitutto, allo scopo di isolare il parametro,
conviene dividere membro a membro le due equazioni, ottenendo

$$\frac{y}{x}=\frac{mb}{a}\to m=\frac{ay}{bx}$$

Dopodiché potremo scrivere

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{1+\left(\dfrac{ay}{bx}\right)^2}}\qquad x^2=\frac{a^2}{1+\dfrac{a^2y^2}{b^2x^2}}\qquad x^2=\frac{a^2}{\dfrac{b^2x^2+a^2y^2}{b^2x^2}}\qquad x^2=\frac{a^2b^2x^2}{b^2x^2+a^2y^2}$$

Possiamo a questo punto semplificare per x^2
(osserviamo per l'occasione che i passaggi precedenti erano effettuabili solo supponendo $x\neq 0$;
vedremo in che modo l'ascissa nulla, per ora provvisoriamente esclusa
allo scopo di poter effettuare determinati passaggi algebrici, sia "recuperabile" alla fine),
ottenendo:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

che, divisa per a^2b^2, fornisce

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ **ellisse "canonica" di semiassi *a, b*.**

Avevamo escluso dalla nostra considerazione l'ascissa 0; possiamo ora osservare che
i punti P di ascissa 0 ottenibili con la costruzione descritta
(semiretta condotta dall'origine … intersezioni di questa con le due circonferenze … $x_P=x_A,\ y_P=y_B$)
sono i due punti $(0,\pm b)$, che risultano anch'essi soddisfare all'equazione ottenuta.

Dunque effettivamente la $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ è l'equazione del luogo in questione.

2a) Costruzione della tangente a un'ellisse in un suo punto

Ecco **un metodo per tracciare la tangente ad un'ellisse in un suo punto P**.

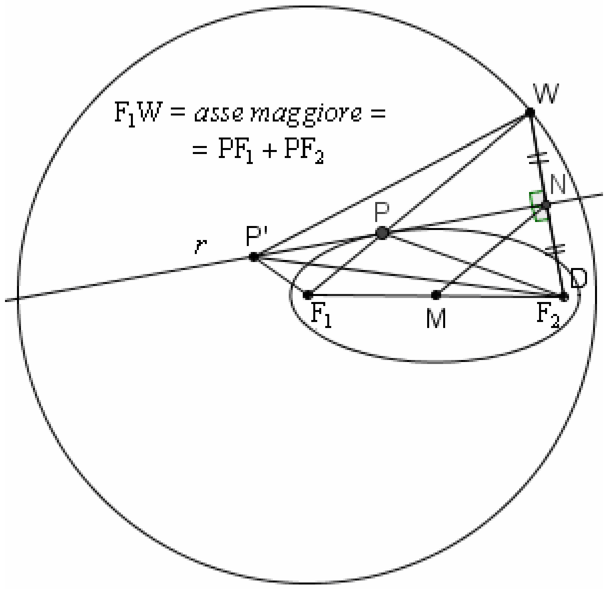
I. Con centro in un fuoco F_1 si traccia la circonferenza avente raggio uguale all'asse maggiore dell'ellisse (quindi anche alla "somma costante" PF_1+PF_2);
II. poi si congiunge F_1 con P e si prolunga tale congiungente fino ad incontrare la circonferenza in un punto W;
III. infine si traccia l'asse r di WF_2.

Tale asse passerà per P
(P è infatti equidistante dagli estremi di WF_2, perché $PW = F_1W - PF_1 = (PF_1+PF_2) - PF_1 = PF_2$)
e sarà la tangente cercata, come si dimostra (**provaci**!) prendendo, sull'asse, un altro punto P' distinto da P e facendo vedere che esso *non può* appartenere all'ellisse.

Preso sull'asse r di WF_2 un punto P' distinto da P, avremo:
$P'F_1 + P'F_2 = P'F_1 + P'W$
(infatti $P'F_2 = P'W$ perché P' appartiene all'asse di WF_2, e i punti dell'asse di un segmento sono equidistanti dagli estremi del segmento stesso).

Ma $P'F_1 + P'W > F_1W$
(per la "disuguaglianza triangolare" su $P'F_1W$: in un triangolo, ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due), quindi
$P'F_1 + P'F_2 > F_1W = PF_1 + PF_2$.

Poiché la somma $P'F_1 + P'F_2$ NON e' uguale alla costante PF_1+PF_2 dell'ellisse, P' non può appartenervi, c.v.d.



