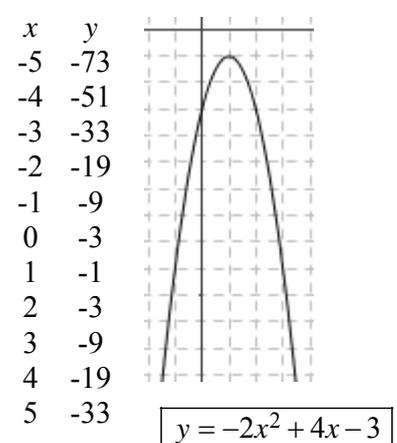
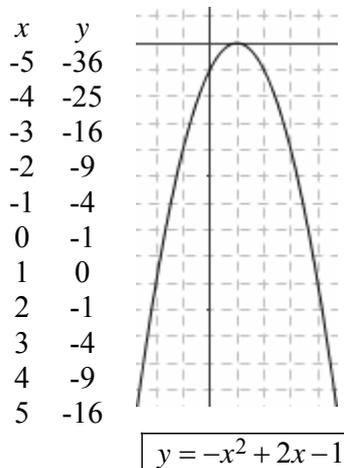
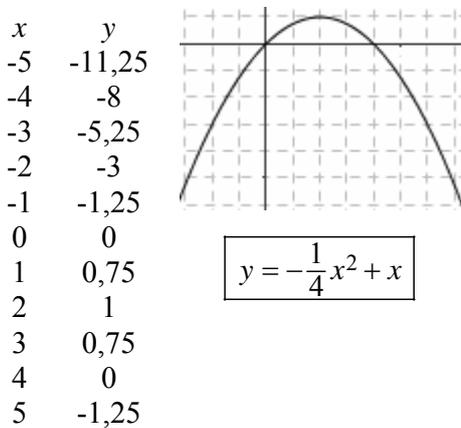
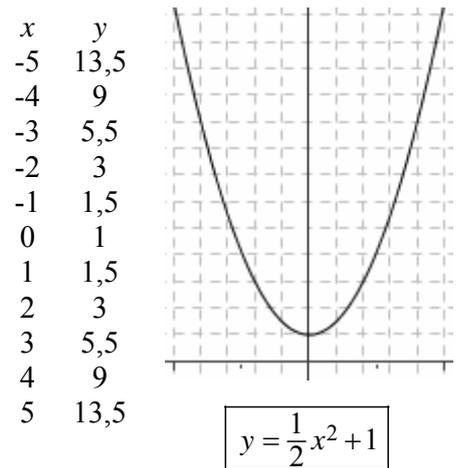
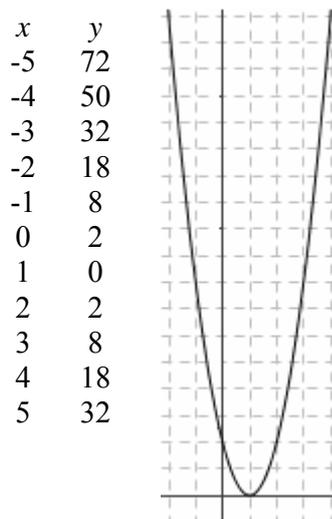
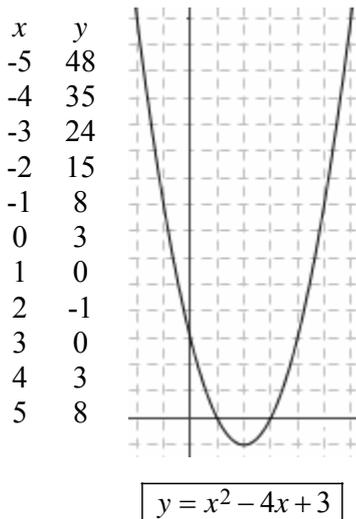


7. LO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO E LA RISOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO

“STUDIARE IL SEGNO” DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO
significa chiedersi per quali valori della variabile il trinomio

- assume valore positivo;
- si annulla;
- assume valore negativo

Ecco qui di seguito i grafici di alcuni trinomi di 2° grado, pensati come funzioni
(l'unità di misura è 1 quadretto):



Come avevamo già avuto modo di evidenziare in precedenza,
il grafico di un trinomio di 2° grado, pensato come una funzione,
è costituito da una curva che ha un tipico andamento
“scendi-poi-sali”, oppure “sali-poi-scendi”,
chiamata “parabola”.

