

## 15. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

L'obiettivo di un **sistema** (di equazioni, di disequazioni, misto) è sempre di determinare per quali valori dell'incognita, o delle incognite, sono verificate **CONTEMPORANEAMENTE TUTTE** le condizioni che compongono il sistema.

**Per risolvere un sistema di disequazioni,**

**A) PRIMA SI RISOLVERA' SEPARATAMENTE OGNI SINGOLA DISEQUAZIONE;**

**B) POI si tratterà uno SCHEMA "DI INTERSEZIONE",**

che mostri in un quadro "sinottico" per quali valori è verificata ciascuna disequazione e permetta così di stabilire per quali valori sono verificate contemporaneamente tutte.

**Esempio 1:** NOTA

Due differenze fondamentali fra i sistemi di DISEQUAZIONI e i sistemi di EQUAZIONI:

$$\begin{cases} (x-4)^2 \leq x^2 \\ \frac{x-1}{x-4} \leq 0 \end{cases}$$

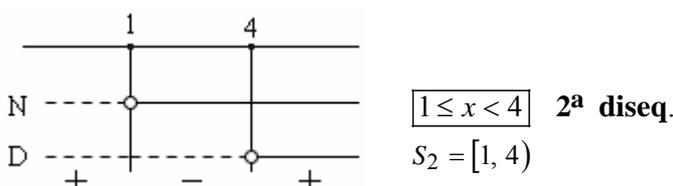
- 1) in un sistema di disequazioni abbiamo UNA SOLA incognita (disequazioni in più incognite, e sistemi con esse, si incontrano in determinati contesti, e si affrontano in generale con metodi grafici, ma noi qui non ce ne occuperemo)
- 2) in un sistema di disequazioni, queste non vengono fatte "interagire" fra loro, ma, come abbiamo detto, le si risolve separatamente, una per una.

1<sup>a</sup> disequazione:

$$(x-4)^2 \leq x^2 \quad x^2 - 8x + 16 \leq x^2 \quad -8x \leq -16 \quad 8x \geq 16 \quad \boxed{x \geq 2} \quad \text{1<sup>a</sup> diseq.} \quad S_1 = [2, +\infty)$$

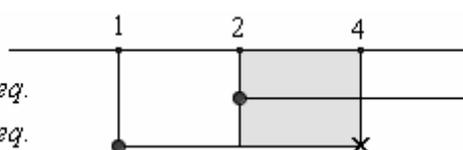
2<sup>a</sup> disequazione:

$$\frac{x-1}{x-4} \leq 0 \quad \begin{array}{l} N > 0 \quad x-1 > 0 \quad x > 1 \\ D > 0 \quad x-4 > 0 \quad x > 4 \end{array}$$



**SCHEMA DI SISTEMA**  
(= SCHEMA DI INTERSEZIONE):

1<sup>a</sup> diseq.  
2<sup>a</sup> diseq.



**SOLUZIONI DEL SISTEMA:**

$$\boxed{2 \leq x < 4}$$

$$S = S_1 \cap S_2 = [2, 4)$$

### ♥ SIMBOLOGIA IN UNO SCHEMA DI SISTEMA:

linea continua, pallino pieno  
DISEQUAZIONE VERIFICATA  
nessuna linea, crocetta di esclusione  
DISEQUAZIONE NON VERIFICATA

Uno schema di sistema è anche chiamato "schema di intersezione": infatti l'insieme S delle soluzioni del sistema costituisce l'intersezione fra gli insiemi  $S_1, S_2, \dots$  delle soluzioni delle singole condizioni che compongono il sistema.

**Esempio 2:**

$$\begin{cases} (x-1)^4 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \\ (x-2)^3 \leq 0 \end{cases}$$

1<sup>a</sup> disequazione:

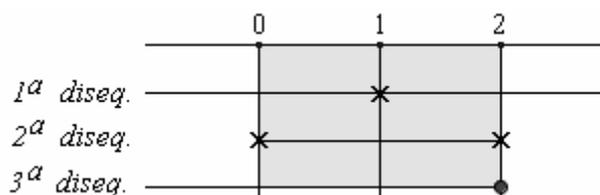
$$(x-1)^4 > 0 \quad x \neq 1$$

2<sup>a</sup> disequazione:

$$x^2 - 2x < 0 \quad x(x-2) < 0 \quad 0 < x < 2$$

3<sup>a</sup> disequazione:

$$(x-2)^3 \leq 0 \quad x-2 \leq 0 \quad x \leq 2$$



**SOLUZIONI SISTEMA:**

$$\boxed{0 < x < 2 \text{ ma } x \neq 1}$$

In forma insiemistica:

$$S_1 = \mathbb{R} - \{1\} \text{ opp. } (-\infty, +\infty) - \{1\} \text{ opp. } (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$S_2 = (0, 2)$$

$$S_3 = (-\infty, 2]$$

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (0, 2) - \{1\} \text{ oppure } (0, 1) \cup (1, 2)$$

## OSSERVAZIONI UTILI

- Se, nell'ambito di un sistema, si nota che **due delle condizioni sono "INCOMPATIBILI"** fra loro, ossia: **non possono essere verificate contemporaneamente**, allora si può immediatamente concludere che **il sistema è impossibile**.