2b) Podaria di un'ellisse rispetto a un fuoco

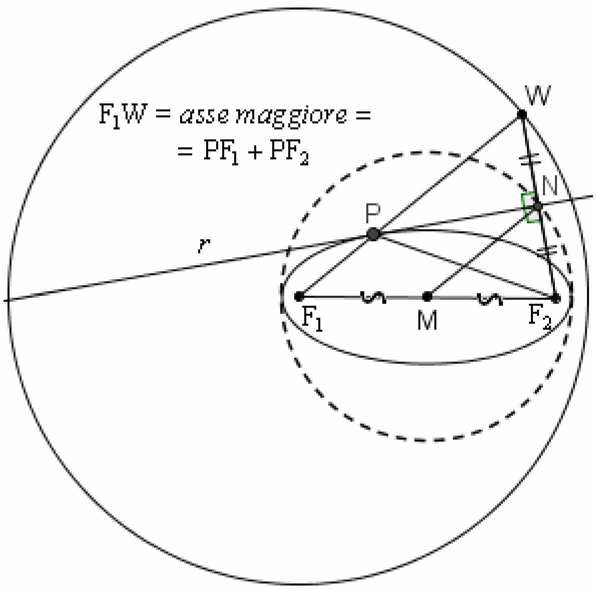
Si dice PODARIA di una curva rispetto a un punto (detto *polo*),
il luogo geometrico delle proiezioni di quel punto sulle rette tangenti alla curva.
Dimostra che
"**In un'ellisse, la PODARIA DI UN FUOCO è la circonferenza avente per diametro l'asse maggiore**"

Nella figura compaiono (vedi il precedente esercizio 2a) la tangente r ad un'ellisse in un suo punto P, costruita come asse del segmento WF_2, e la proiezione N del fuoco F_2 su tale tangente.

Detti M, N i punti medi dei segmenti F_1F_2 e WF_2 rispettivamente, avremo che il segmento MN, in quanto congiungente i punti medi di due lati del triangolo F_1F_2W, è uguale alla metà del terzo lato F_1W.

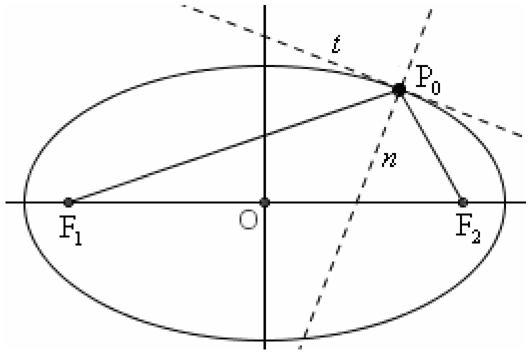
Ma F_1W ha lunghezza costante al variare di P: dunque anche MN, al variare di P, ha lunghezza costante.

E perciò il punto N, al variare di P, descrive una circonferenza di centro M e raggio uguale alla metà di F_1W, quindi diametro uguale a F_1W = *asse maggiore dell'ellisse*.



3) Proprietà focale dell'ellisse in relazione alla riflessione della luce

Il nostro obiettivo è di far vedere che se si prende un qualsivoglia punto $P_0(x_0, y_0)$ dell'ellisse e si considerano le due congiungenti P_0F_1 e P_0F_2,
la normale n all'ellisse in P_0 coincide con la bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}_0F_2$.



Utilizzando la "regola degli sdoppiamenti",
scriviamo innanzitutto l'equazione della retta tangente all'ellisse in $P_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$$

$$y=\frac{a^2b^2-b^2x_0x}{a^2y_0};\quad y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x+\frac{b^2}{y_0}$$

Perciò, indicato con m_t il coefficiente angolare della retta *tangente*, avremo:

$$m_t=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

e di conseguenza, detto m_n il coefficiente angolare della *normale* all'ellisse in P_0, sarà

$$m_n=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$$

Scriviamo ora l'equazione della normale n in P_0:

$$n:\quad y-y_0=m_n(x-x_0)$$

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

$$\boxed{y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{a^2y_0}{b^2}+y_0}$$

Ora scriviamo le equazioni delle due rette P_0F_1 e P_0F_2;
successivamente potremo determinare l'equazione della bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}_0F_2$.

