2.5 - Esercizi su disposizioni, combinazioni, permutazioni, coefficiente binomiale

Come ribadiremo nel commentare, alla pagina successiva, le soluzioni, si può ragionare

- ♪ cercando di ricondursi agli "schemi standard" delle disposizioni, combinazioni, permutazioni
- ♫ oppure semplicemente utilizzando quelle strategie di pensiero generali che abbiamo chiamato "1°, 2° e 3° principio del calcolo combinatorio".

Tu in questa rassegna di esercizi cerca magari di arrivare alla risposta *in entrambi i modi*:
ogni confronto fra modalità equivalenti di approccio è *molto istruttivo*!

Tieni comunque presente che
(sebbene ognuno di noi abbia una propria tendenza individuale a privilegiare l'una o l'altra modalità)
la *seconda* sembra essere di norma *più efficace*.
Essa è anche *più generale*, perché permette di cavarsela con minore difficoltà
quando il quesito è complicato e non può essere banalmente ricondotto a un caso standard.

E' tuttavia MOLTO UTILE ricordare sempre che

quando si tratta di "contare il numero dei modi in cui,
dato un insieme di *n* oggetti, è possibile scegliere *k* fra questi oggetti",
la risposta è data dal COEFFICIENTE BINOMIALE $\binom{n}{k}$.

40) 4 studenti devono essere interrogati, e bisticciano sull'ordine di "uscita".
In quanti modi è teoricamente possibile fissare quest'ordine?

41) 4 allievi devono accomodarsi, per un corso di recupero, in un'auletta vuota nella quale ci sono 8 banchi.
In quanti modi si possono disporre nell'aula?

42) Entra il bidello in un'auletta vuota, nella quale ci sono 10 sedie, per prendere, dato che servono in un'altra aula, 4 di queste sedie. In quanti modi può effettuare la scelta delle sedie da portar via, non essendo rilevante, ovviamente, l'ordine in cui le preleva?

43) Il mio contratto di lavoro è part-time, e mi richiede di essere in attività solo 3 giorni dal Lunedì al Venerdì.
In quanti diversi modi potrei fissare i 3 giorni lavorativi?

44) Fra 10 foto ne devo scegliere una da appendere in cucina, un'altra in tinello e una terza in camera da letto.
In quanti modi possibili posso effettuare questa tripla scelta?

45) Nadia è di animo tenero: essendosi trasferita in una casa con giardino, si reca al canile municipale, dove sono ospitati 10 animali, decisa a prenderne in affidamento ben 3. Impietosita dalla vista delle gabbie, decide di estrarre a sorte, anziché scegliere, i cani da adottare. Quanti sono i possibili esiti dell'estrazione?

46) In una classe di 20 studenti, ci sono solo 4 maschi! Se un bel giorno l'insegnante di Scienze ha deciso di estrarre coi bigliettini 6 studenti a caso a cui affidare il riordino del laboratorio,
I) quanti sono gli esiti possibili dell'estrazione?
II) fra tutti questi possibili esiti, quanti sono quelli nei quali compare
a) nessun maschio? b) tutti e quattro i maschi? c) uno e un solo maschio? d) almeno un maschio?

47) Sul corridoio di una scuola si affacciano 5 aule, tutte pressappoco della stessa ampiezza, che verranno occupate dalle 5 classi I A, II A, III A, IV A, V A.
In quanti diversi modi è possibile effettuare l'assegnazione delle aule alle classi?

48) In una classe di 20 allievi, 8 maschi e 12 femmine, dato che nessuno si è offerto di presenziare, di domenica pomeriggio, alla cerimonia di inaugurazione di un monumento, si decide di estrarre a sorte una delegazione di 3 maschi e 3 femmine. Quanti esiti diversi potrà avere l'estrazione?

49) Una password dev'essere obbligatoriamente di 4 caratteri, ciascuno dei quali può essere scelto fra le 26 lettere (maiuscole) dell'alfabeto inglese, oppure fra le 10 cifre da 0 a 9. Quante sono le password possibili?

50) Risolvi le seguenti *equazioni*: a) $\binom{x+1}{4}=5\binom{x-1}{3}$ b) $\binom{x}{3}=\binom{x}{2}$ c) $\binom{y}{4}=\binom{y}{6}$ d) $7\binom{x}{3}=4\binom{x}{4}$
e) $\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=4x$ f) $\binom{w+2}{2}=28$ g) $3\cdot\left[\binom{x}{2}+\binom{x}{3}\right]=5\binom{x+1}{2}$ h) $\binom{x-1}{3}+\binom{x}{4}=\frac{2}{3}\cdot\binom{x-1}{2}$

51) Dimostra le seguenti *identità*: a) $\binom{2k-1}{k}=\binom{2k-1}{k-1}$ b) $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$
c) $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\cdot\binom{n-1}{k}$ d) $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{p}=\binom{n}{p}\cdot\binom{n-p}{k-p}$ e) $\binom{2k-1}{k}=\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$ f) $\dfrac{\binom{n-k}{h}}{\binom{n}{h}}=\dfrac{\binom{n-h}{k}}{\binom{n}{k}}$

RISPOSTE

40) In $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi. P_4 è il numero delle permutazioni di 4 oggetti, ossia il *numero dei modi in cui è possibile permutare l'ordine di 4 oggetti*.
Osserviamo che sarebbero bastate le tecniche generali di pensiero apprese nei paragrafi precedenti, e in particolare il 2° Principio Generale del Calcolo Combinatorio, per giungere facilmente alla risposta, anche senza aver mai sentito parlare di "permutazioni".