Quando il **coefficiente di x^2** nel trinomio è **positivo**,
la parabola ha la **concavità** (la parte “cava”)
rivolta verso l'alto →



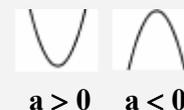
mentre se il **coefficiente di x^2** è **negativo**,
la parabola ha la **concavità**
rivolta verso il basso →



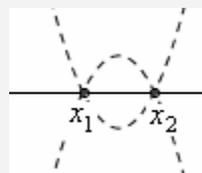
Lo studio del segno di un trinomio di 2° grado assegnato $ax^2 + bx + c$ si effettuerà disegnando “approssimativamente” la parabola $y = ax^2 + bx + c$ che rappresenta il grafico del trinomio dato, pensato come funzione, poi andando a vedere per quali valori di x la y corrispondente (ossia, il valore assunto dal trinomio) è positiva, nulla, negativa.

Ora, per tracciare approssimativamente la parabola in questione basterà:

- ♪ stabilire se la sua concavità è rivolta verso l’alto oppure verso il basso, semplicemente osservando il segno del coefficiente di x^2 nel trinomio;
- ♪ stabilire se la parabola interseca l’asse x , e, in caso affermativo, DOVE lo interseca: ma ciò equivale a chiedersi per quali valori di x risulta $y = 0$, cioè a risolvere l’equazione $ax^2 + bx + c = 0$ (detta “equazione associata” al trinomio considerato).



$a > 0$ $a < 0$



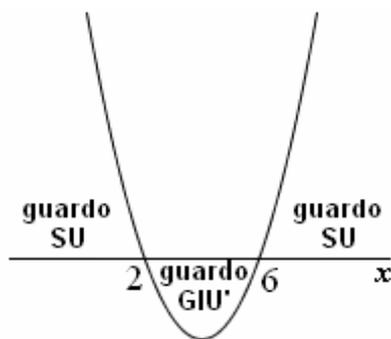
Studiamo, ad esempio, il segno del seguente trinomio di 2° grado: $x^2 - 8x + 12$

Si tratta di tracciare approssimativamente il grafico della parabola $y = x^2 - 8x + 12$.

- ♪ Di essa sappiamo che ha la concavità rivolta verso l’alto, perché il coefficiente di x^2 è $1 > 0$.
- ♪ Ora stabiliremo per quali valori di x la parabola interseca l’asse orizzontale, risolvendo l’equazione $x^2 - 8x + 12 = 0$.

Con la formula, o per scomposizione in fattori, si trova $x = 2 \vee x = 6$.

Allora il grafico sarà (ci interessa solo una “bozza”!) il seguente:



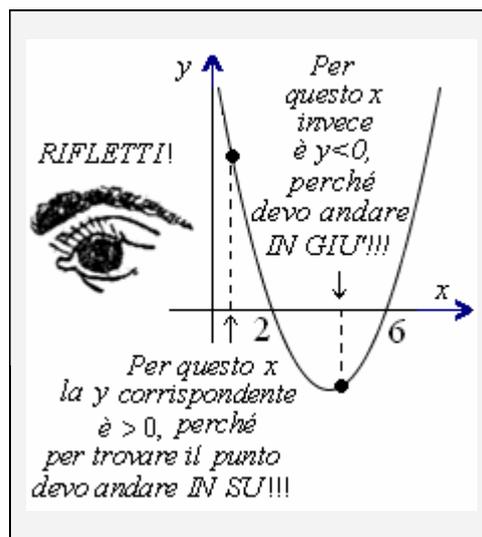
- ♥ Immagina di essere una FORMICHINA che cammina sull’asse delle x . I valori di x per cui è $y > 0$ sono quelli per i quali il punto sulla parabola lo si vede guardando verso l’alto.