Es. 
$$\begin{cases} x > 6 \\ 1 < x < 8 \\ x < 4 \end{cases}$$
 *La prima e la terza condizione sono in contraddizione fra loro, sono incompatibili: non c'è alcun valore di  $x$  che le possa soddisfare entrambe simultaneamente. Il sistema è impossibile.*

- La presenza anche di una sola condizione **IMPOSSIBILE**, rende impossibile tutto il sistema.

Es. 
$$\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ x^2 > 8x + 7 \\ x^2 + 1 < 0 \end{cases}$$
 *Si vede subito che la terza condizione è impossibile. Non perdiamo tempo: il sistema è impossibile.*

- Invece una condizione **SEMPRE VERIFICATA** ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) non pone alcun vincolo all'incognita, e di conseguenza è **irrilevante nell'ambito del sistema: essa può essere, volendo, eliminata** (se comunque la si tiene, nello schema finale ad essa corrisponderà una linea continua di "condizione sempre verificata", e tale linea continua sarà, ovviamente, ininfluenta).

Es. 
$$\begin{cases} x^2 > 9 \\ 3(x+1) > 4(x-1) \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases}$$
 *Si vede subito che la terza condizione è sempre verificata. Essa è allora irrilevante: se vogliamo, possiamo eliminarla dal sistema, e le soluzioni di questo non cambieranno.*

- Sovente lo "schema di intersezione" è **superfluo**, perché (almeno in situazioni semplici) può essere **rimpiazzato da considerazioni elementari, che si possono fare a mente**.

♪ Ad esempio, è subito evidente che il sistema  $\begin{cases} x > 2 \\ x < 5 \end{cases}$  ha come soluzioni:  $2 < x < 5$

- ♪ **FRA DUE O PIÙ CONDIZIONI "EQUIVERSE", PREVALE LA PIÙ RESTRITTIVA**, ossia quella che lascia all'incognita minore "libertà":

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 4 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x > 7$$
 *Fra le tre condizioni con lo stesso verso, la più "restrittiva", quella che lascia meno libertà a  $x$ , è la  $x > 7$ , che "obbliga"  $x$  a stare "a destra del 7". Ciascuna delle altre due lascia a disposizione di  $x$  un piccolo spazio in più.*

$$\begin{cases} x > 0 & * \\ x < 2 & ** \\ x > 1 & * \\ x < 3 & ** \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 & * \\ x < 2 & ** \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

## DISEQUAZIONI SU INTERNET

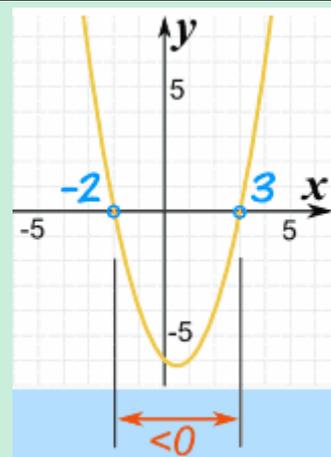
♪ Dal sito [www.themathpage.com](http://www.themathpage.com) del professor [Lawrence Spector](#):

**INEQUALITIES** ⇨

(The number line, "Or" versus "and", ... , Solving inequalities)

♪ Dal sito [www.mathsisfun.com](http://www.mathsisfun.com)

(da cui è tratta l'immagine qui a fianco):

**SOLVING QUADRATIC INEQUALITIES** ⇨

## ESERCIZI SUI SISTEMI DI DISEQUAZIONI

1)  $\begin{cases} x^2 < 3x \\ 2x \geq x+2 \end{cases}$     2)  $\begin{cases} \frac{x-5}{x+5} < 0 \\ x^2 \leq x(x+1) \end{cases}$     3)  $\begin{cases} x^2 < 2x-3 \\ x^2 < 3x-2 \end{cases}$     4)  $\begin{cases} x^2 > x+6 \\ 3(x-1) < 3x-2 \end{cases}$     5)  $\begin{cases} \frac{2x-5}{x-1} \geq 1 \\ 7x \geq x^2 \end{cases}$     6)  $\begin{cases} x^2 > x+2 \\ \frac{x-7}{x} \leq 0 \end{cases}$

7)  $\begin{cases} \frac{x-3}{2} < \frac{x}{3} \\ 3(x+2) < 5x \end{cases}$     8)  $\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ 2x < x+3 \end{cases}$     9)  $\begin{cases} x \leq 5 \\ x < 5 \\ x \leq 4 \\ x < 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$     10)  $\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$