41) In $D_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ modi. $D_{8,4}$ è il numero delle disposizioni di 8 oggetti, presi a 4 a 4, ossia il n° delle quaterne ordinate che si possono costruire utilizzando (senza ripetizione) 4 fra gli 8 oggetti dati.
E' evidente che qui c'entra l'ordine: non è la stessa cosa, per Anna, trovarsi nel banco numero 3 piuttosto che nel numero 7, perché magari il banco 3 è proprio davanti alla cattedra mentre il 7 è più "tranquillo" …
Osserviamo che sarebbero bastate le tecniche generali di pensiero apprese nei paragrafi precedenti, e in particolare il 1° Principio Generale del C. C., per giungere facilmente alla risposta:
Anna può scegliere il suo banco in 8 possibili modi, dopodiché Bruno può scegliere uno dei banchi rimanenti in 7 possibili modi, Carlo può scegliere il suo in 6 modi, Donatella in 5 modi.
Diagramma ad albero … ventagli successivi di scelte … moltiplicazione $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

42) $C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 210$ 43) $\binom{5}{3} = 10$ 44) $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ 45) $\binom{10}{3} = 120$

46) I) $\binom{20}{6} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{3} \cdot 17 \cdot \cancel{16}^{2} \cdot \cancel{15}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 38760$ possibili esiti

II) a) Tanti quanti sono i gruppi di 6 femmine, ottenibili "pescando" fra le 16 femmine: $\binom{16}{6} = 8008$

b) Tanti quanti sono i gruppi di 2 femmine! $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 120$

c) Scelgo uno dei 4 maschi, e gli accosto un gruppo di 5 femmine! $4 \cdot \binom{16}{5} = ... = 17472$

d) Il numero di esiti senza nessun maschio è, come abbiamo visto,
$\binom{16}{6} = 8008$; il n° tot. di esiti è $\binom{20}{6} = 38760$; la risp. è dunque $\binom{20}{6} - \binom{16}{6} = 38760 - 8008 = 30752$

47) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

48) Devo scegliere i 3 maschi, e lo posso fare in $\binom{8}{3}$ modi; per ognuna delle $\binom{8}{3}$ possibili scelte dei maschi, mi si apre un ventaglio di $\binom{12}{3}$ possibilità per la scelta delle 3 femmine. La risposta è dunque $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{3}$.

49) Domanda-trabocchetto! Qui NON SI PUO' RAGIONARE IN TERMINI DI DISPOSIZIONI!
Infatti nulla vieta che un carattere, alfabetico o numerico, sia ripetuto due o più volte nella sequenza …
Più avanti studieremo a questo proposito le "disposizioni con ripetizione",
ma non sono comunque necessarie, per rispondere, conoscenze in più rispetto a quelle che già possediamo:
Per la scelta del 1° carattere ho $26 + 10 = 36$ possibilità, dopodiché mi si apre un ventaglio sempre di 36 possibilità per la scelta del 2° carattere … La risposta al quesito è $36^4 = 1679616$.

50) a) $\frac{(x+1) \cdot x \cdot \cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x-2)}}{4!} = 5 \cdot \frac{\cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x-2)} \cdot (x-3)}{3!}$

Abbiamo semplificato per $(x-1)(x-2)$; ciò porterebbe a trovare le due soluzioni $x=1$, $x=2$ che però non sono accettabili perché, affinché abbiano senso $\binom{x+1}{4}$ e $\binom{x-1}{3}$, deve comunque essere $x \ge 4$.

$\frac{(x+1) \cdot x}{4!} = 5 \cdot \frac{x-3}{3!}$ $\frac{(x+1) \cdot x}{\cancel{4!}} = \frac{20(x-3)}{\cancel{4!}}$ $x^2 + x = 20x - 60$ $x^2 - 19x + 60 = 0$ $(x-4)(x-15) = 0$ $\boxed{x=4} \vee \boxed{x=15}$

b) $x=5$ c) $y=10$ d) $x=10$ e) $x=5$ f) $w=6$ g) $x=6$ h) $x=4$

51) a) $\frac{(2k-1)(2k-2)...(2k\cancel{-1}-k\cancel{+1})}{k!} = \frac{(2k-1)(2k-2)...(2k\cancel{-1}-(k-1)\cancel{+1})}{(k-1)!}$

$\frac{(2k-1)(2k-2)... \cdot k}{k!} = \frac{(2k-1)(2k-2)...(k+1)}{(k-1)!}$; $\frac{(2k-1)(2k-2)...(k+1) \cdot \cancel{k}}{\cancel{k}(k-1)!} = \frac{(2k-1)(2k-2)...(k+1)}{(k-1)!}$ $\boxed{\text{OK}}$