... e osservando il grafico si traggono subito le conclusioni (y esprime il valore del trinomio):
 $y > 0$ per $x < 2 \vee x > 6$
 $y = 0$ per $x = 2 \vee x = 6$
 $y < 0$ per $2 < x < 6$

Ad es., con $x = 5$
 (5 è compreso fra 2 e 6)
 il trinomio

dovrebbe assumere
 valore negativo.

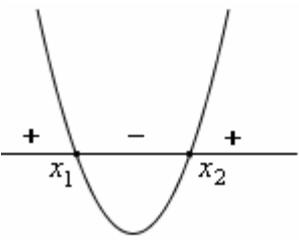
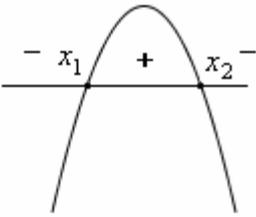
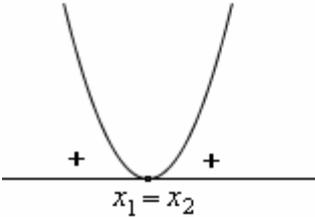
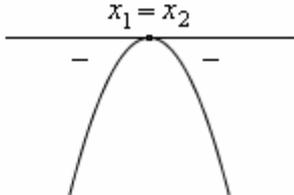
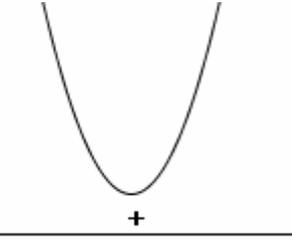
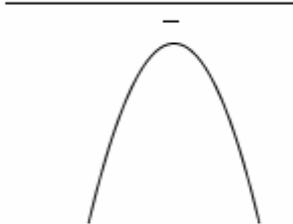
Controlla, sostituendo!
 Troverai che con $x = 5$
 il trinomio vale -3



ESERCIZI. Studiare il segno dei trinomi seguenti (risposte subito a fianco):

- | | | | |
|---------------------|--|---------------------|---|
| 1) $-x^2 - x + 20$ | $y > 0$ per $-5 < x < 4$
$y = 0$ per $x = -5 \vee x = 4$
$y < 0$ per $x < -5 \vee x > 4$ | 2) $2x^2 - x$ | $y > 0$ per $x < 0 \vee x > 1/2$
$y = 0$ per $x = 0 \vee x = 1/2$
$y < 0$ per $0 < x < 1/2$ |
| 3) $x^2 - 14x + 49$ | $y > 0$ per $x \neq 7$
$y = 0$ per $x = 7$
$y < 0$ per nessun valore di x | 4) $x^2 - x + 1$ | $y > 0$ per tutti i valori di x
$y = 0$ per nessun valore di x
$y < 0$ per nessun valore di x |
| 5) $49 - x^2$ | $y > 0$ per $-7 < x < 7$
$y = 0$ per $x = -7 \vee x = 7$
$y < 0$ per $x < -7 \vee x > 7$ | 6) $x^2 - 20x + 64$ | $y > 0$ per $x < 4 \vee x > 16$
$y = 0$ per $x = 4 \vee x = 16$
$y < 0$ per $4 < x < 16$ |
| 7) $x^2 - 16x + 64$ | $y > 0$ per $x \neq 8$
$y = 0$ per $x = 8$
$y < 0$ per nessun valore di x | 8) $x^2 - 12x + 64$ | $y > 0$ per tutti i valori di x
$y = 0$ per nessun valore di x
$y < 0$ per nessun valore di x |
| 9) $2x^2 + 2x - 24$ | $y > 0$ per $x < -4 \vee x > 3$
$y = 0$ per $x = -4 \vee x = 3$
$y < 0$ per $-4 < x < 3$ | 10) $-x^2 + 2x + 1$ | $y > 0$ per $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$
$y = 0$ per $x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}$
$y < 0$ per $x < 1 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{2}$ |