11)  $\begin{cases} \frac{4-x}{x} \geq 0 \\ \frac{6-x}{2-x} \leq 0 \end{cases}$  si può riscrivere, se si preferisce, come  $\frac{4-x}{x} \geq 0$  e quindi come  $\frac{x-4}{x} \leq 0$   
 si può riscrivere, volendo, come  $\frac{x-6}{x-2} \leq 0$  perché se si cambiano simultaneamente di segno sia il numeratore che il denominatore, una frazione non varia

12)  $\begin{cases} 2x^2 < 2x+3 \\ 2x-1 > \frac{x}{3} \end{cases}$     13)  $\begin{cases} \frac{x-5}{x-1} < 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases}$     14)  $\begin{cases} 2x+1 \geq 3x-1 \\ x \leq 2(x+2) \\ x^2+3x < 10 \end{cases}$     15)  $\begin{cases} \frac{3x-4}{x-6} \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x} \leq 0 \end{cases}$     16)  $\begin{cases} x^4 > 2x^3 \\ \frac{x^3-4}{x^4-4} < 0 \end{cases}$

17)  $\begin{cases} 16x^4+3 > 0 \\ 16x^4-3 \geq 0 \\ 3x^4+16 > 16x^2 \\ \frac{1}{x^2} \geq 0 \end{cases}$     18)  $\begin{cases} \frac{x-3}{7-x} \leq 0 \\ \frac{4x}{x+4} \leq 0 \end{cases}$     19)  $\begin{cases} 8x^6-7x^3-1 > 0 \\ x^4(16x^4+15) \geq 1 \end{cases}$     20)  $\begin{cases} 2x^2+3 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \\ 2x < 2x^2+4 \end{cases}$     21)  $\begin{cases} x^2+2 \geq 3x \\ 1 \geq \frac{x}{2} \\ 2x^2+1 > x \end{cases}$

## SOLUZIONI

1)  $\boxed{2 \leq x < 3}$     2)  $\boxed{0 \leq x < 5}$     3)  $\boxed{\text{imposs.}}$     4)  $\boxed{x < -2 \vee x > 3}$     5)  $\boxed{0 \leq x < 1 \vee 4 \leq x \leq 7}$     6)  $\boxed{2 < x \leq 7}$

7)  $\boxed{\begin{matrix} 3 < x < 9 \\ S = (3, 9) \end{matrix}}$     8)  $\boxed{\begin{matrix} x \leq -2 \vee 2 \leq x < 3 \\ S = (-\infty, -2] \cup [2, 3) \end{matrix}}$     9)  $\boxed{1 \leq x < 4}$     10)  $\boxed{x \geq 1}$

11)  $\boxed{2 < x \leq 4}$     12)  $\boxed{\frac{3}{5} < x < \frac{1+\sqrt{7}}{2}}$     13)  $\boxed{3 < x < 5}$     14)  $\boxed{-4 \leq x < 2}$

15) 1<sup>a</sup> diseq.:  $-1 \leq x < 6$      $S_1 = [-1, 6)$     16) 1<sup>a</sup> diseq.:  $x < 0 \vee x > 2$   
 2<sup>a</sup> diseq.:  $x \leq -1 \vee 0 < x \leq 1$      $S_2 = (-\infty, -1] \cup (0, 1]$     2<sup>a</sup> diseq.:  $x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < \sqrt[3]{4}$   
 Sistema:  $\boxed{\begin{matrix} x = -1 \vee 0 < x \leq 1 \\ S = S_1 \cap S_2 = \{-1\} \cup (0, 1] \end{matrix}}$     Sistema:  $\boxed{\begin{matrix} x < -\sqrt{2} \\ S = (-\infty, -\sqrt{2}) \end{matrix}}$

17) 1<sup>a</sup> diseq.:  $\forall x \in \mathbb{R}$     2<sup>a</sup> diseq.:  $x \leq -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$     18) 1<sup>a</sup> diseq.:  $x \leq 3 \vee x > 7$   
 3<sup>a</sup> diseq.:  $x < -2 \vee -\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}} \vee x > 2$     4<sup>a</sup> diseq.:  $x \neq 0$     2<sup>a</sup> diseq.:  $-4 < x \leq 0$   
 Sistema:  $\boxed{S = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right) \cup \left[\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup (2, +\infty)}$     Sistema:  $\boxed{-4 < x \leq 0: S = (-4, 0]}$

19) 1<sup>a</sup> diseq.:  $x < -\frac{1}{2} \vee x > 1$     20)  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$     21)  $\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ x \leq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$   
 2<sup>a</sup> diseq.:  $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}$     Sistema:  $\boxed{\begin{matrix} x < -\frac{1}{2} \vee x > 1 \\ S = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{matrix}}$     Sistema:  $\boxed{\begin{matrix} x \neq 2 \\ S = \mathbb{R} - \{2\} = \\ = (-\infty, +\infty) - \{2\} = \\ = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \end{matrix}}$     Sistema:  $\boxed{S = (-\infty, 1] \cup \{2\}}$