Retta P_0F_1, con $F_1(-c,0)$ e $P_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x+c}{x_0+c}=\frac{y}{y_0}$$

$$y_0(x+c)=y(x_0+c)$$

$$y_0x+cy_0=x_0y+cy$$

$$y_0x-x_0y-cy+cy_0=0$$

$$\boxed{y_0x-y(x_0+c)+cy_0=0}$$

Retta P_0F_2, con $P_0(x_0, y_0)$ e $F_2(c,0)$:

$$\frac{x-c}{x_0-c}=\frac{y}{y_0}$$
$$y_0(x-c)=y(x_0-c)$$
$$y_0x-cy_0=x_0y-cy$$
$$y_0x-x_0y+cy-cy_0=0$$
$$\boxed{y_0x-y(x_0-c)-cy_0=0}$$

Equazione della bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}_0F_2$ individuato da P_0F_1 e P_0F_2:

$$bisettrice=\left\{P(x,y)/\ d\left(P,\,P_0F_1\right)=d\left(P,\,P_0F_2\right)\right\}$$
$$\frac{|y_0x-y(x_0+c)+cy_0|}{\sqrt{y_0{}^2+(x_0+c)^2}}=\frac{|y_0x-y(x_0-c)-cy_0|}{\sqrt{y_0{}^2+(x_0-c)^2}}$$

dove possiamo osservare che i denominatori coincidono con le distanze P_0F_1 e P_0F_2 rispettivamente.
Sciogliendo il valore assoluto avremo

$$\frac{y_0x-y(x_0+c)+cy_0}{\sqrt{y_0{}^2+(x_0+c)^2}}=\pm\frac{y_0x-y(x_0-c)-cy_0}{\sqrt{y_0{}^2+(x_0-c)^2}}$$

e, fra le due rette bisettrici dei due angoli opposti al vertice formati dalle rette P_0F_1 e P_0F_2, andiamo a considerare quella ottenibile utilizzando il segno $-$.
Inoltre, per opportunità di calcolo, cambiamo di segno entrambi i numeratori. Dunque:

$$\frac{y(x_0+c)-y_0x-cy_0}{P_0F_1}=-\frac{y(x_0-c)-y_0x+cy_0}{P_0F_2}$$
$$P_0F_2\cdot y(x_0+c)-P_0F_2\cdot y_0x-P_0F_2\cdot cy_0=-P_0F_1\cdot y(x_0-c)+P_0F_1\cdot y_0x-P_0F_1\cdot cy_0$$
$$P_0F_2\cdot x_0y+P_0F_2\cdot cy-P_0F_2\cdot y_0x-P_0F_2\cdot cy_0=-P_0F_1\cdot x_0y+P_0F_1\cdot cy+P_0F_1\cdot y_0x-P_0F_1\cdot cy_0$$
$$x_0y(P_0F_2+P_0F_1)+cy(P_0F_2-P_0F_1)-y_0x(P_0F_2+P_0F_1)-cy_0(P_0F_2-P_0F_1)=0$$

Moltiplichiamo ora tutto per $P_0F_2+P_0F_1$ e otterremo, tenendo conto che

$$\left(P_0F_2+P_0F_1\right)^2=(2a)^2=4a^2 \quad \text{e} \quad P_0F_2{}^2-P_0F_1{}^2=-4cx_0 \ ,$$

l'equazione

$$4a^2x_0y-4c^2x_0y-4a^2y_0x+4c^2x_0y_0=0 \qquad x_0y(a^2-c^2)-a^2y_0x+c^2x_0y_0=0$$
$$x_0y(a^2-c^2)=a^2y_0x-c^2x_0y_0$$

Ricordando ora che

$$a^2-c^2=b^2$$

potremo scrivere:

$$b^2x_0y=a^2y_0x-c^2x_0y_0; \quad y=\frac{a^2y_0x-c^2x_0y_0}{b^2x_0}; \quad y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{c^2}{b^2}y_0$$

Utilizziamo la relazione $c^2=a^2-b^2$ e avremo:

$$y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{(a^2-b^2)y_0}{b^2}$$
$$\boxed{y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x-\frac{a^2y_0}{b^2}+y_0}$$

Ma l'ultima equazione scritta
(che è, ricordiamolo ancora, l'equazione della bisettrice dell'angolo formato dalle due rette P_0F_1 e P_0F_2)
risulta coincidere con l'equazione della normale all'ellisse in P_0 da noi determinata all'inizio!

L'asserto è perciò dimostrato.