Volendo, si possono enunciare le seguenti **REGOLE**:

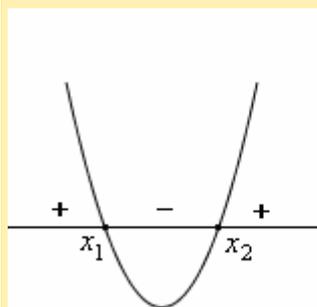
<p>Un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$ con $\Delta > 0$ ha segno concorde con quello del suo 1° coeff. per valori di x esterni all'intervallo delimitato dalle due soluzioni dell'equazione associata (cioè, per $x < x_1 \vee x > x_2$) mentre ha segno discorde rispetto a quello del suo 1° coefficiente per valori interni (cioè, per $x_1 < x < x_2$)</p>	<p>$\Delta > 0, a > 0$</p> 	<p>$\Delta > 0, a < 0$</p> 
<p>Un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$ con $\Delta = 0$ ha quasi sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, con una sola eccezione: per $x = x_1$, con $x_1 (= x_2)$ soluzione dell'equazione associata, il trinomio si annulla.</p>	<p>$\Delta = 0, a > 0$</p> 	<p>$\Delta = 0, a < 0$</p> 
<p>Un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$ con $\Delta < 0$ ha sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, senza eccezioni.</p>	<p>$\Delta < 0, a > 0$</p> 	<p>$\Delta < 0, a < 0$</p> 

Quando si risolve una disequazione di 2° grado, si ha sempre la possibilità di lavorare con un trinomio col 1° coefficiente positivo: infatti, se così non fosse, si potrebbero sempre cambiare segni e verso.

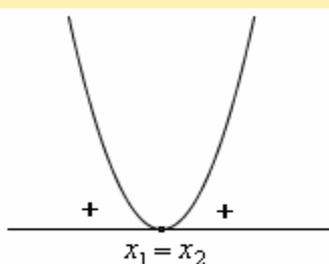
E' perciò molto comodo, oltre che conoscere bene le regole sopra riportate, tenere anche presente cosa dicono **LE STESSA REGOLE**, quando vengono **PARTICOLARIZZATE AL CASO $a > 0$** :

♥ **UN TRINOMIO DI 2° GRADO $ax^2 + bx + c$ CON 1° COEFFICIENTE POSITIVO ($a > 0$)**

se ha $\Delta > 0$
è **positivo per valori esterni**
 $x < x_1 \vee x > x_2$
e **negativo per valori interni**
 $x_1 < x < x_2$



se ha $\Delta = 0$
è **positivo per ogni valore di x ,**
con una sola eccezione:
è nullo per $x = x_1 (= x_2)$



se ha $\Delta < 0$
è **positivo**
per ogni valore di x ,
senza eccezioni.



Rimpiazzando, in questo schema, "positivo/negativo" con "concorde/discorde, in segno, rispetto al segno del 1° coefficiente", ecco che si torna alle regole generali.

Una DISEQUAZIONE DI 2° GRADO ci chiede di rispondere a uno solo dei tre punti in cui consiste lo studio del segno di un trinomio di 2° grado. Vediamo alcuni ESEMPLI SVOLTI.

