13. DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

Esempio 1: $\boxed{2\left(x^3+5x+4\right)<11x^2}$

Innanzitutto svolgiamo i calcoli e portiamo tutto a 1° membro, in modo che il 2° membro sia 0

$$2x^3+10x+8<11x^2$$
$$2x^3-11x^2+10x+8<0$$

Ora SCOMPONIAMO il 1° membro IN FATTORI, ciascuno dei quali dovrà essere:

- **di 1° grado**
- **oppure di 2° grado**
- **o comunque tale che il suo segno si possa studiare agevolmente**

$$\underbrace{(x-2)}_{1°\ fatt.}\underbrace{\left(2x^2-7x-4\right)}_{2°\ fatt.}<0 \quad (\textit{la scomposizione è stata effettuata qui col metodo di Ruffini})$$

Dalla disequazione ottenuta ci viene rivolta dunque la seguente richiesta:
dimmi, caro solutore, per quali valori di x il prodotto che sta a primo membro risulta <0 !

Ora, il segno di un prodotto dipende dalla combinazione dei segni dei suoi fattori:

- un prodotto è *positivo* se tutti i fattori sono positivi, oppure se si ha un numero pari di fattori negativi
- un prodotto è *negativo* se presenta un solo fattore negativo, oppure un numero dispari di fattori negativi
- sempre tenendo presente, s'intende, che se anche uno solo dei fattori è nullo, allora il prodotto è *nullo*.

Dovremo quindi STUDIARE IL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE,
per stabilire per quali valori di x esso è positivo, per quali nullo, per quali negativo;

dopodiché, utilizzeremo un semplice SCHEMA PER IL CONFRONTO DEI SEGNI, che
darà un quadro "sinottico" degli studi effettuati e ci permetterà, finalmente, di trarre le conclusioni.

Diciamo subito che il modo più comodo per studiare il segno di un'espressione contenente x
è quello di impostare la disequazione

$$\boxed{espressione>0},$$

finalizzata a stabilire per quali valori di x l'espressione data è, appunto, >0; risolta questa, sarà poi
del tutto immediato stabilire, "per esclusione", per quali valori di x l'espressione è <0 e per quali è $=0$.

Procediamo, dunque!

$\boxed{1°\ fatt.>0}$ $\quad x-2>0$; $\boxed{x>2}$

Abbiamo così stabilito che l'espressione $x-2$ è positiva quando $x>2$.
In questo modo, ovviamente, sappiamo anche che l'espressione $x-2$ sarà:

- negativa per $x<2$,
- nulla per $x=2$

$\boxed{2°\ fatt.>0}$ $\quad 2x^2-7x-4>0$;

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\ldots=\left\langle\begin{array}{l}-1/2\\ 4\end{array}\right.$$

$$\boxed{x<-\frac{1}{2}\vee x>4}$$

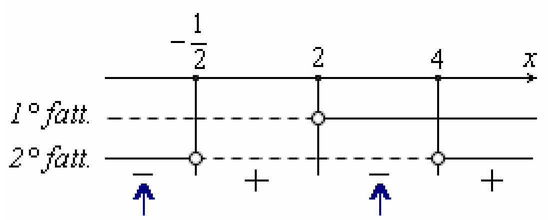
Abbiamo così stabilito che l'espressione $2x^2-7x-4$
è *positiva* quando $x<-1/2 \vee x>4$;
da ciò si trae, evidentemente, che l'espressione stessa sarà:

- *negativa* per $-1/2<x<4$
- *nulla* per $x=-1/2 \vee x=4$

Adesso che, tramite queste "disequazioni ausiliarie"
1° fatt.>0, 2° fatt.>0,
abbiamo studiato il segno di ogni singolo fattore,
possiamo costruire lo schema finale.

♥ Utilizzeremo la **SIMBOLOGIA** seguente:

LINEA CONTINUA	——	**FATTORE POSITIVO**
PALLINO VUOTO	∘	**FATTORE NULLO**
LINEA TRATTEGGIATA	- - -	**FATTORE NEGATIVO**



SOLUZIONI (NOTA): $\boxed{x<-\frac{1}{2} \;\vee\; 2<x<4}$

NOTA
Nel primo intervallo, quello dei valori di x minori di –1/2,
il 1° fatt. ha segno negativo e il 2° fatt. positivo, quindi il prodotto sarà negativo.
Analogamente, si stabilisce il segno del prodotto negli altri intervalli.
Infine, poiché il verso della disequazione è <, si scelgono quegli intervalli nei quali il prodotto risulta <0.