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

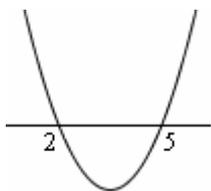
Equazione associata:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 5$$

Il grafico della parabola $y = x^2 - 7x + 10$ è il seguente ($a > 0$, quindi concavità verso l'alto):



La disequazione (che ha verso $<$) è perciò verificata per: $2 < x < 5$

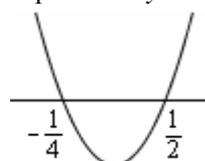
$$2x + 1 < 8x^2$$

$$-8x^2 + 2x + 1 < 0$$

1° coefficiente negativo: conviene cambiare segni e verso
 $8x^2 - 2x - 1 > 0$

Penso all'equazione associata e la risolvo: $x_{1,2} = \dots = \begin{cases} -1/4 \\ 1/2 \end{cases}$

Il grafico della parabola $y = 8x^2 - 2x - 1$ è:



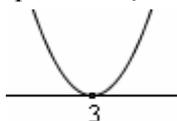
La disequazione (il cui verso *definitivo* è $>$) risulta quindi verificata per: $x < -1/4 \vee x > 1/2$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

L'equazione associata è: $x^2 - 6x + 9 = 0$

con le soluzioni $x_1 = x_2 = 3$

Il grafico della parabola $y = x^2 - 6x + 9$ è:



La disequazione è perciò verificata per $x \neq 3$

Anche (meglio!) con ragionamento più diretto:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0$$

La disequazione ci chiede dunque di stabilire per quali valori di x il quadrato $(x-3)^2$ è strettamente positivo.

Ma un quadrato è **quasi sempre** strettamente positivo: l'unica eccezione si ha quando il quadrato si annulla, il che avviene quando si annulla la sua base.

Perciò la disequazione proposta è verificata "quasi sempre", purché sia $x - 3 \neq 0$, $x \neq 3$.

$$x < \frac{x^2 + 5}{4}$$

$$4x < x^2 + 5$$

$$-x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$x^2 - 4x + 5 > 0$$

Passando all'equazione associata, si vede che è $\Delta < 0$ per cui tale equazione è impossibile.

Ciò significa che non esiste nessun valore di x

per il quale si abbia $y = x^2 - 4x + 5 = 0$:

la parabola $y = x^2 - 4x + 5$

è priva di intersezioni con l'asse delle x e il suo grafico è



La disequazione è perciò verificata $\forall x \in \mathbb{R}$

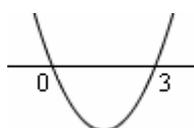
$$x^2 > 3x$$

$$x^2 - 3x > 0$$

$$x(x-3) > 0$$

Mutando ora nella nostra mente il $>$ in $=$ per pensare all'equazione associata, vediamo che le soluzioni di questa sono $x = 0 \vee x = 3$

Grafico:



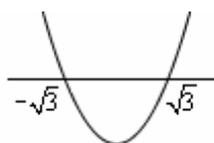
Soluzioni della disequazione:

$$x < 0 \vee x > 3$$

$$x^2 > 3$$

$$x^2 - 3 > 0$$

Eq. associata: $x^2 - 3 = 0$, con le soluzioni $x = \pm\sqrt{3}$.



Soluzioni della disequazione:

$$x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$$

NOTA

Sarebbe stato possibile risolvere questa disequazione anche in un altro modo, sullo stile dell'Esempio 1 di pagina 14

$$x^2 + 3 > 0$$

Si vede subito che la disequazione è sempre verificata, $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti il 1° membro è la somma di due termini, il primo dei quali è ≥ 0 per ogni x e il secondo dei quali è una costante > 0 .

E' quindi evidente che la somma di tali due termini sarà > 0 per ogni x .

$$\begin{array}{r} \geq 0, \forall x \\ \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{3}_{> 0} \\ > 0, \forall x \end{array}$$

Volendo risolvere in modo "standard", si trova un'eq. ass. impossibile, quindi un grafico "tutto sopra" rispetto all'asse x , e la conclusione è la medesima:

disequazione verificata $\forall x \in \mathbb{R}$