Esempio 2: $\boxed{x^4-6x^2+5\geq 0}$

Questa è una disequazione BIQUADRATICA.
Le disequazioni biquadratiche non fanno eccezione:
si risolvono anch'esse
SCOMPONENDO IN FATTORI

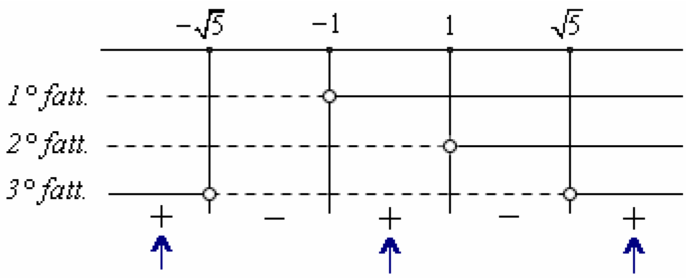
$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-5\right)\geq 0$$

$$\underbrace{(x+1)}_{1^\circ\ fatt.}\ \underbrace{(x-1)}_{2^\circ\ fatt.}\ \underbrace{\left(x^2-5\right)}_{3^\circ\ fatt.}\geq 0$$

$1^\circ\ \ fatt.>0 \qquad x+1>0 \qquad x>-1$

$2^\circ\ \ fatt.>0 \qquad x-1>0 \qquad x>1$

$3^\circ\ \ fatt.>0 \qquad x^2-5>0 \qquad x<-\sqrt{5}\ \vee\ x>\sqrt{5}$
(NOTA)



SOLUZIONI: $\boxed{x\leq-\sqrt{5}\ \vee\ -1\leq x\leq 1\ \vee\ x\geq\sqrt{5}}$

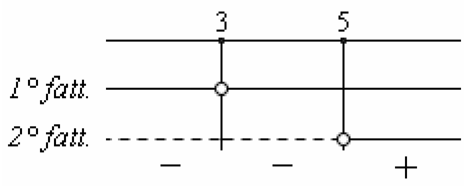
NOTA: *la disequaz.* $x^2-5>0$ *può essere risolta anche scrivendo* $x^2>5;\ |x|>\sqrt{5};\ x<-\sqrt{5}\vee x>\sqrt{5}$

♥ **Il modo migliore per risolvere una disequazione col $\geq$ o col $\leq$ (che non sia di 1° grado) è di pensare dapprima alla disequazione "stretta", cioè solo col $>$ o col $<$, poi aggiungere alle soluzioni trovate anche i valori che rendono il primo membro uguale al secondo, ossia le soluzioni dell'EQUAZIONE. Applica questa indicazione sulle ultime due disequazioni del successivo Esempio 3!**

Esempio 3: $\boxed{(x-3)^2(x-5)<0}$

$1^\circ\ \ fatt.>0 \qquad (x-3)^2>0 \qquad x\neq 3$

$2^\circ\ \ fatt.>0 \qquad x-5>0 \qquad x>5$



SOLUZIONI:

$\boxed{x<5\ \text{ma}\ x\neq 3}$

Di questo esercizio potremmo considerare le **varianti** seguenti (leggi il riquadro sottostante per le ultime due):

$\boxed{(x-3)^2(x-5)>0}$ impostazione e schema identici al caso precedente; soluzioni: $\boxed{x>5}$

$\boxed{(x-3)^2(x-5)\leq 0}$ impostazione e schema identici ai casi precedenti; soluzioni: $\boxed{x\leq 5}$

$\boxed{(x-3)^2(x-5)\geq 0}$ impostazione e schema identici ai casi precedenti; soluzioni: $\boxed{x\geq 5\ \vee\ x=3}$

Esempio 4: $\boxed{5x(x-7)(x-4)^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x-1\right)<0}$

Qui c'è innanzitutto la possibilità di **semplificare**.

Possono essere semplificati quei fattori che risultino sempre strettamente positivi (> 0); qui,

- il fattore 5 (**costante positiva**)
- e il fattore x^2+1 (che dipende da x, ma è **sempre strettamente positivo per qualsiasi valore di** x).

$$\underbrace{\cancel{5}}_{>0}\,x(x-7)(x-4)^2\underbrace{\cancel{\left(x^2+1\right)}}_{>0,\ \forall x}\left(x^2-2x-1\right)<0$$

Semplificare, infatti, vuol dire dividere,
e dividendo ambo i membri di una disuguaglianza per una quantità strettamente positiva,
il verso rimane invariato.

- **Non è lecito invece semplificare per una quantità il cui segno può essere, a seconda dei valori di x, positivo oppure negativo**: infatti la semplificazione per un numero <0 richiede di cambiare il verso, e allora, se volessimo a tutti i costi semplificare una disequazione per una quantità di segno variabile, saremmo obbligati ad addentrarci in una laboriosa distinzione di casi.
- **Osserviamo** che **il fattore $(x-4)^2$ NON può essere semplificato:**
esso è QUASI sempre strettamente positivo, ma non sempre: infatti si può annullare (per $x=4$).
Questo fattore $(x-4)^2$ ce lo dobbiamo per forza tenere: nello schema per il confronto dei segni, ad esso corrisponderà una linea continua di positività, contenente al suo interno un pallino di annullamento.

Puoi proseguire per conto tuo, ora, con la risoluzione della disequazione; vedrai che essa è verificata per:

$$\boxed{1-\sqrt{2}<x<0\ \ \vee\ \ 1+\sqrt{2}<x<7\ \ ma\ x\neq 4}$$